MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE

TOME VIII



PARIS

GAUTHIER-VILLARS

IMPRIMEUR-LIBRAIRE DES COMPTES RENDUS DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER

QUAI DES AUGUSTINS, 55

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME VIII.

DE L'IMPRIMERIE DE FIRMIN DIDOT,
IMPRIMEUR DU ROI ET DE L'INSTITUT, RUE JACOB, N° 24.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT

DE FRANCE.

TOME VIII.



PARIS,

CHEZ FIRMIN DIDOT, PÈRE ET FILS, LIBRAIRES,

RUE JACOB, N° 24.

1829.

TABLE

DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME,

Qui est le huitième *de la collection des Mémoires de l'Académie des Sciences, depuis l'ordonnance de* 21 *mars* 1816.

TABLE DES MÉMOIRES CONTENUS DANS CE VOLUME.

HISTOIRE DE L'ACADÉMIE.

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année 1825.

PARTIE MATHÉMATIQUE,

Analyse des travaux de l'Académie royale des sciences, pendant l'année 1825.

PARTIE PHYSIQUE,

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1825.

PARTIE MATHÉMATIQUE.

PAR M. LE BARON FOURIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

GÉOMÉTRIE.

LE XVIe et dernier livre de la Mécanique céleste a été publié dans le cours de cette année; l'illustre auteur, en achevant cette mémorable entreprise, laisse aux sciences un des plus beaux et des plus utiles monuments qu'elles aient encore produits. Cet ouvrage intéresse la gloire du siècle par la grandeur du sujet, la perfection des résultats de l'astrono-

mie, leurs rapports avec les usages civils, et surtout par les progrès admirables de l'analyse mathématique des modernes, qui embrasse aujourd'hui tous les principaux phénomènes de l'univers.

Le XVIe livre a pour objet le mouvement des satellites. Il contient, comme les précédents, 1° l'exposé historique des travaux des géomètres et des astronomes; 2° des recherches récentes sur divers points du système du monde. Dans le chapitre 1er, qui est relatif au mouvement de la lune, l'auteur rappelle les observations les plus anciennes, et cette longue série de découvertes qui nous ont fait connaître le mouvement de cet astre. Les anciens astronomes de la Chaldée, ceux d'Alexandrie, et ensuite Tycho-Brahé et Képler, avaient déterminé par l'observation plusieurs inégalités du mouvement lunaire. Newton rechercha et découvrit les causes dynamiques de ces perturbations, et prouva qu'elles dérivent du principe de la gravitation universelle.

Le mouvement de la lune autour de la terre est continuellement modifié par l'attraction du soleil. L'action de cet astre qui change avec les distances, et s'exerce sur la planète et sur son satellite, fait varier le mouvement lunaire, la situation, l'inclinaison et les dimensions de l'orbite. Il était fort difficile de discerner toutes ces conséquences théoriques. On remarque dans cette recherche newtonienne un art profond qui consiste surtout à saisir les caractères généraux des phénomènes, à former des suppositions qui, sans altérer ces caractères, rendent l'examen beaucoup plus facile. La science analytique n'avait point encore acquis toute l'étendue nécessaire à la solution complète de ces questions. Newton y suppléa en quelque sorte par une longue méditation, il expliqua

évidemment plusieurs des grandes inégalités, et indiqua d'autres variations : on ne put douter qu'elles ne fussent toutes des conséquences du principe de la gravitation, et l'histoire des sciences remarquera surtout comment il parvint à fonder une théorie, incomplète à la vérité, mais incontestable, au milieu de tant de causes d'incertitude.

Vers le milieu du dernier siècle, la dynamique et l'analyse différentielle ayant fait des progrès importants et rapides, on entreprit de perfectionner la théorie lunaire par l'application du calcul. La navigation et la géographie reçurent, du concours de cette théorie et des observations, de nouvelles tables qui ont acquis progressivement un haut degré d'exactitude. M. de La Place rappelle les premières recherches de Clairault, de d'Alembert et d'Euler, et l'origine du célèbre problème des trois corps. Il indique avec précision la méthode suivie par chacun des géomètres qui ont traité cette question. On sait que l'imperfection des premiers calculs avait donné lieu d'examiner s'il n'était point nécessaire de modifier l'expression de la loi newtonienne, pour expliquer complétement le mouvement de l'apogée. Mais on ne tarda point à reconnaître qu'au lieu de se borner à une première approximation, il fallait continuer l'application du calcul, et l'on trouva ainsi des résultats de plus en plus conformes aux observations.

Après avoir cité les tables de Mayer et de Mason, et le travail analytique de Lagrange sur le problème des trois corps, l'auteur passe à l'importante question des inégalités séculaires du mouvement de la lune. Lorsque Halley, et après lui d'autres astronomes eurent constaté l'accélération du moyen mouvement, il restait aux géomètres à donner l'explication analytique de ce phénomène. On examina s'il ne provenait

A 2

point de la résistance des milieux planétaires, ou s'il fallait admettre une transmission successive et non instantanée de l'attraction. Enfin M. de La Place donna une solution claire et inattendue de cette question, et il y fut conduit par ses recherches sur la théorie des satellites de Jupiter. Il prouva que le changement séculaire de l'excentricité de l'orbe terrestre occasionne dans le moyen mouvement de la lune l'équation reconnue par les astronomes, et qu'il en résulte deux autres équations séculaires relatives au nœud et au périgée. L'existence et la quantité de ces équations ont été confirmées par la comparaison attentive des observations les plus anciennes, avec celles des modernes.

Cette théorie des mouvements lunaires offre des conséquences générales très-remarquables; elle éclaire plusieurs questions relatives au système du monde. On en conclut que les milieux planétaires n'opposent point de résistance sensible au cours des astres, que la force attractive se transmet avec une vitesse incomparablement plus grande que celle de la lumière, que la durée du jour n'a point changé d'un centième de seconde centésimale, depuis le siècle des Ptolomées.

La même théorie, telle qu'elle est exposée dans le livre VII de la Mécanique céleste, démontre aussi les inégalités lunaires dont la cause est l'aplatissement du globe terrestre; et, ce qui doit être cité comme un des plus beaux résultats des sciences modernes, elle donne avec précision la mesure de cet aplatissement. Elle donne aussi la valeur de la parallaxe solaire, conforme à celle que l'on déduit d'observations entièrement différentes.

On résout par ces mêmes principes, les questions qui se sont élevées sur la nature physique de la force attractive; on

reconnaît qu'à égalité de distance, elle imprime à toute matière une même vitesse, et que son action ne subit aucune altération sensible par l'interposition des corps.

L'auteur rappelle les Tables lunaires, que M. Damoiseau a déduites de la théorie appliquée aux seules données fondamentales, et un travail très-important de MM. Plana et Carlini sur les équations séculaires. Ces ouvrages ont été couronnés en 1820, par l'Académie des Sciences de l'Institut de France.

La notice historique fait ensuite mention des inégalités à longue période qu'une discussion récente a indiquées, et des recherches analytiques auxquelles elles ont donné lieu. L'action solaire, l'ellipticité du sphéroïde terrestre, la différence qui existerait entre les deux hémisphères, sont propres à occasioner des inégalités de ce genre; mais l'effet en paraît trop peu sensible pour satisfaire aux observations. Il reste donc à continuer ces observations, pour en comparer les résultats à ceux de l'examen théorique.

Les chapitres suivants, II, III et IV, contiennent des recherches analytiques sur la théorie lunaire de Newton, sur les inégalités à longue période qui résulteraient de la forme non sphérique de la terre, et sur les variations que l'on supposerait dans la force attractive. L'examen de ces questions sert de fondement à plusieurs des propositions énoncées dans la notice historique qui précède. Ainsi dans le chapitre II, l'auteur applique l'analyse aux principes dont Newton s'est servi pour expliquer l'inégalité lunaire connue sous le nom de variation, le mouvement des nœuds et la variation de l'inclinaison de l'orbite. Les expressions analytiques font connaître distinctement la nature de la méthode, et les conséquences plus étendues qu'on en aurait pu déduire.

Le chapitre III traite, 1° de l'inégalité lunaire que produirait une différence des deux hémisphères terrestres; 2° des inégalités qui dépendent de la partie elliptique du rayon de la terre.

Dans le chapitre IV, l'auteur examine si la connaissance des mouvements lunaires, telle que nous la possédons aujourd'hui, permet de supposer que la force attractive émanée du soleil est modifiée comme le serait l'intensité de la lumière par l'interposition des milieux, ou si l'on peut admettre qu'à égalité de distance, cette force n'agit pas également sur la matière de la lune, et sur celle du globe terrestre. On démontre facilement, par le résultat de cette analyse comparé à la valeur de la parallaxe solaire, que l'action attractive du soleil sur les deux astres est exactement la même. On reconnaît aussi que si l'interposition des couches lunaires diminuait l'attraction terrestre, cet effet serait rendu sensible par les observations; et enfin, que l'interposition de la matière du globe terrestre ne diminue pas de la millionième partie de sa valeur, l'action qu'une molécule placée au centre exerce sur un point de la surface.

Le chapitre V a pour objet le mouvement des satellites de Jupiter, et l'exposé succinct des découvertes des astronomes et des géomètres sur cette importante question. Après que Galilée eut découvert ces astres, on déduisit des observations et surtout des éclipses, plusieurs conséquences qui intéressaient au plus haut degré l'astronomie générale et la physique céleste. Roemer donna le premier cette ingénieuse et mémorable explication, qui servit à mesurer la vitesse de la lumière dans les espaces planétaires. Bradley fonda sur cette découverte une théorie qui s'applique à tous

les astres, et est un des éléments fondamentaux de l'astronomie.

L'utilité que présentait l'observation des éclipses des satellites, donna lieu à des recherches multipliées et attentives; mais on n'aurait pu faire aucun progrès considérable dans cette étude sans l'application de l'analyse mathématique, à la cause générale qui règle les mouvements de ces corps. L'auteur de la notice rappelle une première vue de Newton; il cite principalement le travail de Lagrange couronné par l'Académie des Sciences de Paris, et indique la méthode suivie par cet illustre géomètre.

On sait combien cette branche de l'astronomie a reçu de perfection et d'étendue de l'auteur même de la Mécanique céleste. Les rapports singuliers de mouvement et de situation que conservent entre eux les trois premiers satellites, ont été évidemment expliqués par l'action mutuelle des trois astres. La même analyse a servi à distinguer les inégalités qui peuvent devenir sensibles, et à démontrer leur influence réciproque. On en a déduit des lois remarquables qui déterminent la situation de l'orbite d'un satellite, rapportée à l'orbite de Jupiter. Ces théories données par M. de La Place, et la discussion d'un nombre immense d'observations des éclipses, ont servi à former des tables que tous les astronomes ont adoptées.

Dans le chapitre VI, l'auteur donne la solution analytique d'une question nouvelle, qui consiste à déterminer l'influence des grandes inégalités de Jupiter sur les mouvements de ses satellites. Le septième et dernier chapitre rappelle les découvertes relatives aux satellites de Saturne et d'Uranus.

Huygens, Dominique Cassini, et William Herschel, nous

ont fait connaître ces astres. Toutes les particularités de leur cours que l'on a pu observer sont conformes aux lois générales qui dérivent du principe de la gravitation. Le second Cassini (Jacques), en publiant ses observations, relatives au dernier satellite, remarque que ces corps *obéïssent à deux efforts, dont l'un les entraîne suivant la direction du plan de l'anneau, et l'autre emporte Saturne et toutes les planètes suivant l'écliptique.* Il ajoute que la première de ces forces doit produire sur le satellite le plus éloigné de la planète, un effet beaucoup moindre que sur les corps très-voisins de ces satellites, et que c'est pour cette raison que le plan de l'orbite de ce satellite est plus incliné sur le plan de l'anneau.

L'auteur de la Mécanique céleste cite ce passage remarquable, qui exprime clairement le caractère physique du phénomène. Et en effet, le mouvement de rotation de Saturne ayant porté la matière de cet astre vers l'équateur, il s'y est formé une masse exubérante, dont l'attraction retient fortement l'anneau et les premiers satellites dans le plan équatorial.

Dans la plupart des questions de l'astronomie théorique, on peut, en considérant les faits généraux, entrevoir les causes physiques qui les produisent; mais il y a un intervalle immense entre ces premières vues qui se présentent d'elles-mêmes à tous les esprits justes, et l'explication mathématique des phénomènes. Cette explication consiste à exprimer exactement les rapports que les causes naturelles doivent établir, et à comparer les résultats numériques du calcul avec les faits observés. La philosophie naturelle perdrait toute certitude, si elle était dépourvue de ses principes mathématiques. Des rapports aussi composés que ceux qui subsistent entre les diverses parties du système du monde ne pouvaient être

exprimés que par l'analyse générale des nombres, dont la Grèce, et peut être l'Inde ont connu quelques éléments, mais qui a été pour ainsi dire entièrement inventée par les nations modernes.

Le grand ouvrage dont nous annonçons la conclusion est un témoignage éclatant de la puissance de cet art, et la partie de ce dernier livre qui concerne la théorie des mouvements lunaires, en rappelle une des plus étonnantes applications. L'étude de ces mouvements sert de guide dans les navigations de long cours; elle indique la loi suivant laquelle l'attraction des astres décroît avec la distance, nous montre les effets de l'aplatissement du globe, et en mesure la quantité avec une précision au moins égale à celle que procurent les grands voyages géodésiques. Enfin, cette théorie confirme et perfectionne nos connaissances astronomiques relatives à la distance de la terre au soleil.

On a entrepris de décider, par des expériences précises sur les oscillations des corps, si la gravité imprime une égale vitesse à des matières différentes. Nous avons dit que cette question est aussi résolue par l'observation des mouvements lunaires. Ils forment une série subsistante d'expériences que la nature renouvelle sans cesse, et qui attestent la figure elliptique du globe terrestre, l'uniformité constante de son mouvement diurne, l'action égale de la gravité qui pénètre différentes matières, se propage avec une vitesse infinie, et n'est point altérée par l'interposition des corps. Mais ces conséquences que nous offre le spectacle de la nature, ne pouvaient être connues que par une longue méditation; elles exigeaient des sciences perfectionnées. Il y a un ordre de connaissances supérieures réservées aux études persévérantes.

Magna tardè proveniunt. Multa servat Eleusis... revisentibus.

La théorie des nombres a été perfectionnée par les successeurs de Fermat, et n'a point cessé d'attirer l'attention des géomètres. Cette branche de l'analyse, que M. Le Gendre avait déja enrichie de ses découvertes, et qu'il a traitée dans un ouvrage justement regardé comme classique, a été l'objet de recherches récentes que nous ne pouvons qu'indiquer brièvement. Elles sont rapportées dans un second supplément à la théorie des nombres, publié par M. Le Gendre sur la fin de 1825. L'auteur a considéré de nouvelles questinos d'analyse indéterminée, et il rappelle un des théorèmes principaux de Fermat. Il cite une proposition remarquable et une démonstration très-ingénieuse que l'on doit à mademoiselle Sophie Germain. On sait que cette dame cultive les branches les plus élevées de l'analyse, et que l'Académie des Sciences de l'Institut lui a décerné en 1825 un des grands prix de mathématiques.

Dans le commentaire sur Diophante, Fermat déclare avoir démontré que le carré est la seule puissance qui puisse être décomposée en deux autres du même ordre. On a reconnu la vérité de cette proposition pour le cube, et pour la quatrième puissance; mais on n'a pu parvenir jusqu'ici à démontrer que la décomposition est impossible dans tous les degrés supérieurs. M. Le Gendre traite cette question pour le cinquième degré, et la résout complètement. Il cite à ce sujet un Mémoire fort intéressant de M. Dirichlet, qui s'est occupé avec un succès remarquable des questions difficiles d'analyse indéterminée, et qui est parvenu à prouver rigoureusement l'impossibilité d'un grand nombre d'équations

du cinquième degré. (Voir plus bas l'énumération des rapports faits à l'Académie.)

La démonstration que M. Le Gendre vient de donner du théorème de Fermat pour les équations du cinquième degré se trouve dans ce nouveau supplément. L'auteur établit aussi des propriétés qui se rapportent à des équations indéterminées des divers degrés. Il prouve que si la décomposition d'une puissance en deux autres était possible, elle n'aurait lieu que pour des nombres d'une grandeur immense. Par exemple, l'équation $x^n+y^n+z^n=0$ ne pourrait être vérifiée que par des nombres dont les puissances contiendraient plus de 638 chiffres. On trouve dans le même ouvrage plusieurs théorèmes, qui montrent que les recherches d'analyse indéterminée offrent des applications utiles aux autres parties de la science du calcul.

M. Cauchi a présenté, dans le cours de cette année, plusieurs Mémoires d'analyse qui ont pour objet des questions importantes de calcul intégral, ou qui contiennent des recherches nouvelles sur l'analogie des puissances et des différences de tous les ordres, sur la sommation de certaines séries, et la résolution de quelques équations indéterminées en nombres entiers.

Dans celui de ces Mémoires qui a été lu le 28 février 1825, l'auteur examine la nature des intégrales définies, lorsque les limites de l'intégration indiquée sont des quantités imaginaires; il résout très-distinctement cette question, en considérant la formule intégrale comme la limite des sommes que l'on formerait en attribuant aux variables une infinité des valeurs intermédiaires. En effet, cette notion des limites

ne laisse subsister aucun doute sur la nature des intégrales prises entre des termes donnés. Elle montre clairement les cas purement abstraits, où les valeurs exprimées par les formules seraient indéterminées. Au reste, de tels résultats ne peuvent appartenir à aucune question dont l'objet est exactement défini. En général, la considération des limites éclaircit toutes les difficultés de l'analyse. Loin d'écarter cette notion des théories analytiques, il importe beaucoup d'en multiplier les applications. L'analyse que l'on a appelée infinitésimale n'est autre chose que l'algèbre appliquée à la notion des limites, qui sert de fondement aux plus belles inventions de la géométrie grecque.

M. Cauchi a présenté aussi, dans plusieurs séances, des extraits assez étendus de ses recherches. Il y rappelle des questions d'analyse qu'il avait traitées précédemment dans divers ouvrages et les résultats qu'il a obtenus. Son Mémoire, remis le 25 avril 1825, a pour objet de fonder sur l'analogie connue des puissances et des différences de tous les ordres un système de notations qui servent à représenter les intégrales d'une classe d'équations différentielles, ou à différences finies ou partielles. Dans le cours de ce Mémoire, l'auteur cite plusieurs fois un travail fort remarquable de M. Brisson, inspecteur-divisionnaire des ponts-et-chaussées, qui a traité des questions analogues, en considérant sous un point de vue général l'analogie des exposants avec les caractéristiques de différentiation et d'intégration.

M. Cauchi se propose ensuite divers problèmes analytiques dont il déduit la solution des formules et notations qu'il a expliquées. Il donne ainsi les intégrales d'équations linéaires, différentielles ou aux différences finies, ou à différentielles

partielles, ou qui contiennent à la fois ces deux sortes de différences. L'auteur rappelle les solutions de plusieurs questions physiques très-importantes, comme la distribution de la chaleur, le mouvement des ondes, les oscillations des lames et des surfaces élastiques ou flexibles, et cite à ce sujet les applications du théorème de M. Fourier, qui donne l'expression des fonctions arbitraires en intégrales définies, transformation sans laquelle aucune de ces questions ne pourrait être résolue.

L'auteur examine ensuite d'autres questions d'analyse dont on ne pourrait faire connaître l'objet sans employer les expressions même du calcul. Il indique aussi divers procédés analytiques qu'il a développés dans un des Mémoires de l'École Polytechnique de France, ou dans ceux qu'il avait présentés à l'Académie.

Dans la séance du 28 décembre 1825, M. Cauchi a remis un Mémoire qui a pour objet la sommation de plusieurs suites composées d'un nombre fini de termes. L'auteur emploie dans cette recherche un procédé d'analyse qu'il nomme calcul des résidus, et dont il indique d'autres applications à des questions variées.

Un Mémoire du même auteur, présenté dans le mois de décembre 1825, a pour objet la résolution de certaines questions d'analyse indéterminée. L'auteur considère les équations homogènes, et principalement celles des premiers degrés. La somme des exposants des inconnues étant la même pour chaque terme, il en résulte des conditions qui conduisent à résoudre en nombres entiers les équations proposées, ou à déduire d'une solution particulière connue toutes les solutions possibles, ou une multitude d'autres solutions.

L'Académie a reçu, comme les années précédentes, plusieurs pièces ou Mémoires qui ont pour objet la quadrature du cercle, la trisection de l'angle, le mouvement perpétuel; et conformément à une délibération déja ancienne, dont les motifs ont été publiés, ces Mémoires n'ont donné lieu à aucun rapport.

On a adressé aussi à l'Académie un assez grand nombre de Mémoires sur la théorie des lignes droites parallèles. Les auteurs s'étaient proposé de donner une démonstration exacte du cinquième *postulatum* du Ier livre d'Euclide. Il a été facile de reconnaître, dès le premier examen, l'erreur de ces démonstrations. Elle consiste presque toujours à supposer comme évidente une proposition qui renferme celle que l'on a pour but de prouver.

Quelque opinion que les géomètres se soient formée sur la nature de cette question, ils s'accordent à regarder les propriétés des parallèles comme fondées sur des notions sensibles dont la vérité est manifeste. Par exemple, si l'on ne considérait pas comme une proposition évidente que par un point m pris hors d'une ligne droite A, on ne peut mener, sur le plan qui contient le point m et la ligne A, qu'une seule droite B qui étant prolongée à l'infini ne rencontre pas la première A; on pourrait remplacer ce lemme, qui ne diffère pas de celui d'Euclide, par la proposition suivante : lorsque deux plans sont perpendiculaires sur une même droite, toute ligne droite perpendiculaire sur l'un des deux plans rencontre nécessairement l'autre plan, si elle est prolongée. Or de ce dernier lemme, dont la vérité est très-sensible, on déduit rigoureusement toutes les propriétés des lignes parallèles, et l'on pourrait encore les conclure d'autres pro-

positions également certaines. Il ne peut donc rester aucun doute sur ce point de théorie.

PHYSIQUE.

Une des applications les plus utiles des théories mathématiques ou physiques consiste à reconnaître, par la comparaison des effets que produisent à différentes époques les forces naturelles, si l'intensité de ces forces subit des changements sensibles dans le cours des siècles. Une question de ce genre s'est élevée au sujet de l'action magnétique du globe terrestre. Il s'agit d'examiner si les sciences offrent dans leur état actuel un procédé expérimental que l'on renouvellerait à différentes époques, et qui indiquerait avec certitude les changements séculaires de l'action magnétique terrestre. Les directions de l'aiguille aimantée sont sujettes à des variations nombreuses, que l'on a observées avec soin dans ces derniers temps; la durée des oscillations, que l'on peut facilement mesurer, a un rapport nécessaire avec la force qui tend à ramener l'aiguille à sa position initiale. Mais cette force dépend de l'état physique du corps aimanté; il serait donc nécessaire de conserver ou de reproduire ce même état. C'est en cela que consiste la difficulté.

M. Arago a proposé de la résoudre en observant l'effet produit par un disque métallique qui tournerait avec une vitesse donnée, dans un plan perpendiculaire à la direction de l'aiguille de la boussole d'inclinaison. En effet, si l'on place auprès de ce disque une aiguille aimantée qui ne puisse que tourner autour de l'axe du disque parallèlement à son plan, et si le disque est d'abord en repos, l'aiguille pourra prendre

indifféremment toutes les positions autour de l'axe; et lorsqu'on placera à l'une de ses extrémités un contre-poids, elle se dirigera dans le plan vertical perpendiculaire au plan de rotation. Mais il n'en sera pas de même lorsqu'on imprimera au disque métallique un mouvement de rotation. L'aiguille sera détournée de la direction qu'on vient d'indiquer et s'arrêtera dans une position différente. Or la quantité de la déviation dépend de l'état magnétique de l'aiguille; elle changerait si cet état venait à changer; on connaîtra donc que l'état magnétique est le même, lorsqu'on observera la même déviation pour un poids et une vitesse donnés. On peut varier à volonté les résultats de ces expériences en changeant la masse des contre-poids et les vitesses du disque. On parviendra ainsi à conserver ou à reproduire un état magnétique constant. C'est une application de la découverte récente dont on est redevable à M. Arago.

M. Poisson a proposé un moyen de comparer, à deux époques différentes, les intensités de la force magnétique; et il déduit ces procédés de la théorie mathématique qu'il a donnée dans ses Mémoires précédents sur le magnétisme. L'action du globe terrestre peut varier par le changement de distribution des deux fluides magnétiques, ou par le changement d'intensité de la force propre aux particules de ces fluides. L'auteur montre que l'effet résultant de ces deux causes, ou de l'une d'elles, serait rendu sensible et serait mesuré si l'on observait avec beaucoup de précision la durée des oscillations de deux aiguilles dont chacune serait soumise séparément 1° à la seule action terrestre, 2° à cette action combinée avec celle de l'autre aiguille supposée fixe.

Chaque aiguille est suspendue par son centre de gravité, en sorte qu'elle prend, dans la situation d'équilibre, la direction de la force terrestre.

On place les deux centres dans une même droite parallèle à cette direction, et l'on mesure la distance de ces centres, ainsi que les moments d'inertie rapportés respectivement aux axes qui passent par ces points. Cela posé, l'auteur conclut de sa théorie, que les résultats des quatre expériences font connaître une quantité déterminée dont la valeur ne dépend que de l'action terrestre. Cette quantité serait la même, quelles que fussent les aiguilles soumises aux expériences. On pourrait ainsi, en renouvelant les observations après un laps de temps considérable, juger si l'action magnétique a changé, et dans quel rapport. L'auteur de ce Mémoire y rappelle les conditions physiques qui servent de fondement à la théorie, et montre comment il faut procéder au calcul numérique, pour déterminer avec une approximation suffisante cette quantité fixe, qui dépend, suivant une loi très-simple, de deux éléments, savoir : une force commune à toute substance magnétique, et une quantité relative à la distribution du magnétisme terrestre. L'expérience seule peut prononcer sur le degré de précision que l'on atteindrait en faisant usage de ces deux moyens, qui ont pour objet de constater les changements progressifs de la force magnétique.

Dans la séance du 28 novembre de cette année, M. de La Place a présenté à l'Académie des considérations générales sur la théorie physique du globe terrestre. Il s'est attaché à montrer l'utilité des expériences qui ont pour objet de dé-

terminer avec précision la valeur actuelle de quelques éléments principaux, afin que l'on puisse juger par la suite si ces éléments subissent des changements sensibles dans le cours des siècles.

Les questions principales qui lui paraissent devoir être le sujet de cet examen concernent le magnétisme terrestre, la proportion des deux gaz dont l'air atmosphérique est formé, la pression moyenne de l'atmosphère dans des lieux déterminés, les effets de la chaleur solaire, et les températures intérieures mesurées à des profondeurs considérables.

Les théories physiques et l'usage des instruments précis ne remontent point à des époques assez anciennes, pour que l'on puisse aujourd'hui obtenir des conséquences certaines par la comparaison des observations. On ne trouve des résultats de cet ordre que dans l'étude des faits astronomiques. C'est ainsi que les géomètres ont pu reconnaître que la durée de la révolution diurne de la terre, la position de son axe de rotation, la température moyenne de la masse terrestre, n'ont pu subir que des changements totalement insensibles depuis les temps de l'école d'Alexandrie jusqu'à nous. Il est important d'examiner si, dans l'état présent des sciences physiques, on peut déterminer par des méthodes et des expériences exactes quelques éléments fondamentaux dont on léguera la connaissance à ceux qui nous succéderont dans l'observation de la nature. C'est un des principaux objets de l'étude des sciences chez toutes les nations; et il n'y a aucune découverte qui ne porte sa lumière à la postérité. Dans ce concours de tant de recherches diverses, il est utile de désigner à l'attention des savants de tous les pays, des ques-

tions capitales qui ont des rapports très-étendus avec tous les autres phénomènes.

L'exposé de ces vues générales présenté par M. de La Place a excité toute l'attention de l'Académie et contribuera aux progrès de la philosophie naturelle.

M. Ampère a communiqué à l'Académie, dans les séances du 12 septembre et du 21 novembre, deux nouveaux Mémoires relatifs à la théorie des effets dynamiques de l'électricité. Ils ont pour objet, soit d'établir par des expériences directes les faits qui servent de fondement à cette théorie, soit d'en vérifier les résultats.

Le premier Mémoire contient d'abord la description d'un instrument construit par l'auteur pour reconnaître si l'action qu'un fil conducteur formant un circuit fermé exerce sur chaque portion infiniment petite d'un autre fil conducteur est toujours perpendiculaire à la direction de cet élément. Il importe de constater ce résultat. En effet, en établissant sur d'autres expériences la formule qui exprime l'action mutuelle de deux éléments de fils conducteurs, l'auteur avait laissé dans cette expression deux constantes indéterminées n et k qui se rapportent aux deux objets suivants : 1° Lorsqu'on fait varier la distance des deux éléments, sans changer leur position respective, l'action mutuelle de ces éléments change, et est réciproquement proportionnelle à une certaine puissance de la distance variable. C'est l'exposant de cette puissance inverse que représente l'indéterminée n. 2° On peut comparer l'action mutuelle de deux éléments situés dans une même droite, à l'action qu'ils exerceraient l'un sur l'autre,

si, leur distance précédente demeurant la même, ils étaient placés dans deux directions parallèles, et tous les deux perpendiculaires à la droite qui en joint les milieux. L'autre indéterminée k représente le rapport de la première de ces actions à la seconde. Or l'auteur prouve que le résultat dont nous venons de parler donne, entre ces deux constantes n et k la relation $2k + n = 1$. On a donc $k = -\frac{1}{2}$ lorsque $n = 2$. La détermination de cette valeur de n est l'objet de recherches ultérieures, et M. Ampère traite cette question dans son second Mémoire. Il y propose un moyen direct de prouver que n est égal à 2. Mais indépendamment de ce nouveau procédé, on pourrait déja regarder cette valeur 2 de l'exposant comme suffisamment indiquée par les expériences. L'auteur, en admettant ces valeurs de n et de k, a déterminé : 1° L'action que deux fils conducteurs rectilignes et parallèles exercent l'un sur l'autre perpendiculairement à leurs directions. 2° Celle qu'exerce un conducteur rectiligne parallèlement à sa direction sur un autre conducteur de forme quelconque.

3° Considérant l'action mutuelle de deux conducteurs rectilignes situés dans un même plan, il détermine le moment de rotation qui en résulte autour du point d'intersection de leurs directions, soit qu'elles se coupent à angle droit ou qu'elles forment un angle quelconque.

4° On considère l'action d'un fil conducteur plié en arc de cercle sur un conducteur rectiligne, situé dans le plan de l'arc, et qui passant par le centre du même arc, tourne librement autour de ce point; et l'on détermine le moment de rotation.

5° On suppose que deux conducteurs rectilignes sont si-

tués dans des plans différents, et que leurs directions forment un angle droit; on détermine l'action qu'ils exercent l'un sur l'autre parallèlement à la droite qui en mesure la plus courte distance.

6° On détermine dans le même cas les moments de rotation, qui résultent de l'action mutuelle de ces fils conducteurs pour faire tourner l'un d'eux, soit autour d'un axe parallèle à la direction de l'autre, soit autour de la droite qui mesure la plus courte distance des deux conducteurs.

7° On calcule la valeur de la force parallèle à la plus courte distance de deux conducteurs rectilignes situés dans des plans différents, et dont les directions forment un angle quelconque.

8° L'auteur détermine aussi, pour les deux conducteurs rectilignes, les moments de rotation autour de la droite qui mesure leur plus courte distance.

M. Ampère a joint à ce Mémoire une lettre qu'il a adressée à M. le professeur Gherardi. Il y compare les résultats de diverses expériences faites en Italie, avec les conséquences déduites de sa formule; et montrant que ces résultats sont parfaitement conformes aux faits observés, il complète l'explication de l'apparente contradiction que M. Léopold de Nobili avait cru remarquer entre les uns et les autres, et que M. Gherardi avait déja éclaircie dans les observations qu'il a publiées à ce sujet en 1824.

Le second Mémoire sur l'électricité dynamique, que M. Ampère a lu à l'Académie des Sciences, dans sa séance du 21 novembre 1825, a trois parties distinctes. Dans la première, on suppose que l'action de deux éléments de conducteurs étant proportionnelle à une puissance inverse de la distance de ces

éléments, l'exposant n de cette puissance est encore indéterminé, et l'auteur conclut de sa théorie plusieurs propositions dont nous indiquerons les principales.

1° L'action produite par un circuit plan infiniment petit est indépendante de la forme de la courbe fermée qu'il décrit; cette action dépend seulement de la position et de l'aire que la courbe termine. L'action est proportionnelle à cette aire.

2° Si l'on divise une aire quelconque en aires élémentaires dont toutes les dimensions soient infiniment petites, et qu'on suppose des courants électriques de même intensité qui en parcourent *dans le même sens* tous les contours, les actions réunies de ces courants équivaudront à un seul courant également intense et décrivant seulement le contour de l'aire totale. L'auteur définit exactement la condition exprimée par ces mots *dirigés dans le même sens.*

3° Pour mesurer l'action qu'un circuit fermé et plan d'une forme et d'une grandeur quelconques exerce sur un élément de conducteur voltaïque situé dans le même plan, il faut élever à tous les points de l'aire du circuit des perpendiculaires réciproquement proportionnelles aux puissances $n+1$ des distances de ces points au milieu de l'élément; calculer le volume compris entre cette aire, la surface du cylindre droit dont elle est la base, et celle qui passe par les sommets de toutes les perpendiculaires : c'est à ce volume que la force est proportionnelle. Cette force agit d'ailleurs dans le plan du circuit. Elle est dirigée suivant la droite menée dans ce plan par le milieu de l'élément, perpendiculairement à la direction de cet élément.

4° Deux circuits fermés quelconques, compris dans un même plan, s'attirent ou se repoussent suivant qu'ils sont

parcourus en sens contraires ou dans le même sens par un courant électrique. La quantité de l'action est la même que si tous les points des aires circonscrites et que l'on suppose contenir des éléments d'une égale densité, s'attiraient ou se repoussaient en raison inverse de la puissance $n + 2$ de la distance.

5° Si les dimensions des deux figures, et les distances respectives des points homologues de ces deux circuits, deviennent plus grandes dans un même rapport, leur action mutuelle augmente, quand on suppose l'exposant n plus petit que 2. Il reste le même si n est égal à 2, et diminue lorsque n surpasse 2.

Les trois premières propositions ramènent le calcul de l'action mutuelle des conducteurs à la mesure des aires, et à celle des volumes des solides. La cinquième fournit un moyen de déterminer l'exposant n par des expériences faites directement sur des conducteurs; et ce résultat nous paraît remarquable, parce qu'il se rapporte à l'action des seuls conducteurs voltaïques. Il serait utile de comparer les conséquences de cette observation à celles que l'on avait déja déduites d'expériences d'un autre genre.

Dans la seconde partie de son Mémoire, l'auteur admet que l'exposant n a pour valeur 2. Il calcule d'abord l'action mutuelle de deux circuits fermés, dont l'un est un secteur de cercle, et l'autre une demi-circonférence de même rayon que le secteur, jointe au diamètre qui en réunit les deux extrémités. Il passe de là à la description d'un appareil à l'aide duquel on pourra reconnaître si l'action de ces deux conducteurs change avec l'angle du secteur conformément aux résultats du calcul. Il détermine ensuite l'action qu'un cir-

cuit plan dont toutes les dimensions sont infiniment petites, exerce sur un point situé hors de son plan. Il donne les formules qui expriment les trois forces que produit l'action d'un circuit infiniment petit.

1° Sur un élément de conducteur voltaïque parallèlement à trois axes rectangulaires.

2° Sur un autre circuit plan dont toutes les dimensions sont aussi infiniment petites.

Dans la troisième partie, l'auteur s'est proposé de comparer les actions des circuits électriques fermés, et de dimensions infiniment petites, à celles des éléments magnétiques, en supposant que chacun de ces éléments est l'assemblage de deux points comparables à deux molécules, l'une de fluide austral, et l'autre de fluide boréal. Il trouve que si les axes de deux éléments magnétiques sont normaux aux plans de deux petits circuits, et si les milieux des axes sont au centre de gravité de chacun de ces circuits, l'action des deux éléments est la même que celle des circuits. Il suffit que les aires des circuits et leur intensité aient une certaine relation très-simple avec les forces attractives ou répulsives des pôles et les longueurs des axes. Ce résultat montre l'identité de ceux qu'on peut déduire des deux espèces de considérations par lesquelles on a expliqué les phénomènes électro-dynamiques. Il fait connaître comment les éléments magnétiques peuvent être disposés pour produire tous les effets des circuits voltaïques fermés et de figure invariable. L'auteur fonde cette comparaison sur la proposition suivante : si à tous les points d'une surface courbe quelconque on conçoit des éléments magnétiques normaux à la surface, et dont les axes aient leurs milieux dans cette surface, et si les intensités des forces

multipliées par les longueurs des axes, donnent des produits égaux pour toutes les portions infiniment petites de la surface courbe dont l'aire est la même, l'action exercée par ces éléments sur le pôle d'un autre élément que l'on peut considérer comme l'origine des coordonnées, ne dépend point de la forme de la surface, mais seulement de la forme du contour qui la termine. Les trois composantes de l'action totale suivant les trois axes sont exactement les mêmes que celles qui résultent de l'action d'un circuit fermé sur le pôle d'un élément magnétique. Ce circuit est le contour qui termine la surface courbe.

M. Dulong a lu, dans la séance du 10 octobre, un Mémoire qui présente les résultats de ses recherches sur les pouvoirs réfringents des fluides élastiques. Ce travail est fort important par son objet, et par l'exactitude des observations sur lesquelles il est fondé. L'auteur considère qu'aucun phénomène n'est plus propre à faire connaître les éléments essentiels de la mécanique moléculaire, que la mesure des divers degrés de vitesse que la lumière acquiert en traversant les substances transparentes. C'est principalement dans les fluides élastiques, où la force de cohésion n'exerce plus d'action sensible, que l'on peut espérer de découvrir l'effet propre des molécules, réduit à son état le plus simple. C'est dans les substances observées sous cette forme qu'il convient de rechercher, par exemple, si les puissances réfractives des corps simples ou composés ne seraient pas assujéties à quelque loi élémentaire, comparable à celle que l'on a découverte pour les chaleurs spécifiques. Tous les physiciens connaissent les belles recherches de MM. Dulong et Petit sur ce dernier objet,

et les résultats dont la science leur est redevable. Le nouveau Mémoire présenté à l'Académie par M. Dulong, a pour but de reconnaître s'il existe des lois de ce genre par rapport à l'action réfractive des gaz, et comment l'acte de la combinaison modifie, dans les composés qui peuvent exister à l'état gazeux, les pouvoirs réfringents des gaz élémentaires. Ce sujet avait déja été traité par MM. Arago et Biot, mais à une époque où l'analyse chimique encore très-imparfaite ne permettait pas de tirer des conséquences exactes d'un pareil rapprochement.

L'auteur, après avoir discuté les méthodes d'observation proposées jusqu'à présent pour déterminer les pouvoirs réfringents des fluides élastiques, en décrit une nouvelle qui lui a paru préférable par la précision qu'elle comporte, par la facilité qu'elle présente dans l'exécution, enfin parce qu'elle peut s'appliquer aux gaz qui attaquent les métaux. Ses observations comprennent d'abord les quatre gaz permanents que l'on regarde aujourd'hui comme des corps simples, savoir : l'oxigène, l'hydrogène, l'azote, et le chlore. En comparant les changements de vitesse qu'éprouve la lumière lorsqu'elle passe du vide dans ces milieux soumis à la même température et à la même pression, on ne découvre aucune relation entre les puissances réfractives et la densité.

Les autres déterminations se rapportent à dix-huit gaz composés, et l'on a choisi ces substances de manière à faire ressortir l'influence de toutes les modifications de nature, de proportions, de condensation apparente, et qui peuvent se rencontrer dans les combinaisons. M. Dulong a reconnu aussi que les puissances réfractives des gaz composés ne paraissent avoir aucune relation nécessaire avec leur densité. Par exemple, le gaz oléfiant et l'oxide de carbone ont à peu près la

même densité, et le pouvoir réfringent du premier est presque double de celui du second.

On sait depuis long-temps que, dans les corps solides ou liquides de nature différente, la réfraction ne varie pas proportionnellement à la densité : d'où l'on a conclu que chaque corps exerce sur la lumière une action spécifique qui dépend de la nature de la substance. Mais l'auteur remarque que la diversité des capacités pour la chaleur, rapportées à l'unité de masse, avait conduit à une conséquence semblable, en concevant la chaleur comme un élément matériel attiré par les particules des corps, et que toutefois on a reconnu que les capacités de chaque molécule en particulier sont égales ou dans des rapports simples. On aurait donc pu croire que l'on parviendrait aussi à découvrir des rapports très-simples en appliquant la même idée aux pouvoirs réfringents. On doit dire même, ajoute l'auteur, que l'analogie était clairement indiquée, si l'on suppose que la lumière est un élément matériel émis par les corps ; mais s'il existait, pour la réfraction de la lumière, une loi analogue à celle des chaleurs spécifiques, elle devrait se manifester immédiatement dans les valeurs des puissances réfractives des gaz déterminées à une même température et sous la même pression. Enfin, si l'on compare les puissances réfractives des composés avec ceux de leurs éléments, en ne considérant, pour éviter toute complication dépendante d'un changement d'état, que les composés gazeux dont les éléments existent aussi sous la même forme, on trouve que le pouvoir des composés est quelquefois plus grand, et d'autres fois plus petit que la somme de ceux des éléments, sans que cette circonstance ait aucune connexion avec le mode particulier de condensation propre

à chaque composé; mais on remarque que les composés binaires neutres alcalins possèdent une puissance réfractive plus forte que celle de leurs éléments, tandis que ceux où le contraire s'observe sont acides. Or, les propriétés acides et alcalines étant intimement liées avec l'état électrique des particules matérielles, M. Dulong pense que le résultat précédent conduit à regarder la diversité des vitesses de propagation de la lumière dans les fluides élastiques comme dépendante de l'état électrique de leurs particules. L'auteur considère que si la lumière est une matière émise, la résultante des attractions des molécules d'un fluide élastique sur la lumière devrait être indépendante de la forme de ces molécules, puisque celles-ci ne sont point assujéties, comme dans les corps cristallisés, à présenter certaines faces suivant une direction déterminée. Si la réfraction dépendait de ces attractions, on ne concevrait pas, suivant l'auteur, comment l'action d'un composé binaire, à l'état de gaz, pourrait être tantôt plus grande et tantôt plus petite que la somme de celles des particules élémentaires : aussi regarde-t-il ce fait comme une nouvelle difficulté attachée à l'hypothèse newtonienne.

M. Fresnel a fait connaître à l'Académie le résultat d'une expérience remarquable sur l'action répulsive de deux surfaces métalliques échauffées. Deux feuilles métalliques très-minces sont placées verticalement et en contact sous une cloche de verre. On a fait sortir l'air de cette capacité, au moyen d'une bonne machine pneumatique. L'une des feuilles est fixe; l'autre est attachée à l'extrémité d'une aiguille d'acier aimanté, qui conserve sensiblement sa position horizontale, et qui est suspendue à son milieu par un fil de soie. Cette aiguille est ramenée par l'effet magnétique dans une direction con-

stante, et c'est ainsi que les feuilles sont mises en contact. Si maintenant on fait tomber sur l'un des disques métalliques les rayons solaires réunis au foyer d'une lentille, on voit aussitôt le disque mobile s'éloigner de l'autre jusqu'à la distance d'un centimètre et au-delà, et rester à cette distance, nonobstant la force directrice qui tend à ramener les feuilles au contact. L'effet cesse graduellement lorsqu'on cesse d'échauffer les disques. L'auteur de cette expérience pense que la force répulsive qui se manifeste ne peut résulter ici de l'action électrique, parce que le disque fixé est en communication métallique avec le sol; d'où il suit qu'il attirerait toujours le disque mobile, si celui-ci était électrisé par les rayons solaires. Il juge aussi, d'après ce qui a lieu lorsqu'on fait rentrer l'air peu à peu, que le fait observé n'est point dû aux courants d'air que la chaleur pourrait occasionner. Enfin il n'attribue pas ce fait à une action magnétique provenant des rayons solaires; ou du moins il n'y trouve pas les caractères ordinaires des effets magnétiques connus. Il regarde donc la répulsion des disques très-minces et fortement échauffés comme un effet de cette force propre de la chaleur qui produit la dilatation et la pression dans les matières solides ou aériformes. Lorsque les lames ont une épaisseur beaucoup plus grande, M. Fresnel a observé, au contraire, des effets d'attraction moins sensibles à la vérité, mais que l'on ne peut révoquer en doute: des occupations urgentes ne lui ont pas laissé le loisir de suivre ces premières expériences. Il les propose à l'attention et aux recherches des physiciens. L'auteur cite, au commencement de son Mémoire, une première observation dont on est redevable à M. Guillaume Libri, et qui a donné lieu à ces nouvelles expériences sur l'action répulsive

de la chaleur. M. Libri est connu depuis long-temps des géomètres par des recherches approfondies sur les branches les plus difficiles de l'analyse et sur la théorie mathématique de la chaleur.

MÉCANIQUE.

Il s'est élevé, dans ces dernières années, une contestation judiciaire qui a donné lieu de comparer les effets de deux machines à vapeur différemment construites. M. de Prony a été consulté à ce sujet par l'autorité publique. Les résultats de son examen intéressent les sciences et les progrès de l'industrie. Le rapport où ils sont exposés contient des remarques capitales sur la mesure des effets dynamiques; et les expériences faites avec le plus grand soin par ordre et sous la direction de l'auteur sont très-propres à éclairer les questions relatives à l'emploi des machines à vapeur. Ce travail est le fruit d'une connaissance approfondie des arts mécaniques et de l'application des théories mathématiques.

La question consistait à déterminer la puissance d'une machine à vapeur, à haute pression et à double cylindre, établie à Paris, au Gros-Caillou, par M. Edwards, et de comparer cette machine, eu égard à l'effet mécanique et à l'économie du combustible, avec une autre machine anciennement construite dans le même local selon les principes de Watt. L'objet exclusif de cette dernière machine était l'élévation de l'eau à trente-cinq mètres de hauteur, pour l'approvisionnement de Paris; et elle devait, pour cet objet, être suppléée par la première, qui, indépendamment de la fourniture de l'eau, pourrait donner d'autres produits utiles.

Les expériences de M. de Prony, commencées au mois de juillet 1821, ont été terminées à la fin du mois de janvier 1822. Il s'est attaché à réunir toutes les conditions propres à donner des faits exacts et des conséquences certaines.

Ces expériences, suivies pendant la journée, ont souvent été continuées pendant la nuit; la tension de la vapeur était mesurée par un thermomètre et un manomètre qui se vérifiaient réciproquement. Les volumes d'eau élevée à trente-cinq mètres de hauteur étaient indiqués par une jauge à cadran et à échappement, sur laquelle chaque décrochement correspondait à l'élévation de dix mètres cubes; l'effet utile de la machine était connu par l'emploi d'un appareil nouveau, dont la description et la théorie se trouvent à la suite du rapport de M. de Prony. L'auteur a voulu réunir aux avantages de ces divers moyens de précision, celui de leur application à une quantité considérable de travail. Nous en donnerons une idée générale en disant que, dans le cours de ses expériences, le poids du charbon brûlé par des chauffeurs très-exercés, est de plus de 5,000 kilogrammes.

M. le directeur-général des ponts-et-chaussées et des mines, considérant que la connaissance expérimentale de ces faits, et de tous les détails instructifs qui en accompagnent l'exposé, serait d'une grande utilité pour les ingénieurs, les constructeurs et les manufacturiers, a ordonné l'impression du rapport de M. de Prony, et des notes importantes qu'il y a jointes.

Le diamètre du piston du grand cylindre de la nouvelle machine était de 0^{m} 1563, et sa course de 1^{m}, 519; le diamètre du piston du petit cylindre de 0^{m}, 309, et sa course de 0^{m}, 120, ce qui donne pour les aires respectives des sec-

tions transversales 0, 249 mèt. car., et 0,075 mèt. car. La valeur moyenne de la tension de la vapeur, déduite de l'ensemble des expériences, a été évaluée à 3 $\frac{7}{10}$ atmosphères, et la durée moyenne de chaque course de piston (la montée et la descente étant comptées pour deux courses) a été trouvée de 1″ $\frac{7}{8}$. La communication de la chaudière avec le petit cylindre était interceptée à chaque demi-course, et le surplus de cette course s'opérait en *détente*.

Calculant, d'après ces données, l'effet total de la machine, l'auteur trouve que cet effet est représenté par un poids de 2,922 kilogrammes, élevé à un mètre de hauteur pendant 1″ de temps. M. de Prony a fait ce calcul, d'abord en se servant des règles pratiques, dans lesquelles on a seulement égard aux pressions totales qui ont lieu aux extrémités des courses des pistons; mais il a donné une autre règle publiée en 1790 dans son Architecture hydraulique, beaucoup plus exacte en ce qu'elle tient compte des pressions intermédiaires. Cette seconde règle est exprimée par une formule analytique qui dépend des intégrales définies et qu'il est facile d'appliquer; elle donne 2,720 kilogrammes, au lieu de 2,922 trouvés par la première. L'auteur discute avec beaucoup de soin ce résultat, et montre comment il doit être réduit pour représenter le produit effectif. Il estime que la réduction n'est point exagérée en la portant à la moitié du résultat obtenu. Un des motifs de cette conclusion, qui ne paraît pas avoir été pris en considération dans d'autres circonstances, est la résistance que l'eau, élevée par les pompes, éprouve dans des tuyaux verticaux de trente-cinq mètres de hauteur.

Cependant le résultat ainsi réduit est encore supérieur à

celui qu'on tire de l'observation des quantités d'eau élevée par les pompes, et cela tient à un fait remarquable qui doit exciter toute l'attention des constructeurs de machines à pompes. Les produits de ces machines n'augmentent pas indéfiniment avec les vitesses imprimées aux pistons. Lorsque ces vitesses sont poussées au-delà de certaines limites, les volumes d'eau élevée diminuent au lieu d'augmenter; l'existence de ce maximum, indiqué par la théorie, a été bien manifeste dans les expériences de M. de Prony. Pendant la durée d'une partie de ces expériences, les chauffeurs avaient de fréquentes dispositions à pousser le feu; ils ont même, à cet égard, commis des imprudences; mais lorsque le nombre des tours du volant en une minute excédait seize ou dix-sept, la jauge placée au haut de la tour indiquait une diminution du produit. Une partie de la force de la machine était donc dépensée sans concourir à l'élévation de l'eau. L'auteur a voulu connaître cet excédant de force, et c'est pour parvenir à ce but qu'il a imaginé l'appareil d'épreuve, décrit à la suite de son rapport. Il a remarqué, lorsque cet appareil d'épreuve s'est trouvé appliqué à la machine, que les chauffeurs, auparavant si enclins à augmenter la tension de la vapeur, modéraient leur feu, selon toute apparence, d'après des ordres particuliers qu'ils avaient reçus, de telle sorte que la tension moyenne a été réduite de $3\frac{7}{10}$ atmosphères à $2\frac{5}{10}$, et la durée de chaque course de piston augmentée, de $1'',875$ à $1'',975$. Calculant sur ces nouvelles données l'effet mécanique évalué, soit à *priori* par les règles pratiques ordinaires, soit d'après les expériences faites avec l'appareil d'épreuve, on arrive à deux résultats qui ne diffèrent entre eux que de la dixième ou onzième partie du ré-

sultat théorique, qui est le plus fort. Cette différence serait moindre, et on pourrait même la négliger si on employait, au lieu de la règle pratique ordinaire, la formule exacte due à l'auteur et dont nous avons parlé plus haut.

L'effet mécanique de la nouvelle machine étant ainsi déterminé, il s'agissait, pour satisfaire aux questions de la Cour Royale, d'assigner le nombre d'unités dynamiques équivalant à l'effet utile. Il se présentait ici une difficulté singulière, non pour transformer les nombres absolus en nombres de chevaux, mais pour fixer, dans la multitude d'acceptions qu'on a données à ces mots *force d'un cheval (horse power)*, celle qui devait être préférée.

On n'a rien statué dans notre système métrique légal sur les unités de mesure complexes dont le temps constitue un des éléments, telles que l'unité de force et l'unité de distribution des eaux. Il serait donc nécessaire que les transactions où de pareilles unités sont employées, continssent leurs définitions convenues par les parties contractantes. M. de Prony a vu avec surprise, non-seulement que cette précaution avait été omise dans l'acte passé entre le constructeur et l'acquéreur de la nouvelle machine, mais que les mots *horse power* étaient employés, soit dans les pièces du procès, soit dans les notes fournies par le fabricant, avec des significations très-différentes.

Le rapport contient un chapitre étendu où la question générale est traitée. L'auteur fait voir que les diverses acceptions données par les praticiens à ces expressions *en nombre de chevaux*, n'ont pas même l'avantage de fournir des termes de comparaison exacts, entre le travail des machines et le travail effectif ou les quantités d'action journalière du che-

val. M. de Prony indique une unité dynamique qui aurait cette propriété; mais en définitive, il pense qu'on doit renoncer à un pareil rapprochement, et ne chercher, dans cette addition au système métrique, que la commodité et la facilité du calcul.

Pour que l'on puisse reconnaître distinctement combien la question est incertaine, l'auteur a formé une table des principales valeurs assignées, en Angleterre et en France, à l'unité dynamique, appelée *pouvoir d'un cheval*, et donnant pour chacune le nombre qui représenterait l'effet de la nouvelle machine dont il s'agit. Les valeurs extrêmes sont respectivement de 18 $\frac{1}{4}$ et de 27 $\frac{3}{4}$ en nombre de chevaux, et malgré cette énorme disproportion, on n'a aucune raison légale d'adopter une de ces valeurs plutôt que l'autre. Il n'en est pas de même de l'évaluation absolue : l'énonciation d'un poids de 1461 kilogrammes, élevé à un mètre de hauteur pendant un 1″ de temps, n'offre que des expressions dont le sens est parfaitement déterminé.

M. de Prony, après avoir achevé son examen sous ce premier rapport, avait aussi à comparer les quantités de combustibles dépensées par l'ancienne et la nouvelle machine pour produire un même effet mécanique. Les expériences de l'année 1821 lui avaient fourni toutes les données relatives à la nouvelle, et il a entrepris, au mois de janvier 1822, une série d'observations sur l'ancienne. Il fait connaître, dans l'article 62 de son rapport, le danger auquel l'exposa l'imprudence des chauffeurs en poussant le feu de manière à donner à cette vieille machine une vitesse deux ou trois fois aussi considérable que celle pour laquelle elle a été construite. Le lecteur y trouvera un avertissement utile,

et jugera des précautions qu'il faut prendre en pareilles circonstances. Ce feu excessif n'a duré qu'environ dix minutes; mais cela pouvait suffire pour causer l'explosion de la chaudière.

La seconde série d'expériences, celles de 1821, est d'ailleurs aussi complète et aussi décisive que la première; l'auteur a reconnu que la nouvelle machine dépensait $719 \frac{1}{5}$ grammes de charbon pour élever chaque mètre cube d'eau à trente-cinq mètres de hauteur, et que, pour produire le même effet mécanique, l'ancienne machine en dépensait $822 \frac{4}{5}$. Il a appliqué à cette comparaison cinq de ses expériences, dont la durée garantit plus particulièrement l'authenticité, et qui, sur la quantité totale de 5000 kilogrammes de charbon brûlé, en ont consommé 3330. La même différence est donnée sensiblement par l'ensemble des expériences. On en conclut que la nouvelle machine, comparée à l'ancienne, procure une économie de combustible d'environ 13 pour 100.

A la suite du rapport se trouvent deux notes étendues, dont la première a pour objet la description et la théorie de l'appareil d'épreuve. Il a été fait mention de ce procédé dans les analyses précédentes des travaux de l'Académie.

L'autre note est relative à la théorie du parallélogramme du balancier de la machine à vapeur; procédé très-ingénieux, au moyen duquel on peut, par un système de mouvements circulaires, établir les courses des sommets des tiges des pistons sur des lignes sensiblement droites et verticales. Ces lignes sont, à proprement parler, des arcs de courbe sur lesquels se trouvent les points d'inflexion. Dans un traité des machines à feu que M. de Prony a publié il y a trente-cinq

ans, et qui était alors le seul ouvrage complet sur cette matière, on trouve l'histoire et la théorie de cette invention. La note dont nous parlons contient de nouvelles formules plus commodes pour le calcul que celles qui avaient été données par l'auteur à cette époque. Elles peuvent servir soit à vérifier l'exactitude d'une machine construite, soit à établir les proportions d'une machine projetée. L'application de ces formules à la nouvelle machine donne une déviation presque nulle du point inférieur de la course du sommet de la tige du piston du grand cylindre, par rapport au point supérieur, et la plus grande déviation dans les points intermédiaires n'est que d'environ 0 ^{m}, 002. L'arc sur lequel se meut le sommet de la tige du piston du petit cylindre se confond sensiblement avec une droite verticale.

M. de Prony se propose d'appeler l'attention de l'Académie sur une addition importante qu'il conviendrait de faire au système métrique français. Elle consisterait à fixer l'unité de mesure *des effets dynamiques* et l'unité de *distribution des eaux.*

Les réflexions qu'il a déja publiées sur cette matière dans plusieurs de ses ouvrages, montrent que les usages publics réclament ces deux déterminations.

M. Girard a présenté, dans le cours de cette année 1825, un Mémoire qui a pour objet le nivellement général de la France et les moyens de l'exécuter.

La position géométrique d'un lieu est déterminée sur la surface de la terre supposée sphérique, par l'intersection de deux cercles, le méridien du lieu et le parallèle ; mais la connaissance des deux arcs qui mesurent la latitude et la

longitude ne suffit pas lorsqu'il est nécessaire d'avoir égard aux irrégularités et aux protubérances observées à la surface du globe. Il faut alors assigner, pour un lieu quelconque, une troisième coordonnée, qui est la hauteur verticale du lieu au-dessus de la surface de l'Océan.

M. Girard, en insistant sur la nécessité d'assigner cette troisième coordonnée, a fait remarquer que les cours d'eau qui sillonnent la surface terrestre sont autant de lignes de plus grande pente, suivant lesquelles il est aisé de faire des nivellements. On connaîtrait ainsi l'élévation de tous les lieux situés le long de ces cours d'eau au-dessus du niveau de l'Océan. Il est également facile de déterminer la configuration des terrains élevés qui forment l'enceinte de leurs bassins. Réunissant ensuite par une ligne commune, sur des cartes déja dressées, tous les points consécutifs qui se trouveraient situés à la même hauteur verticale, on y tracerait une suite de polygones ou de courbes qui représenteraient l'intersection de la surface terrestre par autant de surfaces horizontales.

Quant aux moyens de parvenir à l'exécution de ces opérations de nivellement, dont l'utilité est incontestable, M. Girard pense que nous avons en France plus de facilités qu'il n'en existe dans aucun autre pays pour en coordonner les résultats avec promptitude et économie. Il pense que MM. les ingénieurs des ponts-et-chaussées, chargés dans tous les départements du royaume des divers travaux hydrauliques qui ont pour objet d'accroître les produits de l'agriculture, de vivifier l'industrie et de faciliter le commerce, doivent mettre au rang des connaissances qui leur sont le plus importantes celle de l'hydrographie des départements où ils sont placés.

Ils seraient par conséquent chargés de faire le nivellement des cours d'eau. MM. les ingénieurs des mines n'ont pas moins d'intérêt d'acquérir sur le relief des terrains où les minéraux sont exploités les notions les plus précises; on leur confierait le soin de faire les nivellements barométriques propres à déterminer les hauteurs des côtes et des plaines élevées qui servent de limites aux différents bassins des cours d'eau.

En faisant concourir deux corps d'ingénieurs aussi éclairés à la formation d'une carte du relief de la France, on aurait la certitude d'obtenir promptement les résultats les plus utiles et les plus exacts.

« Quand un esprit général d'investigation, dit M. Girard en terminant son Mémoire, se manifeste dans toutes les contrées de la terre, quand le flambeau des sciences s'allume partout ou se ranime, il n'est pas permis de douter que l'opération dont je viens de tracer l'esquisse ne soit bientôt entreprise chez quelques nations du monde civilisé. Qu'il nous soit du moins permis d'espérer que la France, où l'on a pour la première fois établi sur une base invariable un système de mesures universelles, et où l'on exécute aujourd'hui les plus beaux travaux géodésiques qui aient jamais été conçus, donnera encore dans cette circonstance le premier exemple de ce travail. En complétant les géographies physiques, il fournira d'innombrables faits à la géologie et à toutes les branches de l'histoire naturelle qui s'y rattachent. »

M. Girard a lu, dans la séance du 27 juin, un Mémoire sur l'attraction qui se manifeste à des distances sensibles, entre des surfaces solides mouillées par un liquide dans lequel elles sont submergées.

On sait que la surface de certains corps solides peut être mouillée diversement par certains liquides. Ainsi l'expérience apprend qu'à la même température, une lame de verre mouillée d'alcohol retient, adhérente à sa surface, une couche de cette liqueur plus épaisse que la couche d'eau qui adhère à cette même surface de verre lorsqu'elle est mouillée par ce dernier fluide.

Les recherches que l'auteur a déja publiées sur le phénomène de l'écoulement des liquides dans les tubes capillaires, avaient déja constaté cette propriété; il a entrepris de la rendre plus sensible, et de mesurer rigoureusement, s'il était possible, l'effet qui résulte du rapprochement de deux surfaces solides mouillées par un liquide dans lequel elles sont submergées. M. Girard a mis sous les yeux de l'Académie l'appareil dont il s'est servi pour faire ces nouvelles expériences. Deux plaques de verre rectangulaire de dix centimètres de longueur sur cinq centimètres de hauteur sont suspendues dans un vase rempli d'eau, et en regard l'une de l'autre. On rend leur pesanteur spécifique aussi peu différente que l'on veut de celle du liquide, en fixant derrière ces plaques des prismes de liége de dimension convenable.

Ces deux pendules écartés de la position verticale tendent à y revenir en vertu de leur excès de pesanteur sur celle du liquide. Si l'on rapproche les deux plaques de verre l'une de l'autre, jusqu'à une distance très-petite, les pendules dont elles font partie ne reviennent à la verticale qu'après un temps plus ou moins long; et cette durée dépend de la distance que l'on a établie entre les deux plaques. L'appareil imaginé par M. Girard pour faire les expériences dont il a rendu compte à l'Académie, donne les moyens de comparer

les temps qui s'écoulent jusqu'au retour à la verticale avec la distance à laquelle les plaques ont été primitivement rapprochées ; cette distance est exactement mesurée par le diamètre connu d'un fil métallique placé entre les deux plaques.

On trouve, par exemple, que les glaces ayant été écartées de la verticale d'un angle de 1° 30′ 35″, et rapprochées à 0 millimètres, 0563 l'une de l'autre, elles ont employé 832 secondes pour revenir à la verticale, tandis qu'ayant été placées sous le même écartement à 0, millimètres, 2481 de distance, elles n'ont employé que 163 secondes pour revenir à la verticale.

La température de l'eau où ces expériences ont été faites était de 24 degrés du thermomètre centigrade. Ici, comme dans les phénomènes de l'écoulement des liquides par des tubes capillaires, l'influence qu'exerce la température est très-considérable.

Ainsi l'auteur a remarqué que les mêmes glaces qui, à cinq degrés de température, employaient 783″ à se détacher l'une de l'autre, n'emploient plus que 520″ à vingt degrés de température, leur écartement de la verticale et leur distance primitive étant d'ailleurs les mêmes dans les deux observations.

Le Mémoire dont nous présentons cette analyse succincte est le commencement d'un travail que l'auteur se propose de continuer en tenant les surfaces solides submergées dans l'alcohol et dans d'autres liquides susceptibles de les mouiller.

M. le comte Andréossy a lu, le 26 octobre 1825, un Mémoire intitulé *Essai sur le tir des projectiles creux*, et qui,

rappelant les recherches entreprises par l'auteur il y a plus de trente années, fait connaître les résultats d'expériences très-remarquables, et met dans tout son jour l'avantage que l'on peut retirer de cet emploi de l'artillerie. En tirant avec le canon, dans une direction presque horizontale, des obus et des bombes attachées à la bouche de la pièce, on produit par le choc, par les ricochets, et par l'explosion, des effets considérables, et qui peuvent être fort utiles pour la défense ou l'attaque des places, et dans les combats de mer. Les massifs de fortification dépourvus de revêtement, et les bois des vaisseaux, sont fortement endommagés et peuvent être détruits par le choc et l'éclat de ces projectiles.

On cite avec beaucoup de soin dans le Mémoire les premières tentatives qui ont pu diriger l'attention sur cet objet. Elles remontent au siége d'Ostende en 1602, où un ingénieur français proposa à l'archiduc Léopold de lancer avec le canon des balles artificielles creuses contre les parapets en terre. Mais cet usage de l'artillerie ne pouvait être fondé que sur des expériences exactes et multipliées, et il exigeait des vues nouvelles. C'est à l'auteur du Mémoire qu'on en est redevable. Ses premières recherches ont été entreprises à Neuf-Brisach en 1791 ; et il fit exécuter à Schelestadt, le 11 août 1792, des épreuves dont les résultats ne laissèrent aucun doute. On les a rapportées dans le Mémoire, et l'on y indique avec précision la charge, la direction, la chute, l'effet des ricochets et des roulis, et la portée totale. Ces résultats ont été consignés dans un écrit imprimé à Metz en 1794, et qui a été conservé dans la bibliothèque du comité d'artillerie. M. le général Andréossy, ayant connu par ses diverses expériences ces effets du tir des bombes, des grenades et des obus, conçut l'idée

des batteries à tranchées pour la défense des angles saillants de la fortification ; elles ont été établies pour la première fois dans la place de Schelestadt. Il proposa ensuite des expériences de même genre contre les bordages des vaisseaux. Les projectiles, en pénétrant et éclatant dans les bois, les brisèrent entièrement et les enflammèrent.

Les événements qui déterminèrent l'aile droite de l'armée française d'Italie à occuper la ligne retranchée de Borghetto, offrirent à l'auteur l'occasion de faire usage des projectiles creux lancés par les canons ; cette application eut lieu pendant la durée de la campagne. Le Mémoire rappelle les propositions et les recherches qui ont été faites ultérieurement par différentes personnes, et cite les ouvrages qui peuvent être consultés avec fruit sur cette matière. Ainsi ce Mémoire fait connaître l'origine et les progrès d'une branche importante de la science de l'artilleur.

Les efforts continuels des nations rivales pour perfectionner les différentes espèces d'armes et tous les moyens d'attaque et de défense, obligent à des efforts semblables; et l'on ne pourrait négliger cette étude sans manquer aux intérêts essentiels de l'État. Le Mémoire dont nous venons d'indiquer l'objet, rappelle un fait particulier qui, sans intéresser directement les sciences, peint le caractère moral d'un officier français qui les avait cultivées. Le général d'artillerie Duteil, qui avait été commandant de l'école de Metz, et dont les qualités personnelles et les honorables services lui avaient mérité l'estime et la reconnaissance publiques, fut compris, après le siége de Lyon, sur la liste fatale des condamnations. Les sollicitations de ses nombreux amis obtinrent qu'il serait épargné ; mais on exigeait qu'il dé-

clarât n'avoir point servi pendant le siége, et l'on s'en rapportait à sa déclaration. Il ne put la faire, parce quelle aurait été contraire à la vérité; il refusa et fut conduit à la mort.

M. Navier a continué les recherches qu'il avait présentées en 1822 à l'Académie, concernant les mouvements des fluides appelés incompressibles. Il perfectionne dans ce Mémoire la théorie analytique du mouvement des fluides en y introduisant la considération des forces moléculaires qui produisent l'adhérence observée entre les parties de ces corps. Les effets de cette adhérence deviennent très-sensibles dans divers cas, et particulièrement lorque les fluides coulent dans des tuyaux dont le diamètre est très-petit et la longueur très-grande. Les solutions fondées sur la supposition d'une mobilité parfaite des molécules conduisent dans des cas semblables à des résultats très-différents de ceux que l'expérience a fait connaître. Les recherches dont il s'agit ont donc un objet déterminé, qui est l'interprétation de phénomènes subsistants. Après un examen attentif des effets connus, l'auteur conclut que ces effets indiquent l'existence d'une propriété particulière des liquides, consistant en ce que si les molécules très-voisines sont déplacées les unes par rapport aux autres, il s'établit entre elles des forces d'attraction lorsque la distance des molécules augmente, ou de répulsion lorsque la distance des molécules diminue. Des actions semblables s'établissent aussi entre les parties du fluide et celles des parois solides dans lesquelles il est contenu. L'auteur a soumis au calcul les effets de ces forces que l'on n'avait point encore exprimées en formant les équations générales du

mouvement des fluides. Il introduit ainsi dans ces équations de nouveaux termes, qui, dans certains cas, changent le caractère des solutions, et rendent les résultats du calcul conformes aux effets indiqués par l'observation. L'auteur, en traitant ces questions nouvelles et difficiles, a fait un usage très-remarquable de l'analyse des équations aux différences partielles.

Les équations des mouvements des fluides ainsi modifiées ont été appliquées au mouvement appelé linéaire, c'est-à-dire à l'écoulement du fluide dans un tuyau rectiligne d'un très-petit diamètre où l'on suppose que toutes les molécules se meuvent parallèlement à l'axe de ce tuyau.

Les expressions que l'auteur a trouvées pour la vitesse d'écoulement sont entièrement d'accord avec les résultats des expériences importantes de M. Girard sur l'écoulement des liquides dans les tuyaux capillaires. Un des résultats curieux de ses recherches est l'évaluation de la résistance provenant du frottement de deux couches de liquide qui coulent l'une sur l'autre, ou d'une couche de liquide coulant sur une certaine substance solide, avec des vitesses données.

ASTRONOMIE ET NAVIGATION.

M. le baron de Damoiseau a présenté, le 17 octobre 1825, les résultats d'un nouveau travail sur la comète dont M. Enke a fait connaître le cours elliptique.

Cet astre dont on attendait le retour cette année a été découvert à Nîmes, le 13 juillet, par M. Benjamin Valz, qui l'a observé les 12, 16, 18, 19, 22, 25, et 26 août.

M. Nicolet a présenté au Bureau des longitudes ces ob-

servations qui ont été faites avec un réticule à sommets alternes. La comète, à chaque observation, a été comparée, autant que possible, à deux étoiles, l'une au nord et l'autre au sud.

M. de Damoiseau a employé à la détermination de l'orbite elliptique les six observations comprises dans le tableau suivant :

Temps moyen de Paris.					Longitude.			Latitude obs.		
1825	27 juillet.	2 h.	43′	46″	76°	23′	12″	8°	36″	44 ½ B.
	12 août	3	15	40	97	54	20	8	29	42 ½.
	18	3	26	30	107	45	28	8	1	4
	19	3	2	20	109	28	11	7	53	59
	22	3	42	46	114	53	55 ½	7	29	19
	25	3	26	4	120	30	8	6	59	32.

L'auteur a supposé, pour le moyen mouvement diurne, 17′ 50″ 0866, qui est celui qu'il a déduit de la comparaison des passages antérieurs, en ayant égard aux perturbations de la comète ; il en a conclu les éléments suivants :

Passage ou périhélie.....	1825 sept. 16. 7836 t. m. compté de minuit (le 16 sept. à 18 h. mat. 48′ 22″).
Longitude du périhélie.............	157° 6′ 30″.
Longitude du nœud.................	334° 25′ 54″.
Inclinaison de l'orbite..............	13° 20′ 34″.
Excentricité.......................	0,8445569.
Demi grand axe...................	2,223611.

Il ne regarde point ces résultats comme définitifs. Les éléments pourront subir quelques changements d'après les observations qui auront été faites dans les autres parties de l'Europe.

En comparant aux observations les lieux géocentriques de la comète d'après ces éléments, on trouvera les erreurs,

En longitude	+ 17″.	En latitude	— 2″.
	— 7″.		— 29″.
	+ 17″.		— 23″.
	+ 10″.		— 5″.
	+ 23″.		— 27″.
	+ 1″.		— 5″.

Le passage au périhélie précède de 0,3004 celui que l'auteur a annoncé dans un Mémoire précédent. Cette différence, quoique assez légère, devient importante pour un astre d'une aussi petite révolution ; il est probable qu'on la ferait disparaître en grande partie, en introduisant dans le calcul l'action de Saturne sur la comète. M. Enke, qui a employé cette perturbation, et qui, par une discussion approfondie des passages précédents, a été conduit à reconnaître une accélération dans le moyen mouvement de la comète, a beaucoup approché de l'observation. Le résultat qu'il avait prédit ne s'écarte des observations que de 2′ 39″. Si l'on reprend le calcul exact des perturbations pour cette révolution et la suivante, on pourra reconnaître, au retour de la comète en 1828, s'il est nécessaire pour représenter les observations, de recourir à l'hypothèse d'une résistance de la matière éthérée.

M. le capitaine de vaisseau Louis de Freycinet a lu un Mémoire relatif aux observations qu'il a faites du pendule dans le cours de son voyage autour du monde. Les divers résultats de cette expédition mémorable qu'il commandait,

intéressent éminemment les sciences mathématiques et physiques. Nous n'avons pu comprendre dans l'analyse des travaux de cette année l'extrait de ce Mémoire sur les expériences du pendule. Nous ferons connaître par la suite les conséquences qu'elles fournissent concernant la figure du sphéroïde terrestre.

Nous avons indiqué, dans notre rapport précédent, les travaux du dépôt général des cartes et plans de la marine. Cette grande entreprise a fait de nouveaux progrès. Les cartes de l'île de Corse ont été levées sous les ordres de M. de Hell, capitaine de frégate, qui avait pour coopérateur M. Mathieu, lieutenant de vaisseau, et les officiers composant son état-major. Ces cartes sont rédigées en totalité. La partie des côtes qui comprend les bouches de Bonifacio et toute la portion orientale de la Corse jusqu'au golfe de Sagone vient d'être publiée. On trouve des plans détaillés de tous les ports, mouillages et passages difficiles.

La rédaction des travaux faits à la côte du Brésil, sous les ordres de M. le baron Roussin, est entièrement terminée; et la collection des cartes qui en est le résultat va paraître incessamment. Elle comprendra toutes les côtes depuis l'île Sainte-Catherine, en remontant vers le nord, jusqu'à la rivière de Maranham, divisées en cartes générales et en plans des ports les plus importants.

On doit citer parmi ces travaux une carte de la mer de Marmara avec les plans du détroit des Dardanelles et du canal de Constantinople, rédigés d'après les travaux exécutés depuis 1784 jusqu'à 1788, par M. le comte Truguet. L'exactitude de ces travaux a été constatée, en 1820, par M. Gauthier, capitaine de vaisseau. L'accord qui règne entre des

opérations faites à des époques si différentes, a été tel que les cartes et plans levés de 1784 à 1788, ont pu être assujétis, sans éprouver d'altération sensible, aux positions géographiques déterminées par M. Gauthier avec le soin et le talent dont il a donné tant de preuves.

Un grand nombre de cartes gravées d'après les résultats les plus authentiques donnés par des marins et des hydrographes étrangers, contribue à compléter les connaissances que le dépôt des cartes et plans de la marine se propose de procurer aux navigateurs.

La reconnaissance des côtes occidentales de France, dont nous avons fait connaître successivement les progrès, a été continuée avec succès dans les campagnes de 1824 et de 1825, par MM. les ingénieurs hydrographes de la marine, sous les ordres de M. Beautemps-Beaupré.

On est parvenu, en 1824, à déterminer, avec une précision en quelque sorte rigoureuse, la position du plateau de Roche-Bonne, danger situé à douze lieues marines de la côte, sur le parallèle du Pertuis d'Antioche.

Ce plateau a une étendue considérable, et il s'y trouve plusieurs têtes de roche dangereuses pour les bâtiments de toutes les grandeurs dans les gros temps. Il était d'autant plus important de le visiter de nouveau, que son existence même ne paraissait pas certaine à un grand nombre de navigateurs. Le gouvernement a fait publier un avis officiel qui contient les résultats de cette importante opération.

La campagne de 1825 a été d'autant plus remarquable, par la nature et l'étendue des travaux exécutés, que l'état de la mer a permis de visiter des parties de côte qu'il avait été

impossible d'aborder en 1824. On a reconnu, en 1825, la côte occidentale de l'île d'Oléron, la partie méridionale du Pertuis de Maumusson, ainsi que toutes les parties de la position maritime de Bordeaux. On a trouvé des erreurs graves sur les cartes et plans de l'embouchure de la Gironde publiés jusqu'à ce jour. Le ministre de la marine a ordonné de les signaler sur-le-champ aux navigateurs. La note rédigée à ce sujet par M. Beautemps-Beaupré a été imprimée et envoyée dans tous les ports de France.

Le dépôt général de la marine a publié, l'année dernière, celle des cartes du pilote français qui comprend la partie de côte située entre le port de Lorient et la baie de Quiberon, ainsi que le plan des entrées du Morbihan et de la rivière de Crach.

RAPPORTS DIVERS ET OUVRAGES PRÉSENTÉS.

Une commission composée de M. Le Gendre (rapporteur), et de M. La Croix, a rendu compte d'un Mémoire d'analyse présenté par M. Lejeune Dirichlet sur une classe d'équations du cinquième degré dont il démontre l'impossibilité.

L'auteur s'est déja fait connaître par diverses recherches, et cultive avec le plus grand succès toutes les parties de l'analyse mathématique. Nous citerons textuellement le résultat de l'examen de la commission.

Les premières recherches de l'auteur sur cette matière ont eu pour objet de démontrer le théorème de Fermat dans le cas des cinquièmes puissances. On sait que si l'égalité était possible entre une puissance cinquième et la somme de deux

puissances semblables, l'une des trois indéterminées devrait être divisible par 5; comme il faut aussi que l'une d'elles soit divisible par 2. L'auteur a considéré d'abord le cas où la même indéterminée serait à la fois divisible par 2 et par 5. Pour traiter ce premier cas, il a employé une analyse analogue à celle dont Euler s'est servi pour démontrer le théorème de Fermat relatif aux troisièmes puissances; mais le cas du $5^{\text{ième}}$ degré offre des difficultés particulières, attendu que le même nombre peut se présenter d'une infinité de manières sous la forme $t^2 - u^2$, tandis qu'il ne peut être qu'une fois, ou qu'un petit nombre de fois, de la forme $t^2 + 3u^2$. M. Lejeune est parvenu à vaincre ces difficultés, et il a prouvé d'une manière rigoureuse qu'en supposant possible une solution en nombres finis de l'équation proposée, on serait conduit, par des équations toujours de même forme, à une suite indéfinie de nombres entiers, qui décroîtraient de plus en plus sans jamais devenir nuls; conséquence absurde, et qui prouve que l'équation dont il s'agit ne saurait avoir lieu.

Il restait ensuite à considérer le cas où l'indéterminée divisible par 5 est impaire, et si ce cas se fût trouvé également impossible, le théorème de Fermat aurait été complètement démontré par le cas des puissances cinquièmes. Mais M. Lejeune avoue que ses efforts pour démontrer l'impossibilité de l'équation dans le second cas, sont demeurés infructueux.

Les nouvelles recherches contenues dans le Mémoire dont nous avons à rendre compte, diffèrent peu de celles dont nous venons de donner une idée; elles s'appliquent seulement à une équation plus générale $x^5 \pm y^5 = 2A\, z^5$, dont l'auteur se propose de démontrer l'impossibilité, en supposant que le coefficient 2A est divisible à la fois par des puissances

de 2 et de 5 à volonté, et par tels nombres premiers qu'on voudra, non compris dans la forme $10n+1$.

L'auteur prouve, par une analyse exacte et fondée sur les vrais principes de la matière, que l'existence d'une telle équation conduirait, comme dans le cas dont nous avons parlé, à une suite indéfinie de nombres entiers décroissant sans jamais devenir nuls; cette conclusion étant absurde, l'impossibilité de l'équation dont il s'agit se trouve demontrée.

Les mêmes considérations font parvenir l'auteur à un nouveau résultat assez général, savoir que sans supposer le coefficient 2A divisible par 5, si le reste de ce coefficient divisé par 25, est l'un des huit nombres $\pm(3, 4, 9, 12)$, l'équation sera encore impossible; car dans ce cas l'indéterminée z sera nécessairement divisible par 5, ce qui revient au cas où le coefficient serait divisible par 5. Si donc l'auteur du Mémoire n'est pas parvenu à démontrer l'impossibilité de l'équation $x^5 \pm y^5 = z^5$, comprise dans le théorème de Fermat, il a au moins réussi à prouver l'impossibilité d'une infinité d'autres équations analogues, telles que $x^5 \pm y^5 = 4z^5$, $x^5 \pm y^5 = 16z^5$.

Les commissaires ont pensé que ce Mémoire, qui contient quelques nouveaux résultats dans une matière difficile et jusqu'à présent peu cultivée, mérite d'être approuvé par l'Académie et imprimé dans le Recueil des savants étrangers. L'Académie a adopté cette conclusion.

On a proposé, depuis quelques années, divers instruments pour déterminer et pour tracer, au crayon, la perspective des objets que l'on veut représenter dans un tableau. M. Boucher, capitaine ingénieur-géographe, a donné, en 1821, un instrument fort ingénieux pour ce dessin des perspectives. La partie de ce procédé, qui consiste à lier

marche du crayon à celle de la main, avait été décrite par M. Rennenkampff, et publié à Rome en 1808.

M. Puissant, auteur de plusieurs ouvrages importants, et connu de l'Académie par des travaux qui intéressent éminemment la géodésie et la géographie mathématique, a donné un nouvel instrument de ce genre, dont l'objet est de représenter les objets en perspective sur une surface cylindrique. MM. Poinsot, Navier et Mathieu (rapporteur), ont examiné la construction que M. Puissant a donnée, et qui est, à proprement parler, un procédé géométrique et pratique pour tracer les panoramas.

La plupart des artistes auteurs de ces tableaux frappants, qui offrent une instruction populaire si précieuse, forment leurs compositions au moyen de dessins partiels. M. l'ingénieur Boucher y suppléait au moyen d'un instrument qui traçait le dessin sur une surface cylindrique. La commission a reconnu que le procédé dont se sert M. Puissant, n'est sujet à aucun des inconvénients qu'elle a remarqués dans les diverses manières de construire les panoramas. L'Académie a adopté les conclusions de ce rapport qui portent : « que l'instrument proposé par M. Puissant deviendra d'une grande utilité, si les diverses parties du mécanisme sont exécutées avec assez de soin pour rendre les mouvements bien uniformes, et qu'il offre un procédé exact pour tracer directement les perspectives sur un cylindre.

M. Cousineri, ingénieur des ponts-et-chaussées à Marseille, a présenté un Mémoire qui a pour objet une nouvelle méthode de décrire exactement les corps; l'auteur désigne ce procédé sous le nom de *Géométrie perspective*. Il substitue

aux projections orthogonales, dont on fait communément usage pour exprimer la forme et les dimensions des corps, une projection polaire qui, à proprement parler, donne la perspective des figures sur un plan. Comme cette image ne suffirait pas pour déterminer la position des points du solide, l'auteur qui est très-versé dans les études géométriques, donne le moyen de connaître d'autres éléments qui rendent la description complète. Le but évident de sa recherche est de réunir l'avantage d'une représentation perspective à toutes les conditions d'une description géométrique. Conformément à l'avis des commissaires qui ont examiné ce travail, MM. Mathieu (rapporteur), et Fresnel, l'Académie a jugé que la méthode proposée par M. Cousineri est exacte et ingénieuse. Il est à désirer qu'il en multiplie les applications au dessin des machines, ou de l'architecture, à la cristallographie, et, en général, aux arts qui exigent l'usage de la géométrie descriptive.

M. Le Gendre a publié, dans le cours de l'année 1825, son *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes.* Les savantes recherches de l'auteur sur cette branche de l'analyse sont connues de tous les géomètres. Nous indiquerons plus spécialement l'objet de ce nouvel ouvrage dans un des rapports suivants.

M. le marquis de La Place a publié, dans le cours de cette année, un quatrième supplément à la théorie analytique des probabilités. La première partie de cet écrit contient des remarques sur la théorie des fonctions génératrices dont on est redevable à l'auteur, et que l'on pourrait regarder comme

le calcul des caractéristiques. L'application de cette méthode à l'intégration des équations est fondée sur le développement des fonctions, et l'on connaît des procédés très-divers pour former ces développements ; on a donc l'avantage de pouvoir choisir celui qui convient le mieux à la question.

La seconde partie du supplément, qui est la plus étendue, contient des recherches de M. le comte de La Place, fils de l'illustre auteur. Elle a pour objet la solution de deux questions d'analyse de probabilités. Ces problèmes sont très-propres à montrer l'usage de la méthode des fonctions génératrices, et l'avantage qui en résulte dans la recherche des intégrales. L'une et l'autre question contient le célèbre problème des *partis*, qui a occupé les premiers inventeurs de la théorie des chances, et est en quelque sorte l'origine de cette théorie. M. le comte de La Place termine ces recherches par des considérations nouvelles sur la nature des résultats que fournit le calcul des fonctions génératrices. I remarque qu'en passant des coefficients aux fonctions génératrices, il est nécessaire d'ajouter certains termes sans lesquels l'équation ne serait pas exacte, à moins de conditions particulières propres à la question. Cette remarque dont l'auteur fait l'application aux problèmes précédents, est importante, et sert à éclairer l'emploi de la méthode générale.

M. Poisson a offert à l'Académie un Mémoire imprimé qui contient une application très-remarquable et très-utile de la science du calcul à la mesure des effets du tir d'un canon sur les différentes parties de son affût.

La force élastique de la poudre enflammée qui imprime au projectile une très-grande vitesse, réagit en même temps

contre toutes les parties de la pièce, et produit le recul. Il importe beaucoup de connaître la somme des pressions que supporte chacune de ces parties pendant toute la durée de l'action de la poudre; et cette durée est vraisemblablement moindre que la deux centième partie d'une seconde. Ainsi la pression totale exercée pendant un intervalle de temps aussi court est, à proprement parler, l'effet d'une percussion. La quantité de mouvement imprimée dépend de celle que le boulet a reçue; de sorte qu'en faisant abstraction de la flexibilité du système, on peut calculer cette quantité de mouvement. La question consiste à déterminer la vitessse qu'il faudrait donner à une certaine masse pour que le choc contre une partie de l'affût produisît sur cette partie un effet équivalent à l'action de la poudre. L'auteur résout cette question d'après les conditions qui lui sont propres, ou que l'on peut admettre; il satisfait ainsi à l'objet principal de la recherche, qui est d'éclairer la pratique sur le degré de force que doit avoir chaque partie du système pour opposer une résistance suffisante; l'auteur considère ensuite la question du recul, et il en analyse les principaux effets. Les principes qu'il suit dans cet examen mathématique ont l'avantage de pouvoir être appliqués à plusieurs autres questions de mécanique fort importantes. Cet ouvrage de M. Poisson a été imprimé par ordre du Ministre de la guerre.

M. le comte de Chabrol a présenté à l'Académie un ouvrage dont il est l'auteur, et qui a pour objet la description statistique des provinces de Savone, d'Oneille, d'Acqui et de Mondovi, formant l'ancien département de Montenotte. M. Girard a été chargé de rendre compte de cet important

travail, et son rapport donne une juste idée de l'étendue de ces recherches et de l'esprit d'analyse qui les a dirigées : elles ne pouvaient être mieux appréciées que par un membre de l'Académie, qui joint aux lumières de la théorie celles que procure une longue expérience.

La topographie, la population, l'histoire, l'administration, l'agriculture, l'industrie et le commerce, sont l'objet de différentes parties de l'ouvrage. L'auteur a long-temps exercé l'autorité principale dans ces contrées, et y a laissé de profonds souvenirs de justice, de bienveillance, et de grands talents administratifs; il s'est fait un devoir d'étudier ce territoire sous tous les rapports qui peuvent intéresser le gouvernement civil et le bonheur des peuples. C'est l'origine de la description statistique qui a été publiée; les administrateurs y ont trouvé un modèle de ce genre de recherches, et le succès a prouvé que l'on peut réunir tous les suffrages lorsqu'on est éclairé par de longues études, et animé par des vues sincères d'utilité publique. Les sciences conduisent à la connaissance de toutes les vérités, et parmi les plus importantes, il faut placer celles qui peuvent rendre une contrée plus productive, et ouvrir au commerce et à l'industrie de ses habitants de nouvelles sources de prospérité.

« Il serait à désirer, dit M. Girard en terminant son rapport, que la France entière fût aussi bien connue que l'on connaît maintenant, par le travail de M. de Chabrol, l'un des départements qui n'en font plus partie aujourd'hui. Tant de soins apportés à recueillir jusqu'aux moindres renseignements, pour guider l'administration publique dans l'amélioration d'une contrée dont, il faut en convenir, la population, l'agriculture, l'industrie et le commerce n'offraient

que des ressources bien bornées, prouvent à la fois le zèle et les talents de celui qui fut appelé à l'administrer, et fournissent une explication naturelle de la persévérance et du succès avec lesquels il poursuit maintenant la description statistique de la capitale, et du département de la Seine.

M. le Baron Dupin a présenté à l'Académie la première partie d'un ouvrage qui contient ses leçons de géométrie et de mécanique.

Nous avons fait connaître dans nos rapports précédents l'objet de ce cours élémentaire. Les progrès de cet enseignement intéressent au plus haut degré l'industrie française; les magistrats qui les favorisent, et toutes les personnes qui, ayant puisé des connaissances étendues dans nos écoles spéciales, concourent à un dessein aussi honorable, acquièrent des droits à la reconnaissance des amis des sciences.

Nous avons cité dans l'analyse des travaux de l'Académie, année 1824, la partie du rapport de la commission de statistique qui concerne l'ouvrage de M. Moreau de Jonnès, intitulé *le Commerce au* XIXe *siècle*. Ces recherches ont été imprimées, et les suffrages publics ont confirmé le jugement de l'Académie de Marseille, qui les a couronnées. Une commission composée de M. l'amiral Rosili et M. le lieutenant-général Andréossy (rapporteur) a fait à l'Académie un rapport détaillé sur une collection de Mémoires que M. Moreau de Jonnès a présentée, et qui contient une application des connaissances physiques et géographiques aux opérations de la guerre dans les Indes occidentales.

L'auteur a séjourné pendant dix années dans les Iles de

l'Archipel des Antilles, et il a recueilli avec un zèle infatigable les observations les plus utiles et les plus variées. Ses recherches embrassent les qualités physiques du climat, la configuration du sol, la population, et tous les résultats statistiques qui peuvent intéresser l'art de la guerre, ou le gouvernement civil. Une partie de cet ouvrage est un travail complet sur la géographie militaire des Indes occidentales. La commission a reconnu que les renseignements donnés par M. de Jonnès sont d'un véritable intérêt, et que l'application qu'il en fait aux opérations de la guerre est de toute exactitude. La conclusion de ce rapport a été adoptée par l'Académie : elle porte que si ce grand travail était de nature à pouvoir être publié, les commissaires auraient proposé l'impression dans la collection des Mémoires des savants étrangers, et qu'ils sont d'avis qu'un ouvrage d'une telle importance doit mériter à l'auteur les éloges de l'Académie.

L'Académie a désiré qu'on lui rendît un compte verbal d'un ouvrage de M. Moreau de Jonnès, intitulé : Recherches sur les changements produits dans l'état physique des contrées par la destruction des forêts. Cet ouvrage a été couronné par l'Académie royale de Bruxelles, et imprimé par ordre de cette illustre compagnie. M. Fourier a indiqué comme il suit l'objet et les résultats de ces recherches.

La question proposée appartient à la géographie statistique; elle intéresse les sciences et l'administration des états. Elle avait pour objet d'examiner les changements que la diminution progressive des grandes forêts peut occasioner dans la température de l'air, dans son état hygrométrique, l'abondance des sources, la direction des vents. L'auteur a discuté

ces questions avec beaucoup de soin; il présente dans l'introduction un tableau statistique des forêts de la plupart des états principaux de l'Europe; il en fait connaître l'étendue en France, dans les états héréditaires de l'Autriche, dans la Grande-Bretagne, la Prusse, la Pologne, les provinces belgiques, les Électorats de Trèves, de Cologne, de Mayence, et les autres parties de l'Allemagne, pour lesquelles il existe à ce sujet des documents authentiques. L'auteur compare pour plusieurs pays l'étendue des bois à la population; et afin de mesurer la diminution successive de cette étendue, et de montrer combien cette diminution est rapide, il indique la surface actuelle des forêts et celle qu'elles ont occupée. Ces rapprochements ont exigé un long travail; et quoique dans une telle matière on ne puisse atteindre à des évaluations précises, les conséquences générales ne sont pas moins certaines, et offrent un haut degré d'intérêt.

Il est évident que des changements aussi considérables influent sur des branches importantes de l'économie publique, sur l'état physique du sol, la condition des habitants, et sur les productions de l'industrie et des arts. M. Moreau de Jonnès décrit ces effets, et les exprime toujours en nombres, autant que la nature des questions peut le comporter. Dans le premier chapitre, il considère l'influence des forêts sur la température des contrées. Il traite, dans les chapitres suivants, des autres effets de la présence des bois d'une grande étendue, et des rapports naturels de cette cause avec la fréquence et la quantité des pluies, l'état hygrométrique de l'atmosphère, l'abondance des sources, et le cours des eaux pluviales; il applique spécialement ces recherches à l'Angleterre, aux États-Unis, et aux contrées méridionales

de l'Europe et de l'Amérique. L'auteur montre ensuite l'influence favorable des grandes forêts qui couronnent les montagnes, abritent les contrées, alimentent les sources, tempèrent l'action des vents. Il décrit avec le même soin les effets nuisibles des bois inférieurs, qui dans de certains lieux entretiennent une humidité funeste, arrêtent la circulation de l'air, et occasionnent des fièvres annuelles. Il cite les marécages tourbeux de la Grande-Bretagne, les forêts inondées de l'Inde et de l'Amérique. Dans le sixième et dernier chapitre, M. Moreau de Jonnès considère surtout l'influence des grandes forêts sur la fertilité du sol, et sur l'économie civile; il montre les conséquences graves et prochaines de la diminution rapide des grandes forêts, et les dommages immenses qu'elle occasionnerait dans les propriétés du sol, les usages domestiques et les procédés des arts, le commerce maritime et la marine militaire.

En traitant des questions aussi étendues et aussi variées, l'auteur a fait une application remarquable des vrais principes de la géographie physique. Il ne se borne point à des considérations générales. Il décrit, il énumère; et ses recherches fondées sur les documents les plus divers, dont il cite les sources principales, comprennent une multitude de faits qui n'avaient point encore été comparés. Enfin, ce qui est une condition trop souvent négligée dans les écrits de ce genre, il exprime en nombres tous les résultats de ses recherches; c'est ce qui distingue son ouvrage des dissertations confuses, où l'on s'efforce de suppléer au défaut de connaissances positives par l'exagération et le vague des expressions. A la vérité, les évaluations numériques que comporte un tel sujet sont rarement susceptibles d'une précision rigoureuse:

mais celles que l'auteur rapporte ont du moins un degré suffisant d'approximation pour les conséquences générales. Par exemple, il rassemble les documents propres à faire connaître la quantité périodique des bois que la navigation commerciale et la marine militaire emploient à la construction des vaisseaux dans tous les états européens, et il donne ainsi une juste idée de l'étendue des forêts dont les usages maritimes nécessitent l'exploitation. Ces rapprochements sont très-utiles; ils prouvent que la perte continuelle des bois de construction destinés à la marine peut changer les relations politiques de plusieurs états, et prépare des avantages immenses aux seules nations qui pourront disposer, soit par la possession, soit par le commerce, de vastes forêts dans les contrées plus récemment découvertes. Les effets généraux de la disparition des bois naturels ont été remarqués et prévus depuis très-long-temps. Tout le monde connaît à ce sujet l'opinion d'un grand ministre, dont les sciences et les beaux-arts honorent la mémoire, de Colbert, qui avait consacré sa vie à l'étude de toutes les sources de la prospérité publique. L'Académie de Bruxelles a donné un nouveau témoignage de son zèle éclairé pour les progrès des connaissances utiles, en proposant cette importante question : elle ne pouvait choisir un objet plus académique et plus digne des recherches des physiciens et des méditations des hommes d'état.

Le Mémoire qu'elle a couronné traite cette question sous les rapports les plus étendus; l'auteur a mis dans son jour l'utilité des grandes plantations, la nécessité de mettre un terme à la destruction des forêts; et il prouve que les dispositions administratives qui auraient cet objet, doivent être

placées au premier rang parmi celles qui concourent à l'amélioration du territoire.

Pour suppléer à l'extrait du Mémoire de M. de Freycinet, qui a été cité plus haut, nous placerons ici textuellement l'exposé sommaire des résultats qu'il a déduits de ses nombreuses observations du pendule

1° Que l'aplatissement général du globe (cet aplatissement moyen est égal à $\frac{1}{286,2}$), est sensiblement plus grand que celui qu'on avait déduit des mesures du méridien, ou de la théorie de la lune. Les observations postérieures du capitaine Sabine ont confirmé ce résultat.

2° Qu'il n'y a aucune raison de supposer, comme on l'avait fait antérieurement, d'après les recherches de Lacaille, que l'hémisphère nord et l'hémisphère sud ont des aplatissements différents.

3° Que sur quelques points du globe, des circonstances locales produisent dans les oscillations du pendule des irrégularités très-considérables. A l'île de France, par exemple, l'influence locale s'élève à plus de 14" en vingt-quatre heures. Ce résultat, qui avait excité l'étonnement des astronomes et des géomètres, se trouve confirmé, quant au sens et quant à la valeur, par les observations plus récentes de M. le capitaine Duperrey.

M. le colonel Brousseaud et M. Nicollet, membre adjoint du Bureau des longitudes, ont présenté un Mémoire ayant pour titre : Exposé des opérations relatives à la mesure d'un arc de parallèle moyen entre le pôle et l'équateur. MM. de La Place, de Rossel et de Prony (rapporteur), ont examiné ce

travail. Nous allons citer plusieurs parties du rapport fait à l'Académie par la commission.

Le gouvernement français fit entreprendre, en 1802, une triangulation de la Suisse, de la Savoie et de la Haute-Italie, qui devait s'étendre sur la France, se rattacher à la méridienne de Dunkerque, et servir de base à un système de cartes coordonnées avec celles de Cassini.

On reconnut bientôt que cette entreprise, commencée d'abord dans des vues militaires, pouvait, si on l'étendait jusqu'à l'Océan, être appliquée à la confection d'une nouvelle carte de la France, ayant sur l'ancienne les avantages qui tiennent aux progrès de la science, à la supériorité des instruments d'observation, en même temps qu'elle fournirait d'importantes connaissances sur la figure de la terre.

En conséquence, le ministre de la guerre, sur la proposition de M. de La Place, ordonna, en 1811, la formation d'un réseau trigonométrique dirigé dans le sens du 45e parallèle, ayant son origine occidentale sur les bords de l'Océan, près de Bordeaux, et son extrémité à Fiume, en Istrie. Une petite partie de ce réseau, comprise entre Padoue et la Superga, près de Turin, et composée de dix-huit triangles, avait déja été relevée en 1808 et en 1809, par MM. Coraboeuf, Béraud et Monet, ingénieurs-géographes français, sous la direction de M. le colonel Brossier.

L'exécution du surplus de ces divers travaux fut confiée aux officiers du corps royal des ingénieurs-géographes, opérant sous la direction de MM. les colonels Brossier, Brousseaud et Henri; et quoique poussée avec beaucoup d'activité, elle n'était pas terminée en 1813. Les événements de la guerre suspendirent cette opération. Le réseau offrait encore

à cette époque deux lacunes, l'une à l'extrémité occidentale de l'arc du parallèle, l'autre entre les Alpes et Turin; la première fut remplie par M. le colonel Brousseaud, pendant les années 1818 et 1819, et une commission austro-sarde acheva, en 1823, les opérations géodésiques.

Le monde savant doit, à ce concours de travaux, un système de cent six triangles du premier ordre, compris entre la tour de Cardouan et Fiume. Quatre-vingt-dix de ces triangles ont été relevés par les ingénieurs français, et les autres par les membres de la commission austro-sarde. L'amplitude de l'arc du parallèle sur lequel ils s'étendent, est de 15° 37′, environ $\frac{1}{23}$ de la circonférence, et sa longueur absolue de plus de 1,200,000 mètres.

Des opérations commencées par ordre du gouvernement autrichien, et qui vraisemblablement se continuent, prolongeront cette chaîne à l'est de Fiume, jusqu'à Orsowa, et ajouteront ainsi huit degrés de longitude aux 15° $\frac{1}{2}$ dont nous venons de parler; en somme 23° $\frac{1}{2}$.

L'application des mesures géodésiques, prises dans la direction d'un parallèle, aux recherches qui concernent la figure de la terre, résulte de la combinaison de ces mesures avec celle de l'arc céleste correspondant, et, par conséquent, d'une détermination très-exacte des différences en longitude, opération purement astronomique. Le choix du procédé à suivre pour de pareilles déterminations est un objet de haute importance, et les coopérateurs du travail dont on fait connaître l'objet à l'Académie, ont unanimement adopté la méthode des *feux instantanés*, qui repose sur la connaissance rigoureuse du temps absolu à chaque station d'où l'on observe ces feux.

MM. Plana et Carlini, membres de la commission austro-sarde, après avoir déterminé en 1821 la différence des méridiens entre l'observatoire de Milan et l'hospice du Mont-Cenis, appliquèrent, pendant l'année 1821, la méthode que l'on vient d'indiquer, et témoignèrent, en 1822, le désir de se réunir aux ingénieurs et astronomes francais pour continuer l'opération sur la partie de l'arc commun à la France et à la Savoie. En conséquence, MM. Brousseaud et Nicollet furent désignés, l'un par S. Exc. le ministre de la guerre, l'autre par le bureau des longitudes, pour travailler de concert avec les astronomes étrangers, et la commission mixte se trouva réunie à Chambéry le 10 août 1822. Là s'établit une discussion approfondie, éclairée par les connaissances locales du relief des Alpes. Le résultat fut de conduire les observations de longitude depuis le Mont-Cenis jusqu'au centre de la France, au moyen de trois observatoires, et deux stations intermédiaires pour les signaux de feux. Les cinq points choisis étaient *le Col de la Rella*, près l'hospice du Mont-Cenis; *le Mont-Tabor,* dans la province de Maurienne en Savoie; *le Mont-Colombier,* en France, département de l'Ain; *la Montagne de Pierre-sur-autre*, arrondissement d'Ambert, département du Puy-de-Dôme, et *le Puy-d'Isson*, arrondissement d'Issoire, même département.

Le Mont-Colombier étant visible de Genève, des signaux de feux y furent donnés pour fournir aux astronomes de cette ville l'occasion de rattacher la position de leur observatoire au parallèle mesuré.

En 1823, MM. Brousseaud et Nicollet furent chargés de continuer les opérations de longitude du côté de l'ouest, entre Isson et l'Océan. Le choix des stations et des emplacements

des signaux exigea vingt-six jours de courses très-pénibles à travers des chaînes de montagnes, et sur une longueur d'environ cent lieues; et cette laborieuse exploration fit reconnaître la nécessité de subdiviser l'arc de parallèle, compris entre Isson et la mer, en trois arcs partiels, ce qui suppose quatre stations astronomiques, et trois stations intermédiaires pour les feux.

Ces divers points furent, dans le sens de l'est à l'ouest, le Puy-d'Isson et le Pic du Mont-d'Or, département du Puy-de-Dôme; le signal de Sauvagnac et celui du Puy-Coigneux, département de la Haute-Vienne; le moulin à vent de Saint-Preuil, près de Bouteville, département de la Charente, arrondissement de Coignac; le signal de la Ferlandière, près de Saintes, et le clocher de Marennes, sur le bord de la mer, département de la Charente-Inférieure.

M. le colonel Brousseaud avait sous ses ordres MM. Largeteau et de Lavarende, ingénieurs géographes; et M. Nicollet était aidé dans ses opérations par MM. César Delavigne et Charles Pellegrini, qui cultivaient depuis long-temps et avec beaucoup de succès les sciences physiques et mathématiques.

Les auteurs du Mémoire, mettant à la suite des mesures qu'ils ont exécutées celles qui leur ont été fournies par les astronomes étrangers, parviennent à composer les amplitudes astronomiques de six arcs partiels formant l'arc total de Marennes à Padoue. L'arc total est 0^h—$51'$—$56''$, 66. Passant à l'examen des conséquences relatives à la grandeur et à la figure de la terre, ils discutent en premier lieu les erreurs dont peuvent être affectées les sommes des angles des triangles de la chaîne qui couvre l'arc du parallèle compris entre

Marennes et Padoue. Les bases de cet examen, et celles de toutes les autres vérifications auxquelles on voudrait soumettre les opérations géodésiques et astronomiques, se trouvent dans un nombre considérable de tableaux et de documents divers dont le Dépôt de la guerre et le Bureau des longitudes sont en possession.

On trouve en outre dans le Mémoire tous les détails relatifs aux observations des longitudes, aux instruments employés, aux précautions qui ont été prises, et aux difficultés que les coopérateurs ont rencontrées.

Après le contrôle des mesures géodésiques, les auteurs s'occupent de la comparaison de ces mesures avec les mesures astronomiques. L'arc du parallèle sur lequel cette comparaison se trouve effectuée est celui de 45° 43′ 12″ de latitude, qui coupe le plus grand nombre de triangles. Les calculs du développement du parallèle sont fondés sur ceux de la méridienne de France, en prenant $\frac{1}{305}$ pour valeur de l'aplatissement.

Calculant sur de telles données les amplitudes géodésiques des six arcs partiels du parallèle, on trouve pour la

somme géodésique des 6 arcs.........	0^h	51′	57″,	34
l'amplitude astronom. a été trouvée de.	0	51	56,	68
différence	0^h	00′	00″	66

Déterminant le sphéroïde qui satisfait le mieux à l'ensemble des observations de longitude, il en résulte une correction de —0″, 12 sur l'amplitude astronomique, laquelle se trouve ainsi réduite à 0^h, 51′ 56″, 54, d'où l'on tire une valeur du degré du parallèle égale à 77854 mètres 76 pour la latitude

de 45° 43′ 12″. La combinaison de ce degré moyen du parallèle avec les degrés moyens des méridiens mesurés en Europe par MM. Delambre, Méchain, Arago et Biot, au Pérou par Bouguer et La Condamine, dans l'Inde par Lambton, donne pour valeur de l'aplatissement, en France $\frac{1}{284,746}$, en Europe $\frac{1}{283,7}$, au Pérou $\frac{1}{299,33}$, dans l'Inde $\frac{1}{295,844}$.

Ce sont les résultats obtenus en considérant l'ensemble des 6 arcs partiels qui composent l'arc total; MM. Brousseaud et Nicollet ont voulu connaître ceux qu'on obtiendrait en n'employant que l'arc de France qui s'étend de Marennes à Genève. Ils trouvent dans ce cas pour la valeur du degré moyen à la latitude de 45° 43′ 12″, 77868^{m},15. Cette valeur combinée avec les mêmes degrés moyens méridiens dont il a été question plus haut, donne pour l'aplatissement en France $\frac{1}{270,9}$, en Europe $\frac{1}{279,96}$, au Pérou $\frac{1}{293,68}$, dans l'Inde $\frac{1}{296,3}$.

Ces aplatissements ont été calculés d'après les formules que M. Puissant a publiées dans la Connaissance des temps pour l'année 1827. M. Puissant a fait, de son côté, les mêmes calculs d'après les méthodes qu'il a exposées, soit dans son Traité de géodésie, soit dans la Connaissance des temps.

Les auteurs du Mémoire rappellent ensuite quelques détails des opérations relatives aux azimuths et aux latitudes. La mauvaise saison ne leur ayant pas permis de sacrifier plus de douze jours à la mesure de la latitude et de l'azimuth de Marennes, les résultats obtenus ne sont pas entièrement suffisants pour servir de fondement à des conséquences certaines; MM. Brousseaud et Nicollet se proposent de retourner à Marennes pour compléter ces observations; ils reviendront

plus tard sur cette partie supplémentaire de leur travail.

Les noms de ceux qui ont coopéré, avec autant de zèle que de talent, aux opérations et aux calculs dirigés par MM. Brossier, Brousseaud et Nicollet, déja cités dans le rapport, et auxquels il faut ajouter ceux de MM. Savary et Lecamus, se trouvent répétés à la fin du Mémoire.

Le travail remarquable dont les commissaires ont rendu compte est le premier de son espèce qu'on puisse regarder comme exécuté sur une étendue suffisante pour fournir des données propres à une comparaison des arcs de parallèle et de méridien, conforme au cas de la nature, ou à la figure et aux dimensions réelles du sphéroïde. Les mémorables expéditions faites dans le cours du siècle dernier pour déterminer cette figure et ces dimensions, sont généralement connues; on peut même les compter parmi les entreprises scientifiques qui jouissent de la plus universelle célébrité; et on n'oubliera pas que le Gouvernement et les savants français occupent le premier rang parmi les promoteurs et les coopérateurs de ces mémorables travaux.

Il suffit, pour fonder cette assertion, de citer les degrés du méridien mesurés à l'équateur dans la traversée de la France, et près du pôle boréal, pendant la première moitié du XVIII[e] siècle; la détermination postérieure des bases de notre système métrique, par une suite d'opérations qui embrassent toute l'étendue de la France et une partie du territoire espagnol.

Cependant, ces immenses recherches n'ayant pour objet que des mesures prises dans les directions des méridiens, ne fournissaient qu'une partie des données relatives à la figure

du sphéroïde terrestre. Il est vrai qu'en admettant la fluidité de ce sphéroïde, assujétie à certaines conditions, la théorie newtonienne, appliquée à la mesure d'un seul arc du méridien suffisamment étendu, et encore mieux de deux arcs séparés, ferait connaître, sans qu'il fût besoin d'autre mesure, la figure et les dimensions cherchées; mais cette régularité n'est qu'un moyen théorique d'approximation dans les calculs. On a reconnu que le sphéroïde terrestre, quoique à peu près conformé comme un ellipsoïde de révolution, en diffère, cependant, d'une manière très-sensiblement appréciable. Ses méridiens ne sont point semblables entre eux, et même, rigoureusement parlant, ne sont pas des courbes planes. D'après cet état des choses, les mesures des parallèles conclues de celles des méridiens laissent des incertitudes qui ont fait vivement désirer des mesures immédiates de ces parallèles exécutées sur de grandes longueurs : telle est la tâche que viennent de remplir MM. Brousseaud, Nicollet et leurs coopérateurs, avec un zèle et une persévérance dignes des plus grands éloges.

Nous terminerons cet exposé en citant textuellement les conclusions du rapport adoptées par délibération de l'Académie.

1° MM. Brousseaud, Nicollet et leurs coopérateurs ont acquis des droits aux éloges de l'Académie et à la reconnaissance publique, par les travaux auxquels ils se sont livrés pendant plusieurs années pour mesurer un arc de parallèle entre l'Océan et Padoue.

2° Il serait à désirer que S. Exc. le ministre de la guerre ordonnât la publication de toutes les pièces propres à donner une connaissance détaillée de leurs opérations, en y joignant,

s'il était possible, celles qui concernent la continuation de ces mêmes opérations juqu'à Fiume.

3° Le Mémoire lu à l'Académie par M. Nicollet le 11 juillet dernier, sera publié dans le Recueil des savants étrangers, avec la carte et le tableau de résultats qui y sont joints.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE M. CHARLES,

Prononcé dans la séance publique de l'Académie royale des sciences, le 16 *juillet* 1828,

PAR M. LE BARON FOURIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

EN consacrant ce discours à la mémoire de M. Charles, je prononce, Messieurs, un nom qui vous fut cher, et que l'histoire des sciences ne doit pas laisser dans l'oubli. Ce nom rappelle à la fois d'heureux progrès de la physique expérimentale, des inventions ingénieuses qui ont perfectionné l'étude de la nature et une découverte extraordinaire, l'une des plus éclatantes du siècle dernier.

M. Charles (Jacques-Alexandre-César) est né à Baugency, le 12 novembre 1746. Il se distingua d'abord par de nombreux succès dans ses études littéraires. Ensuite il cultiva la musique, la peinture, et montra dans tous les arts un goût délicat et une facilité singulière d'acquérir les talents les plus variés. Il occupa assez long-temps un emploi dans les finances, et rien n'annonçait qu'il dût être un jour un des

plus habiles physiciens de l'Europe. On remarquait seulement que, soit dans les arts, soit dans les occupations les plus communes, il n'entreprenait rien qu'il ne l'achevât correctement, avec élégance, justesse et précision. Ce n'était encore qu'une heureuse disposition à la physique expérimentale. Mais un plan économique du contrôleur général des finances porta M. Charles dans la carrière des sciences. Son emploi fut supprimé; on lui ôtait peu de chose, on lui laissa beaucoup; il lui resta ce qui heureusement suffit à ceux qui doivent un jour exceller dans les arts, la libre disposition de son temps et de ses talents.

Vers ce même temps, le nom de Franklin retentissait dans les deux mondes. Ce grand homme donnait à l'Europe l'un des plus nobles spectacles que l'histoire puisse offrir aux nations : la postérité demandera s'il fut plus grand à la barre du parlement anglais, ou près des conseils du cabinet de Versailles, ou lorsque son génie détourna la foudre. Cette dernière découverte avait beaucoup contribué à porter les esprits vers l'étude des phénomènes naturels. M. Charles voulut s'y consacrer sans réserve. Il avait d'abord entrepris de répéter les expériences physiques les plus difficiles; il y apportait une dextérité que l'on pourrait dire incomparable, et le succès l'enhardit à donner des démonstrations publiques. Il arriva alors que l'administration, se rappelant ses premiers services, lui offrit un nouvel emploi dans la trésorerie. Mais cette fois la finance vint trop tard; les sciences avaient acquis M. Charles; elles le conservèrent. Il lui fut loisible de disposer de sa place; il la céda et en retira quelque avantage. Il eut donc à placer un capital inattendu : sa résolution fut bientôt prise; il enrichit de plusieurs instruments très-pré

cieux son cabinet de physique. C'est l'origine de sa belle et utile collection.

Le nombre de ses auditeurs s'était accru rapidement; il les attirait par une élocution facile et brillante, et, ce qui est plus rare, il les retenait par l'étendue et la variété de l'instruction. Il eut le même succès durant trente années; et dans une multitude d'expériences si diverses et si difficiles, on ne se souvient pas qu'il en ait manqué une seule. Il ne se bornait pas à des effets médiocres, il s'efforçait d'exciter l'attention par la grandeur et l'intensité des résultats. Dans les expériences microscopiques, il produisait un grossissement énorme; s'il observait la chaleur rayonnante, il en montrait les effets à de très-grandes distances; dans ses leçons sur l'électricité, il foudroyait un animal.

Dès qu'un orage s'annonçait, on voyait Charles diriger vers le ciel son appareil électrique; il faisait descendre du sein des nuages, des milliers d'étincelles formidables de plus de douze pieds de longueur, et qui éclataient avec un bruit pareil à celui d'une arme à feu. Sous sa main tout devenait un spectacle, et, pour ainsi dire, un événement qu'aucun des témoins ne pouvait plus oublier. C'est par là qu'il a si heureusement contribué à répandre le goût et l'étude de la philosophie naturelle.

La physique rationnelle et mathématique sera toujours le partage d'un petit nombre d'esprits méditatifs; et cette étude profonde est nécessaire. C'est ignorer la nature que de ne pouvoir saisir les rapports secrets et immuables qui unissent les grands phénomènes. Mais la physique expérimentale instruit tous les hommes; elle introduit la lumière

par la porte des sens. Elle signale au géomètre des faits généraux, et lui donne des mesures que rien ne peut suppléer; elle atteste à tous la grandeur des sciences, et montre l'homme disposant à son gré des forces de la nature.

Les leçons publiques de M. Charles étaient données dans le plus beau cabinet de physique de l'Europe. On remarquait dans ces assemblées brillantes un grand nombre d'étrangers, des femmes célèbres, des savants illustres, parmi lesquels on cite Volta et Franklin. On rapporte que ce dernier fut souvent frappé de l'extrême habileté du professeur, et qu'il dit, à ce sujet: La nature ne lui refuse rien, il semble qu'elle lui obéisse. Lorsqu'on félicitait M. Charles de sa dextérité prodigieuse, il prétendait qu'elle n'était qu'apparente; ce sont ses expressions. Elle était, disait-il, le fruit d'un travail opiniâtre. C'est lui-même qui nous a rapporté que, dès le point du jour, il méditait et préparait avec un soin continuel les moindres détails des observations qu'il devait répéter en présence de ses auditeurs. Il passait des heures, des journées entières, à essayer dans son laboratoire une expérience qui, en public, ne devait durer que quelques minutes. C'est à ce prix que tout lui devint facile. Que sont en effet, Messieurs, il faut le dire surtout à ceux qui, dès leur première jeunesse, se consacrent aux sciences, que sont les talents narels les plus rares, le génie même, des dons imparfaits, des germes qui seront stériles, s'ils ne sont pas fécondés par de longues études et un travail infatigable?

Cet enseignement de la physique acquérait chaque jour dans la capitale un nouveau degré d'intérêt, lorsqu'une découverte éclatante et inattendue vint frapper les esprits; je veux parler de l'invention des aérostats. On apprit que

MM. Montgolfier avaient construit à Annonay une enveloppe légère, de forme sphérique, de cent dix pieds de circonférence, qui, étant gouflée par le feu, s'était élevée dans l'air avec une force de 500 livres, était ensuite parvenue à la hauteur de 1000 toises, et avait parcouru, en dix minutes, une distance horizontale de 1200 toises. Un cri de surprise et d'admiration s'éleva dans toute l'Europe. On commença à concevoir les espérances les plus extraordinaires; il semblait que l'époque était arrivée où le génie de l'homme allait enfin entrer en possession des régions de l'atmosphère. L'expérience de quarante années a beaucoup affaibli ces premières impressions; mais la découverte principale subsiste, les sciences en ont déja retiré des avantages remarquables.

On se plaît souvent à attribuer au hasard l'origine des plus ingénieuses découvertes. Les ouvrages des anciens et les histoires modernes ont conservé ces récits populaires, dont la plupart sont dénués de fondement. Les grandes inventions sont le fruit du génie éclairé par de longues études; elles arrivent en leur temps, lorsque les connaissances antérieures ont préparé toutes les conditions et multiplié les chances de découvertes.

L'inventeur des aérostats, Joseph Montgolfier, cherchait un moyen de pénétrer dans les places fortes en s'élevant dans l'air; il avait long-temps médité sur l'ascension des vapeurs; il se formait l'idée d'un nuage artificiel qui, étant contenu dans une enveloppe flexible, se porterait aux plus grandes hauteurs. Les travaux de Priestley, de Cavendish et d'autres célèbres contemporains, avaient fait connaître les propriétés de nouvelles substances gazeuses, dont quelques-unes sont

plus légères que l'air atmosphérique. On savait combien l'air est promptement dilaté par l'action de la chaleur, et l'effet était déja mesuré assez exactement. M. Mongolfier et son frère répétèrent cette observation : ils connaissaient les propriétés des différents gaz, et essayèrent plusieurs moyens de résoudre la question qui les occupait. La théorie en était facile; mais il y a un intervalle immense entre une première vue, quelque juste qu'elle soit, et la solution effective d'un problème, qui consistait à transporter des poids énormes à cinq ou six mille pieds de hauteur. Tout devient obstacle dans une route nouvelle. La ténuité, l'imperfection inévitable de l'enveloppe, l'extrême chaleur qu'il fallait développer d'abord, et même entretenir, ou la nécessité d'y suppléer, en produisant une grande quantité d'un gaz très-léger qu'il paraissait presque impossible de contenir assez long-temps, telles sont les difficultés principales d'une entreprise aussi singulière que celle d'imiter les nuages. Après diverses tentatives dont les détails nous ont été transmis, et qui remontent à l'année 1782, l'inventeur se détermina à dilater l'air atmosphérique par l'action d'un foyer où l'on brûlait aussi quelques matières animales; il parvint ainsi, par une assez longue suite de recherches, à réaliser l'un des projets les plus extraordinaires qu'un homme ait pu concevoir.

Cette expérience mémorable eut lieu le 5 juin 1783, en présence des États du Vivarais assemblés à Annonay. Lorsqu'on apprit dans la capitale un fait aussi prodigieux, personne n'en fut frappé plus vivement que M. Charles. Il entreprit aussitôt d'obtenir, par un autre moyen, le même résultat.

Il savait que l'air échauffé renfermé dans le ballon était

devenu seulement deux fois plus léger; il jugeait avec raison que la force ascensionnelle était due à la seule action de la chaleur, et que par conséquent il faudrait, suivant un tel procédé, donner à l'aérostat de très-grandes dimensions, et que la présence du foyer exposait incessamment l'appareil au plus grand danger. Il jugea donc bien préférable d'employer le gaz hydrogène, qu'on appelait encore l'air inflammable, et qui est environ douze ou quinze fois plus léger que l'air atmosphérique. Un grand nombre de personnes désiraient que l'on tentât une expérience aussi importante : elles s'accordèrent toutes pour en confier la direction à celui qui avait donné tant de preuves publiques de ses talents. On venait de composer un nouvel enduit résultant d'une dissolution de gomme élastique dans l'huile de térébenthine. Charles entreprit de l'appliquer aux enveloppes de taffetas, où l'on renfermerait le gaz hydrogène; et après un assez grand nombre d'essais, il parvint à résoudre la difficulté principale de la construction des aérostats, celle de contenir dans une enveloppe extrêmement légère et flexible une substance gazeuse aussi subtile que l'air inflammable.

Cette grande expérience eut un plein succès; son aérostat s'éleva du Champ-de-Mars le 2 août 1783, et parvint en deux minutes à 500 toises de hauteur : il se perdit d'abord dans un nuage, reparut ensuite, et continua de s'élever malgré une forte pluie. Il descendit peu de temps après à la distance de cinq lieues.

C'est la première fois qu'on a employé dans les aérostats le gaz hydrogène; ce procédé était le seul que les sciences pussent conserver. Aujourd'hui on ne fait usage d'aucun autre. Ainsi M. Charles sera cité dans tous les temps comme

le second inventeur; mais en s'exprimant ainsi, on ne porte aucune atteinte à l'éclat de la première découverte : elle immortalise le nom de Montgolfier; car la gloire appartient de droit à quiconque ouvre une carrière nouvelle. Rien ne peut ternir l'éclat de l'expérience d'Annonay.

On continua quelque temps l'emploi des montgolfières : on a donné ce nom aux aérostats remplis d'air atmosphérique dilaté par le feu. L'étonnement fut porté au plus haut degré lorsqu'on vit à Paris MM. Pilatre de Rosier et le marquis Darlandes se placer dans une nacelle suspendue à l'aérostat, et portés dans l'air par un ballon entièrement libre. Charles formait presque en même temps un dessein non moins hardi, et les procédés qu'il venait de découvrir étant d'un effet plus assuré et plus durable, le succès fut plus éclatant. Il s'éleva, accompagné de M. Robert, à une hauteur d'environ 7000 pieds, et parcourut en quelques minutes un intervalle de 9 lieues.

La nouveauté d'un aussi grand spectacle offert à la nation la plus vive de l'Europe causa des impressions que l'on ne peut décrire, et dont l'effet paraît en quelque sorte incroyable. L'admiration, l'enthousiasme agitaient tous les esprits : une multitude prodigieuse, accourue de plusieurs provinces, remplissait les Tuileries et presque toutes les places publiques. Lorsque les navigateurs s'élevèrent, les spectateurs furent saisis de crainte et d'étonnement; un grand nombre tombèrent à genoux : on respirait à peine, on garda assez long-temps un silence profond et universel, qui fut suivi d'acclamations immenses.

Descendu dans la plaine de Nesle, où se trouvaient le duc de Chartres et une multitude de cavaliers qui avaient accompagné ce prince, Charles proposa à M. Robert de per-

mettre qu'il continuât seul son voyage; son but était d'atteindre une hauteur beaucoup plus grande. En effet, la force d'ascension s'étant subitement accrue, Charles prit congé des augustes témoins qui l'environnaient, et s'élança aussitôt dans la région des nuages. Après s'être élevé à plus de 1500 toises, il s'abaissa à son gré et sortit de la nacelle.

Le roi avait été informé de ce voyage, et l'on a conservé le souvenir des deux ordres différents qu'il donna à ce sujet. Louis XVI, cédant à une vive inquiétude, avait d'abord exigé que le magistrat de police s'opposât à cette ascension. On ignore comment la défense pût être éludée. Lorsqu'on apprit ensuite le succès de cette entreprise hardie, le roi fit donner à M. Charles, sur sa cassette, une pension assez considérable. Personne ne trouvera sans doute que ces deux décisions fussent contradictoires : l'une et l'autre portent l'empreinte du caractère de cet excellent prince.

Je ne puis rappeler dans ce discours les ascensions aérostatiques qui suivirent celle de Charles ; elles ont donné à toutes les grandes villes de l'Europe l'un des spectacles les plus étonnants que le génie de l'homme puisse imaginer. Mais l'utilité publique, condition nécessaire de toute gloire durable, n'a point encore consacré cette découverte, ou du moins on n'entrevoit que faiblement et dans un avenir incertain les avantages immédiats qu'en retirerait la société civile.

Quoi qu'il en soit, les sciences, plus hâtives que l'industrie, ont pu explorer l'atmosphère. Si l'on ne considère que la nouveauté et la grandeur des effets, quelles impressions plus vives l'imagination pourrait-elle recevoir !

On a vu d'une hauteur immense les campagnes cultivées, les villes, les lacs, les côtes, le lit des mers, paraître et fuir

rapidement sous des aspects variés et jusque-là inconnus. On a pénétré dans les régions où se forment les météores. Les aéronautes plongés dans les nuages ont cessé entièrement d'apercevoir la terre. Deux de ces navigateurs aériens ont passé d'Angleterre sur la côte de France; un autre est resté toute une nuit au milieu des éclairs, porté alternativement d'une nuée à l'autre durant l'orage le plus violent. On a observé les qualités physiques de l'air, la nature et les effets de l'électricité dans les plus hautes régions de l'atmosphère. On a reconnu que la force magnétique terrestre ne subit point de variation sensible lorsqu'on s'éloigne de la terre, ce qui était jusque-là ou contredit ou incertain. On a puisé l'air de ces régions élevées, pour le comparer à celui que nous réspirons à la surface du globe ; on l'a trouvé partout formé des mêmes principes, selon des proportions qui sont exactement les mêmes.

Un des plus grands physiciens de l'Europe s'est élevé seul dans une frêle nacelle, à la hauteur prodigieuse de 22,000 pieds, qui surpasse celle des montagnes les plus élevées, si l'on excepte l'ancien Imaus. Son thermomètre, qui à la surface marquait 27 degrés, s'est abaissé dans ce nouvel observatoire à 9° $\frac{1}{2}$ au-dessous de la température de la glace fondante : aucun homme n'est parvenu à une aussi grande distance de la terre.

On a constaté ainsi et mesuré le décroissement rapide que subit la température, quoique l'on ne s'éloigne du globe terrestre qu'à une distance incomparablement plus petite que son diamètre. L'étude mathématique des phénomènes de la chaleur nous apprend aujourd'hui que ce décroissement a unelimite certaine que nous pouvons calculer : elle diffère peu de 50° au-dessous de zéro.

Dans ces voyages aérostatiques, on a toujours employé les procédés découverts et perfectionnés par M. Charles; et si l'invention des aérostats doit procurer de nouveaux avantages aux sciences, à l'art militaire, à l'industrie, c'est à lui surtout qu'on en sera redevable; il a donné à l'invention la forme qu'elle a conservée; c'est lui qui en a rendu l'usage facile et exempt de danger.

Personne ne conteste aujourd'hui l'utilité et la justesse de ses vues; mais on n'en porta point d'abord le même jugement. M. Charles avait trop d'esprit et trop de sagesse d'esprit pour chercher à diminuer l'éclat de la découverte principale, et l'inventeur lui-même était trop bienveillant et trop éclairé pour lui en attribuer le dessein; mais il est bien rare qu'un succès éclatant puisse échapper à l'envie. Elle s'était efforcée de montrer comme inutile, ou même dangereux, le procédé de l'air inflammable; elle parvint même à inspirer ces préventions à des personnes d'un mérite éminent. On allégua que Charles n'avait eu d'autre but que de faire oublier la première découverte : rien n'était plus opposé à son caractère et à ses prétentions. Il avait même exprimé son opinion à ce sujet publiquement, et de la manière la plus ingénieuse; car, avant l'ascension des Tuileries, Montgolfier avait reçu de sa main un ballon d'essai, qui partit d'abord et indiqua la direction des vents. « C'est à vous seul, lui dit « M. Charles qu'il appartient de nous ouvrir une route nouvelle. » Mais il ne parvint pas à désarmer l'envie : elle est opiniâtre, inventive, infatigable.

Charles en a ressenti les atteintes pendant une grande partie de sa vie. L'extrême facilité et l'attrait naturel de son caractère lui avaient fait de nombreux amis; il fut attaqué et

défendu très-vivement; et l'un des hommes les plus doux et les plus inoffensifs que l'on ait connus fut long-temps exposé à des contradictions pénibles, et perdit le repos si nécessaire aux études philosophiques.

Une circonstance singulière, dont je ne puis omettre le récit, lui suscita l'agression la plus injuste et la plus violente à laquelle un professeur public puisse être exposé. Un étranger, qui devait un jour prendre une part affreuse à nos discordes civiles, Marat, puisqu'il faut le nommer, s'occupait alors des sciences physiques. Les écrits qu'il a publiés, remplis de pensées confuses et presque inintelligibles, semblaient déja attester le désordre de l'esprit. Il combattait, dans les ouvrages optiques de Newton, non pas ce qu'il peut y avoir d'incertain ou d'imparfait, mais les conséquences les plus évidentes. Il se formait aussi une opinion singulière et non moins fausse des phénomènes électriques. Il se présenta dans l'appartement de M. Charles pour l'entretenir de ses opinions, qu'il appelait des découvertes. L'illustre professeur lui expliqua, avec sa clarté accoutumée, les principes des théories physiques qui étaient l'objet de la discussion; mais celui-ci, que rien ne pouvait convaincre, s'irrita de plus en plus. Il portait habituellement une épée, et, saisi tout-à-coup d'une colère violente, n'étant plus maître de lui, il tira cette arme et se précipita sur son adversaire; Charles n'était pas armé, mais dans la force de l'âge, et d'une dextérité sans égale. Excité par l'imminence du péril, il saisit rapidement son ennemi, le terrassa en quelques instants, et brisa son épée sous ses pieds. Après cette lutte violente, Marat s'évanouit: on crut qu'il allait expirer. M. Charles appela les voisins pour le secourir; il le fit transporter dans son domicile: et

en même temps il se rendit chez le lieutenant de police, pour l'informer de l'origine singulière et de l'issue du combat.

On conçoit de quelles craintes ses amis durent être agités lorsque, peu d'années après, les malheurs publics rendirent son adversaire si puissant et si redoutable. Charles eut le bonheur d'en être oublié; il se perdit dans la foule innombrable de tant d'autres ennemis.

Ces mêmes événements, dont j'aurais voulu écarter le souvenir, l'exposèrent à un autre danger; il avait reçu de la munificence royale un appartement au Louvre. Le riche cabinet de physique qu'il avait formé occupait une partie de la galerie d'Apollon. Lorsque le château des Tuileries fut envahi le 10 août 1792, les séditieux pénétrèrent dans ces appartements. Charles, environné tout-à-coup d'une multitude furieuse, se nomma, rappela ses ascensions aérostatiques qui avaient eu tant de témoins; il montra au plafond le char même dont il s'était servi, et qui devint pour lui un monument protecteur; il dut son salut à l'impression singulière que causa ce souvenir.

Au reste, Messieurs, un intérêt plus puissant que le danger personnel l'animait dans cette circonstance, et donnait à ses paroles une véhémence extraordinaire; jamais il ne fut si éloquent : en voici le motif. Un de ses frères, ecclésiastique, poursuivi par les discordes publiques, était caché dans ce même appartement. Charles lui donnait secrètement cet asile depuis deux mois. Enfin, les meurtriers s'éloignèrent. La piété fraternelle, la présence d'esprit, les talents, le courage, obtinrent de la fortune ce double bienfait.

M. Charles a étendu ses recherches aux matières les plus

diverses ; il serait impossible d'en présenter les résultats avec clarté sans des détails qui se rapportent à la physique expérimentale ou aux arts techniques. L'énumération complète de ses travaux ne peut être l'objet d'une lecture publique. Je me borne à citer l'ingénieuse et utile invention du *Mégascope*, dont l'optique et les arts sont redevables à M. Charles ; et ses importantes expériences sur la dilatation du gaz.

Les limites de ce discours ne permettraient pas d'exposer ici avec une juste étendue les tentatives que l'on a faites, depuis l'invention des aérostats, pour parvenir à les diriger, et de faire connaître les avantages que la physique, la géographie, les arts militaires ou civils, pourraient en espérer. Nous regrettons aussi de ne pouvoir rappeler avec quelques détails les ascensions les plus mémorables ; celles de Lyon où Joseph Montgolfier était accompagné de six autres navigateurs ; celle de Milan, de Dijon, le passage d'Angleterre en France, les ascensions fatales de MM. Pilatre de Rosier et Romain, qui, se confiant à une innovation imprudente, furent précipités à Boulogne, et celle du comte Zambeccary, qui tomba dans la mer Adriatique ; enfin l'invention singulière des parachutes, et l'étonnant mais jusqu'ici inutile spectacle d'un homme qui osa le premier abandonner l'aréostat, et descendre sur la terre d'une hauteur de plus de 6,000 pieds.

L'histoire des sciences conservera surtout le souvenir des deux ascensions les plus importantes qui aient été faites dans aucun pays, celles de MM. Gay-Lussac et Biot ; les observations que l'on doit à ces illustres physiciens sont les fruits les plus précieux de la découverte des aérostats.

Pour se former une juste idée des travaux et des talents

de M. Charles, il faut consulter les nombreux rapports auxquels il a participé, et qui intéressent la physique, les procédés de l'industrie et les arts; il était toujours désigné pour coopérer aux travaux communs à l'Académie des sciences et à celle des beaux-arts. On peut dire qu'il était notre commissaire perpétuel auprès de cette Académie.

J'ai fait connaître, dans ce discours, les premiers essais de M. Charles, ses succès, les contradictions, les peines qui ont troublé sa vie, les dangers qu'il a courus. Il me reste, Messieurs, à rappeler de plus longues douleurs, et des dangers, hélas! inévitables. Il avait ressenti depuis plusieurs années les attaques de la pierre; ce mal fit des progrès rapides et désespérants; il dépassa bientôt toutes les ressources de l'art. M. Charles endura avec résignation une opération qui était presque sans espoir; les sciences le perdirent trois jours après.

Les témoins de ses derniers instants se rappelleront toujours ce mélange inaccoutumé de sérénité et de douleurs, et ces paroles si ingénieuses qu'interrompaient des souffrances cruelles. La tendre piété de sa famille, les beaux-arts toujours fidèles, l'amitié, l'avaient consolé dans le cours de sa vie; nous l'avons entendu dire qu'il allait mourir sans regret, parce qu'il espérait de n'être pas entièrement oublié de ses amis : les sciences honorent sa mémoire; sa famille consacre le souvenir de ses vertus; tous ceux qui ont pu le connaître se plaisent à s'entretenir de ses talents, de son caractère noble, aimable et généreux; ses derniers souhaits sont accomplis.

Charles a eu pour successeur à l'Académie, dans la section de physique M. Fresnel, qu'une mort prématurée a enlevé

aux sciences, et dont la perte a causé des regrets universels.

M. Charles était bibliothécaire de l'Institut royal; il a été dignement remplacé, dans cette fonction, par M. Feuillet.

HISTOIRE

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE L'INSTITUT DE FRANCE.

ANALYSE

Des Travaux de l'Académie royale des Sciences, pendant l'année 1825.

PARTIE PHYSIQUE.

Par M. le Baron CUVIER, Secrétaire perpétuel.

MÉTÉOROLOGIE.

M. Moreau de Jonnès a lu une notice sur les derniers tremblements de terre qui ont eu lieu aux Antilles.

Le 3 octobre 1824, il y en a eu un à la Martinique, à une heure du matin, de deux secousses assez fortes pour éveiller les habitants des villes de Saint-Pierre et du Fort-Royal.

Le 30 novembre 1824, à trois heures trente minutes après midi, après plusieurs jours d'une chaleur extraordinaire, qui

cessa subitement, il y eut une secousse très-violente, accompagnée d'un bruit très-grand. Des pluies diluviales commencèrent immédiatement, quoiqu'on fût dans la saison sèche; et il y eut un raz de marée très-fort.

Le 13 janvier 1825, à une heure trente minutes du matin, deux secousses se firent sentir à Saint-Pierre; la température était demeurée très-élevée jusqu'au moment de ce phénomène.

Le 26 août, l'ouragan qui a dévasté la Guadeloupe, et dont on ne connaît que trop les affreux détails, se fit sentir à la Martinique, mais sans y causer de grands ravages. Le vent souffla fortement dès 6 heures du matin; une pluie prodigieuse qui tomba jusqu'à 2 heures après midi sembla diminuer sa violence. Il y eut de grands débordements de toutes les rivières.

CHIMIE.

Les beaux résultats obtenus par M. Chevreul, de ses recherches sur les corps gras, ont excité les chimistes à examiner ces corps sous d'autres rapports et par d'autres moyens.

M. Dupuy et MM. Debussy et Le Canu y ont appliqué l'action de la chaleur. On avait cru jusqu'à présent que la distillation les transformait en eau, en acide carbonique, en acide acétique ou sébacique, en charbon, et en huile altérée et très-odorante : mais M. Dupuy a obtenu, par la distillation lente des huiles de pavot et de lin, un produit solide qui ne rentrait dans aucun de ceux que nous venons de nommer; et MM. de Bussy et Le Canu, ayant poussé l'examen plus loin, ont constaté qu'outre ces produits on en obtient plu-

sieurs autres, et surtout ces acides que M. Chevreul a nommés *margarique* et *oléique*. En opérant sur le suif, on retire plus des trois dixièmes de son poids d'acide margarique, et les auteurs ont cru cette observation susceptible d'applications assez utiles, pour se l'approprier par un brevet d'invention. Ils pensent qu'il se passe quelque chose de semblable dans la distillation du succin, et que l'acide succinique est produit par l'opération même.

On savait, par les expériences de Priestley et de quelques autres physiciens, que les charbons faits avec le même bois, mais à divers degrés de température, n'ont pas les mêmes propriétés physiques; que celui qui a été chauffé très-fortement, par exemple, devient un bien meilleur conducteur de l'électricité que celui qui a été fait à un feu doux.

M. Cheuvreuse, professeur de chimie à l'École royale d'artillerie de Metz, a repris ce sujet, et l'a traité d'une manière beaucoup plus étendue. Non-seulement il a refait avec beaucoup de précision les expériences relatives à la qualité conductrice de l'électricité, mais il a reconnu et constaté des propriétés toutes semblables relativement au calorique; le charbon fortement chauffé en est un bon conducteur : ce n'est que le charbon fait à une basse température qui le conduit mal; et l'on se trompait beaucoup, lorsque, pour empêcher le refroidissement d'un appareil, on se contentait de l'envelopper de charbon, sans distinguer de quelle manière ce charbon avait été fait.

Il sera aisé à l'avenir d'éviter cette faute, en essayant auparavant le charbon relativement à l'électricité, puisque la

faculté de la conduire est concomitante à celle de conduire le calorique.

La propriété hygrométrique du charbon est en raison inverse. Moins il a été chauffé, plus il absorbe d'eau; et s'il a été préparé avec un bois tendre, s'il est en morceaux et non en poudre, sa faculté absorbante se renforce encore.

La combustibilité du charbon, qui est sa qualité la plus importante pour les arts, ne peut manquer de dépendre aussi beaucoup du mode de carbonisation; mais l'auteur réserve ce sujet pour un autre mémoire, dans lequel il examinera également l'influence de la température sur les propriétés chimiques du charbon.

Il sera intéressant de rechercher de quelle façon la chaleur produit ces diversités, et si c'est par le plus ou moins de dissipation de l'hydrogène, par une réaction des sels contenus dans le charbon, ou seulement par une autre disposition des molécules charbonneuses.

La production de l'alcohol, ou ce que l'on nomme fermentation vineuse, s'établit dans un mélange de matière sucrée et d'eau, par le moyen d'agents d'une nature particulière connus sous le nom de *levûres;* mais on savait aussi que le gluten pouvait y exciter ce genre de mouvement, et M. Seguin a découvert la même propriété dans l'albumine.

M. Collin vient d'établir, par des expériences suivies, que toutes les matières animales peuvent produire le même effet; mais elles n'agissent que faiblement au bout d'un temps assez long, et à une température de 26 degrés et plus; tandis que la levûre de bière produit son effet presque instantanément, et à la température de 10 degrés. Cepen-

dant, lorsque cette première fermentation est amenée par une matière animale quelconque, il se forme un dépôt beaucoup plus actif, et qui a quelquefois tous les caractères de la levûre ordinaire. On soupçonne même que l'action des matières animales pourrait bien n'être pas immédiate, mais provenir de ce qu'en se décomposant elles auraient produit de la levûre.

M. Collin, ayant observé que la pile galvanique accélère beaucoup la fermentation, croit que c'est à l'aide de l'électricité que les matières animales exercent leur action.

MINÉRALOGIE.

Nous avons parlé diverses fois de l'iode, substance d'une nature fort particulière, découverte dans les varecs par M. Courtois, et dont la propriété la plus remarquable est que sa vapeur prend une couleur pourpre. On ne l'avait trouvée d'abord que dans quelques végétaux et quelques mollusques marins. M. Cantu en a trouvé des traces dans l'eau minérale d'Asti, et tout récemment M. Vauquelin vient de la découvrir dans un minerai d'argent du Mexique, nommé argent vierge de serpentine, et qui contient de l'argent, du soufre, du plomb et du carbonate de chaux. L'auteur est disposé à croire que l'iode y est spécialement combiné avec l'argent. Cela est d'autant plus vraisemblable, que l'iode, comme le chlore, a beaucoup d'action sur l'argent, et qu'on enlève à ce minerai une certaine quantité d'iodate d'argent par la simple ébullition avec l'ammoniaque.

On rencontre aux environs de Freyberg un minerai de fer

que l'on nomme, à cause de son apparence, fer résinite. L'analyse qu'en avait donnée feu M. Klaproth, le faisait considérer comme un sulfate de fer peroxidé; mais M. LAUGIER, qui en a fait l'objet de nouvelles recherches, y a découvert, indépendamment de l'eau et de l'acide sulfurique, la présence de l'acide arsénique. Le résultat de ses expériences est que 100 parties de ce minerai en contiennent 35 de peroxide de fer, 20 d'acide arsénique, 14 d'acide sulfurique et 30 d'eau, ce qui ne laisse qu'un 100me de perte. M. Stromeyer de Gœttingue, qui s'était occupé de son côté de la même analyse, mais dont M. Laugier ne connaissait pas le travail, était arrivé à des résultats tout semblables.

Nous avons bien des fois rapporté les analyses faites par les chimistes, des pierres tombées de l'atmosphère, mais on n'en avait pas encore donné un examen suffisant sous le rapport purement minéralogique.

M. de Humboldt a communiqué à l'Académie des observations faites par M. Gustave Rose de Berlin sur un grand échantillon de l'aérolithe de Juvénas. Ce savant minéralogiste est parvenu à en séparer des cristaux dont il a mesuré les angles avec le goniomètre à réflexion. Un de ces cristaux est la variété dioctaèdre, fig. 9, de la Minéralogie de Haüy. Ce même morceau renferme des cristaux hémitropes microscopiques, qui paraissent être du feld-spath à base de soude, c'est-à-dire de l'albite. M. Rose a examiné également, à la prière de M. de Humboldt, l'aérolithe de Pallas et les trachytes recueillis au Chimborazo et sur d'autres volcans des Andes. Il a reconnu que l'olivine de la masse de Pallas est parfaitement cristallisée, et que les trachytes des Andes sont en partie des

mélanges de pyroxène et d'albite, comme l'aérolithe de Juvénas et peut-être ceux de Jonzac et de Stannern, dont les tissus n'ont pas encore été assez examinés minéralogiquement par les moyens de la trituration, du microscope, et du goniomètre à réflexion.

On commence à découvrir de ces pierres qui paraissent être tombées anciennement, et qui sont restées isolées dans des endroits peu fréquentés.

M. de Humboldt a présenté à l'Académie, au nom de MM. Noggerath et Bischof, professeurs de chimie et de minéralogie à l'Université de Bonn, un échantillon d'une masse du poids de 3400 livres, trouvée à Bitbourg, près de Trèves, au haut d'une colline. Elle renferme du nickel et du soufre, mais pas de chrome ni de carbone.

M. de Humboldt a aussi communiqué à l'Académie des échantillons de séléniures, découverts par M. Zinke dans des filons du Harz oriental, et que M. Henry Rose à Berlin a analysés récemment. Ces minerais sont des combinaisons de selenium avec le plomb, le cobalt, le mercure et l'or.

Il existe dans les Andes de *Merida* un lac nommé *Laguna del Urao*, d'où les Indiens retirent des masses salines confusément cristallisées. MM. Rivero et Boussingaud, voyageurs dont nous avons plusieurs fois annoncé les travaux, en ont fait l'analyse, et ont trouvé que c'est un mélange de carbonate et de bicarbonate de soude entièrement semblable à celui des lacs de natron d'Égypte, tel qu'il a été analysé par Klaproth. Ses éléments sont dans la proportion de 0,39 d'acide carbonique, 0,41 de soude, 0,19 d'eau.

GÉOLOGIE.

Depuis que les géologistes se sont aperçus de la nécessité de connaître les faits avant de vouloir les expliquer, on s'attache de toute part à décrire la superposition des terrains dans les différents cantons, et à examiner s'il est possible de les ramener à des règles générales.

M. Basterot a étudié sous ce rapport une grande partie du sud-ouest de la France, et a commencé à présenter ses observations à l'Académie; il a traité d'abord des coquilles qui se trouvent à l'état fossile dans les diverses couches dont ces terrains se composent, et qui sont en effet l'un des moyens les plus efficaces d'en éclaircir l'histoire; mais l'auteur fait remarquer que cette partie de l'histoire naturelle vient à peine de naître. Dans l'édition du *Systema naturæ* publiée, en 1789, par Gmelin, il n'y a encore que cinquante-trois espèces de coquilles fossiles, et M. Basterot, qui a fait un catalogue de celles qui ont été décrites dans ces derniers temps, ou qu'il a vues dans les cabinets, les porte à plus de deux mille cinq cents.

L'auteur a remarqué dans la répartition de ces débris une loi qui paraît générale : c'est que plus les couches qui les recèlent sont anciennes, et plus la ressemblance des coquilles et des autres êtres organisés s'étend à de grandes distances; dans les couches superficielles, au contraire, les différences se multiplient avec les distances, et l'on ne trouve que peu de coquilles qui soient communes à des bassins très-éloignés.

Ainsi M. Basterot a recueilli dans les sables des Landes, aux environs de Bordeaux et de Dax, trois cent trente es-

pèces, dont cent dix environ ne se sont encore trouvées que dans cette circonscription, mais dont on retrouve quatre-vingt-onze dans les terrains d'Italie, soixante-six dans ceux des environs de Paris, vingt-quatre dans ceux de l'Angleterre, et dix-huit seulement autour de Vienne en Autriche.

L'action des mers actuelles jette sur l'un des bords de ce bassin des Landes, des dunes de sable qui s'avancent lentement vers l'intérieur des terres; mais le dépôt est très-borné, et fort différent du grand dépôt qui recouvre la surface du pays : car, parmi les trois cent trente coquilles fossiles, il n'y en a que quarante-cinq auxquelles on puisse trouver quelque analogie avec celles des mers voisines, même en y comprenant la Méditerranée.

Ce travail de M. Basterot a eté imprimé dans le recueil entrepris par de jeunes et zélés naturalistes, et dont il a déja paru six ou sept volumes, sous le titre d'*Annales des sciences naturelles.* Il y est accompagné de plusieurs planches lithographiées, où les espèces nouvelles sont représentées avec beaucoup d'exactitude, et qui contribueront avec celles que donne M. Deshayes sur les coquilles des environs de Paris, avec le grand ouvrage de M. Brocchi sur celles d'Italie, et avec les planches de plusieurs Mémoires de MM. Brongniart, Prevost, de Férussac, à former bientôt un corps très-complet sur la conchiliologie fossile.

M. le comte Fossombroni, premier ministre du grand-duc de Toscane, qui a rendu de si grands services à son pays en desséchant par les procédés les plus ingénieux une contrée que la stagnation de la Chiane ou du Clanis avait, depuis des siècles, rendue inhabitable, y a fait en même temps des ob-

servations d'un grand intérêt pour cette partie de la géologie qui traite des changements que la surface de la terre a éprouvés depuis les temps historiques. Le monde savant les connaît par le grand ouvrage sur le val de Chiane que M. Fossombroni a publié en 1789, et dont il vient de donner une nouvelle édition. D'un passage de Strabon, où il est dit qu'avant d'arriver d'Arezzo à Pise, l'Arno se divise en trois branches, l'auteur avait conclu que, dans l'antiquité, l'Arno donnait un bras qui aboutissait à la Chiane ou au Clanis, et qui coulait du nord au midi vers le Tibre, au lieu qu'aujourd'hui la Chiane coule du midi au nord et tombe dans l'Arno. Pour expliquer ce changement dans le cours des eaux, il suppose qu'ensuite leur communication a été interrompue, et qu'il y a eu entre les deux rivières, pendant un certain temps, un espace plus ou moins marécageux, mais que l'Arno s'étant graduellement abaissé en creusant toujours davantage le terrain, la Chiane rompant les obstacles qui les séparaient, s'y est réunie de nouveau, dans une autre direction, et qu'au lieu d'en recevoir une partie des eaux, elle lui a porté les siennes.

M. Fossombroni a été assez heureux pour trouver une carte dessinée au XIIIe siècle, dans laquelle le cours de la Chiane est encore marqué comme se dirigeant du nord au midi, ce qui a donné une pleine confirmation à sa conjecture.

Il a fait connaître ce document important dans un Mémoire particulier, qui est inséré parmi ceux de la société italienne de Modène, et qui est à la fois une pièce pleine d'intérêt pour l'histoire et pour la géologie.

M. de Humboldt, toujours occupé de comparer sous un grand nombre de rapports les principales chaînes de mon-

tagnes du globe, a présenté des profils de plusieurs de ces chaînes, tracés d'après la méthode graphique qu'il a employée le premier dans son grand ouvrage sur l'Amérique, et les a accompagnés de détails sur les dimensions de ces chaînes, leur composition géognostique, et les phénomènes météorologiques qu'elles présentent. Il a pris surtout beaucoup de peine pour arriver à quelque certitude relativement à l'excessive hauteur de quelques-unes des cimes de l'Himalaya. L'une d'elles, le pic de *Jawahir*, surpasse de 676 toises le sommet le plus élevé des Andes; et il en existe un autre encore plus élevé, nommé par les indigènes *Dhawalagiri*, ce qui signifie exactement *Mont-Blanc*. Deux opérations différentes lui assignent, à douze toises près, la hauteur prodigieuse de 4,390 toises.

En comparant les sommets les plus élevés des montagnes de l'Europe, de l'Amérique et de l'Asie, on trouve qu'ils sont comme les nombres 10, 14, 18, 24.

En comparant la hauteur moyenne des crêtes, on trouve que dans presque toutes les chaînes elle est à celle des sommets comme 1 à 1 $\frac{8}{10}$, ou comme 1 à 2. Dans les Pyrénées la différence est beaucoup moindre, et même la hauteur moyenne de la crête des hautes Pyrénées est supérieure à celle des hautes Alpes, tandis que les sommets de la première chaîne sont loin d'atteindre ceux de la seconde. La proportion de la crête aux sommets n'est donc dans les Pyrennées que d'1 à 1 $\frac{1}{2}$.

D'après les recherches exposées dans ce Mémoire, la hauteur moyenne des continents au-dessus du niveau des mers est limitée entre 120 et 160 mètres.

La chaîne de l'Himalaya ne diffère pas moins de celle des

N 2.

Andes par la nature minéralogique de ses masses que par son élévation. Dans les Andes dominent les porphyres, ou les trachytes et les phonolites du terrain basaltique, toutes roches qui paraissent soulevées ou altérées par le feu. On les voit percer, dans un point seulement, les roches appelées communément primitives. Celles-ci dominent, au contraire, dans l'Himalaya : il se compose de granite, de gneiss, de mica-schiste avec disthène, et de ces amphibolites que l'on désigne vulgairement par le nom de grünstein primitif. Les environs du lac Mahasarowar et du glacier des sources du Gange offrent une ressemblance frappante avec la constitution géognostique des Alpes aux environs du Saint-Gothard.

Les neiges perpétuelles commencent, sur le Chimborazo, à la hauteur du Mont-Blanc, ou à 2,460 toises; mais sur la pente boréale de l'Himalaya, elles ne commencent qu'à 140 toises plus haut : circonstance qui tient au rayonnement de la chaleur des plateaux élevés de l'Asie, ainsi que nous l'avons dit, d'après l'auteur, dans notre analyse de 1821.

Quant aux végétaux, M. de Humboldt fait remarquer qu'il ne faut pas trop généraliser l'analogie entre ceux des terrains voisins des neiges perpétuelles dans la zone torride et dans les régions circompolaires. La distribution plus égale de température pendant le cours de l'année, rend les premiers plus semblables à ceux des pays tempérés; les formes des plantes alpines du Chimborazo et de l'Antizana ont une physionomie en quelque sorte européenne.

ANATOMIE ET PHYSIOLOGIE VÉGÉTALES.

Chacun a pu remarquer que les vieux arbres peuvent perdre leur moelle sans en périr, et il n'est personne qui n'ait vu des troncs d'ormes ou de saules creusés par la pourriture de tout leur intérieur, et n'en produisant pas moins chaque année des feuilles et des branches. Mais M. Dupetit-Thouars désirait de savoir s'il en était de même dans les jeunes pousses dont la moelle est encore verte et enveloppée seulement d'une couche ligneuse tendre, et il éprouvait quelque embarras sur la manière la plus concluante de faire cette expérience, lorsqu'un petit insecte, le *callidium populeüm*, lui a donné une solution du problème. C'est un coléoptère dont la larve se loge dans l'épaisseur des jeunes pousses du peuplier blanc, en dévore la moelle et en écarte les parois ligneuses et corticales, de manière à produire dans la pousse un renflement dont les traces subsistent pendant quelques années. Ces pousses ne souffrent pas sensiblement de l'altération que cet insecte leur fait éprouver dans une partie que l'on pouvait croire si essentielle.

On sait depuis long-temps que plusieurs des parties des végétaux sont essentiellement de même nature et peuvent se changer les unes dans les autres; que les étamines se changent en pétales dans les fleurs doubles, que les pétales se changent en feuilles, que les pistils eux-mêmes prennent cette forme; et Linnæus, dans une belle dissertation, a établi sur ces faits une théorie d'après laquelle la fleur tout entière n'est que le développement simultané de toutes les parties

d'une branche et le bourgeon à fleur ne diffère du bourgeon à bois que par une vie plus prompte et plus concentrée.

M. Raspail, jeune botaniste, dans un grand travail sur les graminées, a été conduit à étendre cette théorie jusqu'à la graine elle-même. Selon lui, l'embryon ne serait qu'une sommité de rameau, que l'action du fluide du pollen a détachée du cône qui le supportait, et laissé renfermé dans la cavité de la feuille, à l'aisselle de laquelle il appartenait, feuille dont le tissu cellulaire en se gonflant lui sert de périsperme; le style et le stygmate ne sont qu'un développement incomplet du chaume de ce bourgeon. La fécondation dans les végétaux n'est qu'un isolement; tout bourgeon contient l'équivalent d'une graine; et toute la plante se réduit primitivement à un cône ascendant, à un cône descendant, et à une articulation qui est le foyer et le centre de leur action et de leur existence.

Cette théorie repose sur des observations nombreuses et curieuses, relatives aux parties de la fleur dans les graminées, et sur des hypothèses ingénieuses par lesquelles l'auteur cherche à expliquer leur origine et les particularités de leur structure.

Ainsi la paillette supérieure de ces fleurs a tantôt les nervures en nombre pair, tantôt en nombre impair; et dans le premier cas, l'épillet auquel elle appartient a toujours plusieurs fleurs. Au contraire, dans le second cas, il n'y a qu'une fleur: d'où M. Raspail conclut que cette nervure impaire est le pédoncule d'une fleur avortée. Il a trouvé une confirmation sensible de cette conjecture dans cette variété de l'ivraie, que l'on appelle *lolium compositum*, et dont l'épi est changé en partie en panicules. Les axes des épillets ainsi surajoutés,

y sortent de la base des paillettes, et ne sont que des développements de leurs nervures médianes.

L'auteur suit cette idée dans la graine qui germe. Le cotylédon lui paraît jouer, à l'égard de la première feuille, le même rôle que le chaume à l'égard de la première feuille du bourgeon, ou que le pédoncule de la seconde fleur, à l'égard de la paillette à nervures paires de la première : il en est la nervure médiane détachée; il représente, au milieu du périsperme farineux, le chaume encore renfermé dans la feuille qui lui sert de spathe.

Les filaments des étamines paraissent à M. Raspail les nervures des valves du calice, et les anthères des portions de ces valves remplies de pollen, lequel ne consisterait lui-même qu'en cellules injectées et isolées. Les petites écailles placées entre les étamines, et que plusieurs ont nommées pétales, seraient les débris de ces mêmes valves du calice.

BOTANIQUE.

M. Gaudichaud, l'un des naturalistes qui ont accompagné M. Freycinet dans son expédition autour du monde, et qui est chargé de rédiger dans la relation de ce beau voyage la partie botanique, a présenté à l'Académie une flore des îles Malouines.

Situées entre le 51e et le 52e degré 30 minutes de latitude sud, ces îles sont sujettes à des hivers très-longs et très-rigoureux, pendant lesquels la terre est chargée d'une neige épaisse. Le climat en est extrêmement humide. Les côtes sont bordées de rochers et de dunes, et l'intérieur composé de montagnes peu élevées et de plaines couvertes de lacs et de

marais. Le sol est une tourbe spongieuse qui s'étend sans interruption sur les plaines et les montagnes, et qui se refuse à toute culture : aussi les diverses colonies européennes qui ont tenté à diverses reprises de s'établir dans ces îles, se sont-elles vues obligées de les abandonner. Néanmoins ce sol produit beaucoup de plantes, mais qui appartiennent à des espèces peu nombreuses. Il n'y vient pas un arbre ; et l'arbrisseau le plus élevé, la *veronica decussata* de Wildenow, ne s'y élève pas au-dessus de six pieds. L'une des espèces les plus remarquables est une graminée (*festuca flabellata* de Lamarck), dont les feuilles s'étalent en éventail comme celles des *iris*, et dont la tige vers sa base a le goût savoureux du chou-palmiste.

M. Gaudichaud annonce que, malgré la pauvreté de leur végétation, les Malouines possèdent plus de 40 espèces qui n'ont pas encore été trouvées ailleurs.

Les familles dominantes sont les lichens, les fougères, les mousses, les cypéracées, les graminées, les synanthérées et les renonculacées.

Nous regrettons que les bornes prescrites à notre travail ne nous permettent pas d'entrer dans les détails des espèces décrites par l'auteur, et des particularités qu'il en rapporte ; mais les botanistes trouveront bientôt ces résultats intéressants dans la suite du bel ouvrage où sont consignés tous ceux de l'expédition de M. Freycinet.

Nous regrettons également de ne pouvoir donner assez d'étendue à l'analyse du grand travail de M. Adrien de Jussieu sur la famille des *rutacées*. L'examen qu'il a fait du plus grand nombre des espèces connues, les dessins exacts qu'il a

donnés de leurs fleurs et de leurs fruits, et les rapports nombreux qu'il a saisis entre leurs différents groupes, donnent une grande importance à cette dissertation. L'auteur y divise les rutacées en cinq groupes généraux.

Celui des zygophyllées est composé d'arbres, d'arbrisseaux et de plantes herbacées à feuilles composées et accompagnées de stipules. Les fleurs, toutes hermaphrodites, ont un calice à quatre ou cinq divisions, autant de pétales; des étamines hypogynes, en nombre double des pétales; un ovaire à deux ou cinq loges, renfermant deux ou un plus grand nombre d'ovules, une capsule également à deux ou cinq loges; autant de valves; une ou plusieurs graines dans chaque loge; l'embrion vert; les cotylédons foliacés; la radicule supérieure.

Celui des rutées se distingue des zygophyllées par ses fruits divisés en lobes; par l'embryon entouré d'un périsperme charnu; par les feuilles alternes, sans stipules, et parsemées de glandes, si l'on excepte cependant le peganum dont le fruit est entier, et dont les feuilles non glanduleuses sont accompagnées de stipules. Ce genre intermédiaire entre les deux groupes établit le passage presque insensible de l'un à l'autre.

Le groupe des diosmées le plus nombreux en genres et en espèces réunit des arbres et des arbrisseaux. Leurs fleurs hermaphrodites régulières et irrégulières ont un calice à quatre ou cinq divisions, quatre ou cinq pétales, libres ou soudés; les étamines hypogynes en nombre égal ou double de celui des pétales, quelquefois moindre; un ou cinq ovaires, deux ovules dans chaque loge; la capsule composée de coques réunies ou distinctes; l'endocarpe cartilagineux, bivalve, se sé-

parant du sarcocarpe à la maturité; une ou deux graines dans chaque loge ; les feuilles parsemées de glandes. M. de Jussieu divise les diosmées en quatre sections.

Les zanthoxylées, qui forment le quatrième groupe, sont des arbres et arbrisseaux à feuilles alternes ou opposées, simples ou composées, souvent parsemées de points glanduleux. Leurs fleurs régulières et unisexuelles ont un calice à quatre ou cinq divisions, des pétales en pareil nombre, quelquefois nuls; quatre ou cinq étamines dans chaque fleur mâle, avec un rudiment de pistil. Les fleurs femelles ont souvent des étamines stériles. L'ovaire est simple, à deux ou cinq loges, surmonté d'un style, ou bien multiple, avec autant de styles que d'ovaires; deux ovules dans chaque loge, dont un avorte souvent; le fruit capsulaire ou charnu, la graine entourée d'une enveloppe cassante, un périsperme, la radicule supérieure.

Le cinquième groupe, celui des simaroubées, a pour caractères des fleurs hermaphrodites, rarement unisexuelles, des calices à quatre ou cinq divisions, autant de pétales et d'étamines, dont la base de chaque filet s'élargit en forme d'écaille; quatre ou cinq ovaires, contenant chacun un ovule, la graine recouverte d'une enveloppe membraneuse, les cotylédons épais, la radicule supérieure, point de périsperme : les tiges ligneuses; les feuilles le plus ordinairement composées et non ponctuées.

L'auteur rappelle, à la fin, quelques genres dont l'affinité avec les rutacées lui paraît encore douteuse, et qui doivent être soumis à un nouvel examen.

On voit, d'après ce qui vient d'être exposé, que la famille des rutacées, formée d'un grand nombre de divisions et

sous-divisions liées les unes aux autres par des affinités réciproques, a peu de caractères communs à tous les genres dont elle se compose, et qu'on ne peut conséquemment la définir avec une grande précision.

Il n'est pas possible non plus de ranger ces genres à la suite les uns des autres dans une série linéaire, et c'est ce qui a déterminé l'auteur à tracer une sorte de réseau sur lequel, autour du principal genre de chaque division générale, il a placé ceux qui ont avec lui le plus d'affinité, mais de manière à indiquer aussi les rapports qu'ils ont avec d'autres genres.

Ce qui est très-remarquable, c'est que ces divisions et subdivisions, établie ssur des caractères botaniques, se trouvent en rapport avec la distribution géographique des plantes dont elles se composent.

Les subdivisions des diosmées, par exemple, habitent l'une exclusivement dans l'Amérique équatoriale, l'autre à la Nouvelle-Hollande, une troisième au cap de Bonne-Espérance, et une quatrième au midi de l'Europe. Cette dernière est celle qui a le plus de rapport avec les rutacées, et les rutacées habitent également le midi de l'Europe. Les simaroubées sont indigènes de l'Amérique équatoriale, et c'est de la division des diosmées américaines qu'elles se rapprochent le plus.

Plusieurs plantes médicinales, mais dont les propriétés sont fort variables, appartiennent à cette famille. Tels sont le *gayac*, la *rue*, le *zantoxylum*, le *cusparia febrifuga*, dont l'écorce est connue dans les pharmacies sous le nom d'*augustura;* le *simarouba*, le *quassia amara;* et elle réunit aussi des plantes d'agrément, comme la fraxinelle et plusieurs

diosma du cap, remarquables par l'élégance de leurs formes et de leurs fleurs.

Le *cycas* est un arbre des Indes, très-remarquable par sa moelle qui donne une sorte de sagou très-nourrissante, et par ses fruits qui, mangés sans précaution, sont un puissant vomitif, mais qui deviennent un aliment salubre par la macération, et sont la nourriture obligée des Malais pendant les funérailles de leurs proches. Ses feuilles ressemblent à celles des fougères, mais ses organes de reproduction sont tellement singuliers, que l'on hésite depuis long-temps sur la place que l'on doit lui assigner dans le règne végétal.

M. Robert Brown en fait une famille particulière qu'il range entre les monocotylédones et les dicotylédones. M. Dupetit-Thouars, qui l'a beaucoup étudié à l'île de France, lui trouve beaucoup d'analogie avec les osmondes.

Cet arbre a été le sujet des observations de M. Gaudichaud.

Il nous apprend qu'il repousse non-seulement de boutures, mais par de simples rondelles ou des fragments coupés sur les têtes des jeunes plants, et qu'il n'est pas même nécessaire d'enterrer, mais qui, disséminées à la surface du terrain, poussent promptement des racines. Ce sont des espèces de bourgeons endormis. Le tronc se ramifie comme celui du dracœna et du palmier-doum. Les naturels de certaines îles à qui le sagou de cycas sert de principal aliment, après l'avoir extrait de l'arbre, le macèrent dans l'eau, et ensuite le font sécher sur des feuilles de palmier. Les spadices des individus femelles sécrètent une espèce de gomme très-semblable à celle que l'on nomme adragant, et qui sort d'un

astragale ; et, selon M. Gaudichaud, il est tel arbre dont on en retirerait cinq et six livres pesant.

L'auteur croit en conséquence que le cycas pourrait être cultivé avec avantage dans nos colonies.

M. Dupetit-Thouars a annoncé à ce sujet que, dans son opinion, le sagou est une production commune à beaucoup de fougères et de palmiers, et peut-être à toutes les plantes monocotylédones.

Il croit même qu'on pourrait trouver un sagou indigène dans le blanc de l'asperge.

Cette moelle diffère de la fécule des dicotylédones, de celle des pommes de terre, par exemple, principalement à cause de la présence de ce gluten animal qui caractérise aussi la farine des céréales.

M. Lamouroux, professeur à Caen, que les sciences ont perdu cette année, avait présenté peu de jours avant sa mort à l'Académie, dont il était correspondant, un grand travail sur la distribution géographique des plantes marines. Elles sont réparties d'après des règles fort semblables à celles qui régissent la distribution des plantes terrestres. Celles des côtes de l'Amérique méridionale, par exemple, diffèrent de celles de l'Europe et de l'Afrique tout autant que les plantes de la surface de ces deux continents.

Il y a dans la mer comme sur la terre de grandes contrées qui ont chacune en propre leur système de végétation. Ainsi l'Océan septentrional, depuis le pôle jusqu'au 40e degré de latitude nord, la mer des Antilles, y compris le golfe du Mexique, les côtes orientales de l'Amérique du sud, celles de la Nouvelle-Hollande, celles de la mer des Indes, la

Méditerranée et ses divers golfes, la mer Rouge, etc., offrent autant de grandes régions marines à végétation particulière.

Les plantes marines sont ainsi confinées dans certaines régions par des causes analogues à celles qui limitent ou qui favorisent l'extension des plantes terrestres: la nature du sol et des roches, les proéminences des terres, la profondeur de l'eau, les courants, la quantité de l'eau douce que les fleuves jettent dans certaines plages. Les stations de ces végétaux aquatiques sont encore très-dignes de remarque. Il y en a, par exemple, qui s'établissent constamment dans les lieux que la marée couvre et découvre chaque jour, d'autres dans ceux qu'elle ne découvre qu'aux syzygies ou même qu'aux équinoxes; il en est enfin qui veulent toujours être cachés sous les eaux.

Dans certaines espèces, les individus vivent rapprochés en société et couvrent de grands espaces; dans d'autres, les individus vivent épars et mêlés parmi des espèces différentes.

Les plantes marines que la même saison voit naître et mourir se plaisent dans la zone polaire; les plus ligneuses sont plus multipliées entre les tropiques.

Au reste, l'auteur ne donne pas encore ces règles comme immuables; et en effet, l'on ne connaît pas à beaucoup près l'histoire des plantes marines autant que celle des plantes terrestres; on n'a décrit jusqu'à ce jour que 1,600 espèces des premières, et il s'en faut de beaucoup que l'on ait pu suivre chacune d'elles dans tous les lieux où elle peut exister.

M. Delise a continué l'histoire des lichens, dont nous

avons annoncé les premières parties en 1823. Il traite, dans un deuxième Mémoire, du genre *roccella,* auquel appartient l'orseille des teinturiers. Ses espèces ne croissent que sur les rochers des bords de la mer, et se rapprochent des fucus par la forme alongée de leurs rameaux et par l'empatement qui les fixe à la pierre. Elles sont bien moins nombreuses que celles du genre *licte,* et l'auteur n'en connaît que sept qu'il décrit avec beaucoup de soin.

M. Delille, professeur à Montpellier, et correspondant de l'Académie, lui a fait connaître un accident, arrivé dans la ville où il réside, et qui prouve de plus en plus combien il faut se défier des champignons sauvages. Deux personnes y sont mortes pour avoir mangé des champignons pris dans une quantité dont le reste fut mangé sans inconvénient par une autre famille. L'*agaricus bulbosus*, espèce très-dangereuse, se trouvait dans les deux portions; et ceux qui l'avaient fourni en faisaient usage depuis long-temps sans en souffrir. M. Delille attribue cette différence à celle de la préparation; le sel, le vinaigre, l'ébullition, la pression, neutralisent quelquefois dans un champignon ses qualités vénéneuses, et font illusion sur le danger qu'il peut faire courir, si on le mange sans avoir au préalable employé les mêmes moyens.

Les belles collections qui enrichissent la botanique ont continué avec le même succès. Les *Nova genera* et *Species* de MM. de Humboldt et Kunth sont terminés avec le septième volume. Les trois collections que publie M. Auguste de Saint-Hilaire se continuent heureusement. Sa Flore du Brésil en est au quatrième fascicule; son Histoire des plantes les plus re-

marquables de ce pays au cinquième, et il y en a déja huit de ses plantes usuelles des Brasiliens. Le respectable M. Paulet, le doyen des botanistes, a donné encore deux cahiers de ses Champignons; et M. le chevalier Smith, correspondant, a publié le troisième volume de sa Flore anglaise. Je n'ai pas besoin de dire qu'il m'est impossible d'indiquer même en abrégé toutes les observations neuves dont, par leur nature, de tels ouvrages sont nécessairement remplis. Il me suffira donc d'en avoir rappelé les titres.

ANATOMIE ET PHYSIOLOGIE ANIMALES.

Nous avons consigné, chaque année, avec beaucoup de soin dans nos analyses les diverses tentatives de M. Geoffroy-Saint-Hilaire, pour trouver une composition identique dans le squelette des animaux, et particulièrement dans celui de leur tête; et nous avons surtout rendu compte avec détail, dans celle de 1824, du Mémoire où il établissait que toute tête est composée essentiellement de soixante-trois pièces qui se laissent distribuer neuf à neuf et représentent ainsi sept vertèbres placées à la file des unes des autres.

Il admet même aujourd'hui que la pièce impaire ou centrale de toute vertèbre, qu'il nomme cycléal, et qu'il désigne dans les vertèbres de la tête par la désinence générique de sphénal, est elle-même composée de quatre pièces plus petites qu'il nomme les ostéaux: ce qui porterait à quatre-vingt-quatre le nombre total des pièces d'une tête.

Dans le cours de l'année que nous venons d'indiquer, il publia trois rédactions successives de cette distribution, dont chacune offrait quelque différence, et depuis il en a déja

publié deux autres; à mesure qu'il étudie davantage cette matière, il se voit obligé de faire changer de place à quelque os particulier, soit pour le mettre dans une autre vertèbre, soit pour lui assigner un autre rôle dans la vertèbre à laquelle il appartient. Des études non moins suivies, non moins pénibles, lui sont nécessaires pour appliquer cette règle générale aux têtes des divers animaux; et comme il n'y trouve pas toujours sensiblement ce nombre normal de soixante-trois ou de quatre-vingt-quatre pièces, il se voit contraint de recourir à divers changements dans ses dénominations, et même à diverses hypothèses ingénieuses, pour y remettre l'accord, sans lequel la vue générale qui excite ses efforts ne pourrait se réaliser.

C'est ainsi que nous avons vu, l'année dernière, que dans un examen de la tête du crocodile, pour retrouver toutes les pièces du sphénoïde, il a cru devoir prendre pour la grande aile, ou ce qu'il appelle *ptéréal*, un os qui contient le vestibule du labyrinthe, et que d'autres anatomistes regardent comme le rocher; et qu'il a supposé qu'un os impair placé sur l'occiput et pris par ces mêmes anatomistes pour l'occipital supérieur, est formé de la réunion des deux rochers. Obligé alors de chercher ailleurs l'occipital supérieur, il a supposé, ou qu'il s'atrophie, ou qu'il se soude à l'occipital latéral.

Un os unique de chaque côté regardé comme l'analogue de la caisse du tympan, lui a paru devoir résulter de la réunion de trois pièces; et il lui a donné le nom commun d'*énostéal* qui ne figure point dans son tableau général, mais qui y est représenté par les trois noms particuliers du *tympanal*, du *serrial* et du *cotyléal*.

Dans les poissons, il voit quelquefois son jugal se diviser

en quatre, cinq ou six os: son cotyléal, son serrial s'y divisent chacun en deux, de sorte qu'en comptant le timpanal, cet enostéal qui ne faisait qu'un os dans le crocodile en fait cinq dans les poissons; au contraire, l'otosphénal et le basisphénal se soudent dans cette classe pour n'en faire qu'un; ses deux nazaux se soudent également; et même il y a un os, celui que d'autres anatomistes prennent pour le vomer, qui résulte de la réunion de trois, savoir, du rhinosphénal et des deux voméraux.

Ces dernières déterminations sont présentées dans un Mémoire sur les organes de l'odorat des poissons auquel nous reviendrons bientôt.

Celles des os du crocodile n'avaient été faites d'abord que sur des têtes de crocodiles proprement dits et de caïmans; en 1825, l'auteur a porté son attention sur celle des *gavials*, ou de ces crocodiles à long museau cylindrique, dont le Gange nourrit l'espèce la plus connue. Il a remarqué que l'os nommé jusqu'ici occipital supérieur et qu'il considère, ainsi que nous venons de le dire, comme une réunion des deux rochers, se montre dans la fosse temporale par une de ses faces, au-dessus de celui qu'il appelle *enostéal;* et que l'os qu'on appelait rocher et qu'il regarde comme la grande aile du sphénoïde, s'y découvre aussi dans le fond de la même fosse, en avant de l'enostéal un peu plus que cela n'a lieu dans les deux autres sous-genres; et ces circonstances lui ont paru confirmer les dénominations qu'il avait données à ces os.

Du fait bien connu que le long museau du gavial est formé principalement par les deux maxillaires, qui s'unissent l'un à l'autre sur sa longueur et séparent ainsi les intermaxillaires des os propres du nez, M. Geoffroy tire cette conclusion, que

l'on doit tracer entre les gavials et les crocodiles une ligne plus tranchée que celle qui sépare les crocodiles des caïmans. Il voudrait donc que les premiers formassent un genre, et les deux autres un second genre, divisé en deux sous-genres.

Il décrit en détail une protubérance charnue, particulière aux gavials, et qui forme à-la-fois sur leurs narines extérieures une espèce d'opercule et deux sortes de bourses. Il la croit formée d'un tissu analogue à celui que les anatomistes ont nommé *érectile*, et qui se trouve dans le mamelon du sein et dans les corps caverneux, et selon lui, ce tissu n'est qu'un plus riche développement de celui de la peau. Son opinion est que ces bourses des gavials ont pour usage de refouler, dans les voies de la respiration, l'air qui a été expectoré par les contractions de la poitrine, et d'établir ainsi, pendant que l'animal est sous l'eau, un mouvement de va et vient, qui dure tant que cet air n'est point assez vicié pour exiger une nouvelle inspiration. Il va jusqu'à croire qu'elles peuvent l'accumuler, le comprimer, et en faire pour l'animal, lorsqu'il veut plonger long-temps, une provision de voyage. C'est à rendre cette provision plus considérable que servent surtout les grandes vessies osseuses, décrites par M. Cuvier, qui dilatent les narines du gavial en arrière, et qui appartiennent aux ptérygoïdiens ou aux os que M. Geoffroy nomme hérisseaux.

De ces observations sur les gavials, M. Geoffroy passe à l'examen d'un crocodile fossile, trouvé aux environs de Caen. M. Cuvier, qui l'a décrit en 1824, a fait connaître qu'entre autres caractères, il a le canal nazal moins prolongé en arrière que les crocodiles et que les gavials, parce que ses os ptérygoïdiens ou hérisseaux ne se recourbent pas en dessous

pour entourer les arrière-narines, mais les laissent largement ouvertes comme dans la plupart des quadrupèdes. Sur cette particularité et sur quelques différences légères de proportion dans les os qui entourent la fosse temporale, M. Geoffroy voudrait aussi faire de cet animal un genre distinct, pour lequel il propose le nom de *teleo-saurus*, par lequel il cherche à exprimer les traits de ressemblance que ses arrière-narines lui donnent avec des animaux plus *parfaits* que les reptiles : avec les mammifères.

Il conjecture que les crocodiles fossiles des environs de Honfleur, que M. Cuvier a fait connaître, doivent avoir aussi quelque chose de particulier dans leurs arrière-narines, non pas qu'il ait vu cette partie de leur ostéologie, mais parce que les portions retrouvées jusqu'à présent lui semblent indiquer ces variations, et sur cette conjecture il propose d'en faire aussi un genre distinct, qu'il appelle *steneo-saurus*.

Depuis long-temps les géologistes se sont occupés de savoir si les êtres qui vivent aujourd'hui sur la terre sont des descendants modifiés par le temps et les circonstances de ceux dont on trouve les débris dans ses entrailles; et M. Geoffroy n'a pas manqué de traiter aussi cette question à propos de ces *teleo-saurus* et de ces *steneo-saurus ;* et quoiqu'il propose de faire de ces animaux des genres particuliers, comme les différences sur lesquelles ces genres reposeraient, portent principalement sur les formes de leurs arrière-narines, il croit que les espèces actuelles peuvent en descendre par une succession non interrompue, mais que de grands changements dans l'état du globe et de l'atmosphère ont pu amener par degrés des modifications dans ces organes à mesure qu'ils modifiaient la respiration et les autres fonctions.

Il assure même avoir observé dans une tête de crocodile embaumée dans les catacombes de Thèbes, des différences analogues à celles dont il est question, et notamment un orifice plus exigu aux arrière-narines, en sorte que, selon lui, les années écoulées depuis que le globe a pris sa forme actuelle, auraient été suffisantes pour introduire des variations importantes et permanentes dans l'organisation des êtres.

M. Geoffroy a porté ses vues d'unité et d'uniformité d'organisation jusque sur les organes qui semblent le plus différemment constitués selon les classes, je veux dire sur les organes de la respiration, fonction qui dans les animaux aquatiques s'exerce par des branchies, et dans les animaux terrestres par des poumons; il pense que les deux sortes d'organes existent à-la-fois dans tous, et que s'il y a des espèces qui ne peuvent vivre que dans un seul milieu et périssent lorsqu'elles sont plongées dans l'autre, c'est que leurs deux systèmes d'organes sont très-différemment développés, et que le plus élevé dans sa composition, suffisant seul à leur objet commun, laisse à l'autre la possibilité d'être employé à des usages étrangers à cet objet. C'est ainsi que, selon lui, les pièces operculaires qui dans les poissons donnent issue à l'eau des branchies, se rapetissent dans les mammifères, y pénètrent dans l'oreille, et ne servent plus qu'à communiquer les vibrations de l'air au nerf auditif. Il a cru trouver une confirmation marquée de cette idée dans une espèce d'écrevisse de la mer des Indes, qui se porte à terre et grimpe même aux arbres pour en dévorer les fruits, et que les naturalistes récents ont nommée *birgus-latro*. Son corselet est très-renflé sur les côtés, beaucoup plus qu'il ne faut pour loger ses branchies; et la membrane qui le revêt intérieu-

rement est hérissée de filaments et de tubercules charnus ou cutanés, dans lesquels pénètrent des vaisseaux. Comme ce crustacé porte ses œufs dans cette cavité, on avait cru que l'appareil en question servait à leur donner attache; mais M. Geoffroy pense que c'est un appareil respiratoire, une espèce de poumon. Il étend cette conclusion aux autres crustacés. Quoique la membrane qui tapisse intérieurement cette partie latérale du corselet n'ait point de filaments, ni même beaucoup de vaisseaux, M. Geoffroy lui attribue aussi des fonctions respiratoires; il a même fait voir comment l'air s'y introduit par deux orifices, que ses bords laissent entre eux et le tronc de l'animal, au moyen des mouvements de certaines lames cartilagineuses qui adhèrent aux mâchoires, et passent sur les branchies qu'elles compriment lorsqu'il est nécessaire. En conséquence, l'auteur regarde les crustacés comme appartenant à ces êtres intermédiaires, où l'organe de respiration aérienne et celui de respiration aquatique sont tellement balancés qu'ils respirent dans l'air et sous l'eau.

Ces observations ont conduit M. Geoffroy à examiner ce qui se passe dans les narines des poissons, et à les comparer avec celles des animaux aériens, sous le rapport de la structure et sous celui des fonctions.

On sait qu'elles sont placées, dans cette classe, hors des voies de la respiration; que la membrane qui tapisse leur intérieur est plissée en un grand nombre de lames parallèles ou disposées en rayons; et que dans presque toutes les espèces elles ont deux orifices, dont l'antérieur a le plus souvent un rebord plus ou moins saillant, qui peut faire l'office d'une espèce de valvule.

M. Geoffroy pense que l'eau y pénètre par l'orifice postérieur, et en sort par l'orifice opposé; qu'il s'établit ainsi un courant sur les lames de leur intérieur; que ces lames qui ressemblent si fort à des branchies par leur structure, ont comme elles pour fonction de dégager l'air qui est contenu dans l'eau. Il soupçonne que c'est dans cet air que flottent les particules odorantes qui produisent la sensation.

La membrane interne des narines des poissons opèrerait donc une espèce de respiration aquatique, tandis que la pituitaire des animaux terrestres, à laquelle l'auteur trouve plus d'analogie avec la membrane interne des poumons, est plutôt disposée pour une respiration aérienne.

Dans le cours de cette recherche, M. Geoffroy est tombé encore sur une nouvelle détermination de quelques pièces osseuses. Celles que tous les anatomistes et lui-même avaient regardées comme les os propres du nez sont maintenant à ses yeux les cornets supérieurs, ou ce qu'il nomme *etmophysal;* et c'est dans un os impair que d'autres nomment ethmoïde, qu'il voit la réunion des deux os propres du nez. Les cornets inférieurs sont ce que l'on avait pris jusque-là pour les apophyses montantes des os intermaxillaires. C'est en partie ce qui l'a obligé à donner la cinquième rédaction de son tableau des os de la tête. Il pense que cette fois la fixation sera définitive.

En passant il a présenté une opinion particulière sur le jeu des narines des cétacées. A son avis, l'eau n'y monte point de la bouche, comme on l'avait pensé; elle s'y introduit par l'orifice extérieur; et la membrane plissée qui tapisse la poche qui est sous cet orifice, agit sur l'eau comme celle de l'intérieur des narines des poissons. Une cavité lisse, placée der-

rière ces bourses, ne reçoit que de l'air qui sert de provision à l'animal quand il plonge, disposition analogue à celle du gavial dont nous avons fait mention au commencement de cet article.

Toutes ces recherches n'ont pas empêché ce laborieux naturaliste de continuer celles auxquelles il se livre sur les monstres, et dont nous avons commencé à parler dès notre analyse de 1820. On sait que, reconnaissant l'espèce de régularité que la nature observe jusque dans ses déviations, il les a assujéties à une sorte de méthode, et les a classées en genres et en espèces. Les monstres qui n'ont point de cerveau forment son genre *anencéphale;* et dans un Mémoire présenté cette année à l'Académie, il en a décrit huit espèces, établies sur autant d'individus, qui offraient chacun quelque différence dans les détails de leur monstruosité. Il en attribue toujours la cause à quelque adhérence que l'embryon a contractée avec son placenta; et dans plusieurs des cas qu'il a observés, et où les téguments étaient suffisamment conservés, il a cru trouver la preuve de la justesse et de la constance de cette cause. Une cause plus éloignée lui a paru tenir, d'après les récits qui lui ont été faits, à des mouvements de surprise ou de frayeur éprouvés par la mère dans les commencements de sa grossesse.

Mais une monstruosité approchante des anencéphales, et qui en différait cependant par des caractères particuliers, lui ayant paru devoir tenir à d'autres causes, il a appris de la mère morte depuis, que cette déformation était due à des compressions excessives par lesquelles cette malheureuse avait cherché à détruire son fruit. L'auteur a nommé cette sorte particulière *thlipsencéphale* (cerveau écrasé). Le cer-

veau y était réduit aux hémisphères et à la glande pituitaire; on voyait des traces d'inflammation aux membranes, et le placenta était en partie squirreux; mais le crâne lui-même n'offrait point d'anomalies plus grandes que celles qui s'observent dans les monstruosités des genres voisins.

Un poulain nouveau-né a offert encore à M. Geoffroy un genre particulier de monstruosité qu'il nomme *hematocéphale.* Sa déformation avait été causée par un épanchement de sang en dedans des hémisphères cérébraux, du double plus considérable à gauche qu'à droite.

Ces travaux de M. Geoffroy-Saint-Hilaire s'appliquent particulièrement à la classe des monstres que l'on appelle *monstres par défaut.* M. le docteur Serre, dans un ouvrage qu'il a présenté en manuscrit à l'Académie, et qui est intitulé *Anatomie comparée des monstruosités animales*, embrasse aussi ceux que l'on nomme *monstres par excès.* La durée de leur vie est généralement plus grande que celle des monstres par défaut; plusieurs ont même vécu âge d'homme.

La comparaison des monstres de tont genre a conduit M. Serre à ce résulat général, que les monstruosités semblables coïncident toujours avec des dispositions semblables du système sanguin.

Ainsi les acéphales complets sont privés de cœur; les anencéphales, de carotides internes: ceux qui n'ont pas d'extrémités postérieures, n'ont pas d'artères fémorales; et ceux qui manquent d'extrémités antérieures, manquent aussi d'artères axillaires; il y a une double artère descendante dans les monstres doubles par en-bas, et une double aorte dans ceux qui le sont par en-haut.

M. Serre assure même que les parties surnuméraires, quelle que soit leur position à la périphérie du corps, doivent toujours naissance à l'artère propre à l'organe qu'elles doublent; qu'une patte antérieure surajoutée, par exemple, sortît-elle au-dessous du menton, reçoit une artère axillaire qui rampe sous la peau du cou pour aller vivifier ce membre insolite.

Il n'a trouvé aucune exception à cette règle dans les nombreuses monstruosités dont il a fait la dissection, et elle fait que ces sortes d'anomalies sont restreintes dans certaines limites: une tête, par exemple, ne se verra jamais implantée sur le sacrum, parce que ce trajet serait trop long et trop embarrassé pour les carotides ou les vertébrales surnuméraires.

Il en résulte aussi que ces organes surnuméraires ne peuvent être que des répétitions plus ou moins exactes des parties propres à l'animal dans lequel on les observe; qu'un monstre humain n'aura pas en plus des pieds de ruminant ou d'oiseau, et réciproquement; en un mot, que des personnes peu versées dans les connaissances anatomiques ont seules pu croire retrouver dans un monstre la combinaison de parties propres à diverses classes ou à diverses espèces.

On sent qu'il reste toujours à se demander pourquoi les artères se multiplient. Mais si l'ouvrage de M. Serre ne répond pas à cette question, il n'en présente pas moins un grand nombre de faits intéressants étudiés avec soin, et classés sous des lois qui commencent à mettre de l'ordre dans une matière dont on ne s'était pas occupé encore avec autant de méthode.

Un des problèmes les plus difficiles de la physiologie est l'explication du retour du sang vers le cœur au travers des veines dans la circulation, et la détermination des causes qui dilatent le cœur pour recevoir ce liquide. Au nombre de celles qui ont été proposées, se trouve la dilatation de la poitrine lors de l'inspiration, et la tendance au vide qui doit en résulter dans toutes les cavités particulières qu'elle contient; tendance qui, au moyen de la pression de l'atmosphère, doit faire porter le sang vers le cœur, tout comme elle précipite l'air dans le poumon. En effet, on a observé depuis longtemps que les grosses veines voisines du cœur se vident lors de l'inspiration, et se remplissent lors de l'expiration.

M. le docteur Barry a imaginé des expériences propres à rendre très-sensible cette disposition de toutes les parties de la poitrine à attirer par la dilatation les liquides avec lesquels elles communiquent. Un tube, dont une extrémité pénètre dans une veine, plonge par l'autre dans un vase rempli d'une liqueur colorée; à chaque inspiration l'on voit la liqueur monter avec force dans le tube; lors de l'expiration, elle reste stationnaire, ou même elle descend. Un effet tout semblable a lieu quand le tube pénètre immédiatement dans une des cavités pectorales et même dans le péricarde, ce qui prouve que le péricarde tend à se dilater par le soulèvement des côtes et du sternum.

Il en est nécessairement de même des veines et du cœur.

M. Barry étend cette conclusion à la lymphe et au chyle; mais la manière dont il l'applique à la circulation pulmonaire est plus compliquée, et suppose une connaissance de la disposition des parties, trop détaillée pour être donnée ici.

L'auteur est tellement convaincu que l'inspiration est la cause essentielle du mouvement du sang dans les veines, qu'il regarde l'application d'une ventouse sur une plaie récemment empoisonnée comme un moyen d'empêcher l'absorption de la substance délétère. Il assure avoir réussi à arrêter ainsi, ou du moins à affaiblir beaucoup, l'effet du venin de la vipère sur de petits animaux.

On comprend, au reste, aisément que dans les animaux qui respirent sans dilater leur poitrine, comme les grenouilles, les tortues, les mollusques, c'est par des causes différentes que le sang veineux doit être porté au cœur, et que, même si l'on admettait dans son entier la théorie de M. Barry, il faudrait en trouver pour ces animaux une théorie différente.

M. Desprets a fait imprimer une partie de ses recherches sur les causes de la chaleur animale, auxquelles l'Académie a décerné un prix en 1823. Déja dans notre analyse de 1822, nous avons parlé de celle de M. Dulong sur le même sujet, d'où il résulte que la respiration ne produit pas la totalité de cette chaleur. M. Desprets les confirme, et assure que dans aucune expérience la respiration ne produit ni moins de sept dixièmes, ni plus de neuf dixièmes de la chaleur totale de l'animal. Néanmoins elle est la principale cause du développement de cette chaleur: l'assimilation, le mouvement du sang, le frottement des différentes parties, peuvent, selon l'auteur, produire la petite partie restante. Il disparaît plus d'oxygène que n'en exige l'acide carbonique produit, et surtout dans les jeunes animaux ; et l'on peut croire qu'il est employé à faire de l'eau. Dans tous les mammifères et dans tous les oiseaux, la respiration exhale de l'azote, et en plus grande quantité dans les frugivores.

Spallanzani a prouvé que le têtard préexiste à la fécondation chez les femelles des batraciens. M. Dutrochet a cherché à découvrir la structure de ce fœtus préexistant à l'action fécondante du mâle. Selon lui, il est d'abord en forme de cloche ou d'hémisphère; il prend ensuite celle d'un sac globuleux, et n'offre aucune apparence de la forme symétrique binaire qu'il possédera après la fécondation, mais se présente à l'observation comme un simple sac contenant dans son intérieur la matière émulsive qui doit lui servir de nourriture après la ponte. L'aire circulaire blanchâtre qne l'on observe long-temps avant la ponte sur l'œuf de la grenouille, n'est autre chose que l'ouverture de l'anus du fœtus. Elle est d'abord de la largeur du diamètre de l'œuf, diminue peu à peu en se fermant comme celle d'une bourse par l'accroissement de ses bords, en sorte que, peu de jours après la ponte, ces bords juxtaposés forment l'anus du têtard. Étudiant l'œuf du crapaud après la ponte, M. Dutrochet a observé que le têtard, lorsqu'il a déja acquis un certain développement dans les membranes de l'œuf, n'a point encore de bouche; et il a vu cette ouverture se former par une scissure des téguments. M. Dutrochet conclut de ces faits que le fœtus tel qu'il préexiste à la fécondation dans les femelles des batraciens consiste dans un sac alimentaire, pourvu d'une seule ouverture qui sera dans la suite l'anus de l'animal parfait. Dans cet état, il ressemble autant qu'il est possible à un polype.

Depuis long-temps on a cherché à initier les gens du monde et les commençants, à une première connaissance de l'organisation du corps humain, par des représentations

en relief et en couleur de ses parties intérieures. La cire a surtout été employée à cet usage; et les belles préparations fabriquées en si grand nombre pour le cabinet du grand-duc de Toscane, sous les yeux de Fontana et de Fabbroni, ont donné beaucoup de célébrité à ce moyen, qui a depuis été employé en France avec encore plus d'art et de soin par feu Laumonier, correspondant de l'Académie à Rouen. Encore aujourd'hui Paris possède un artiste habile en ce genre, M. Dupont.

Mais la cire est cassante; elle se fêle et se décolore aisément; et il est difficile d'en faire des préparations susceptibles de se démonter. Le bois que Fontana avait essayé de lui substituer pour une grande statue dont toutes les parties étaient mobiles, n'a pas réussi, parce qu'il est trop hygrométrique et trop peu flexible.

M. Ameline, professeur à Caen, a imaginé une pâte de carton qui semble réunir toutes les qualités désirables; et M. Auzout a donné à l'emploi de cette substance, en la formant dans des moules, une très-grande précision. Si des artistes habiles s'occupaient de compléter l'imitation dans le détail, on aurait obtenu le moyen le plus commode non pas de montrer l'anatomie, qui ne peut véritablement s'apprendre que sur le cadavre, mais de donner à ceux qui n'ont pas besoin d'approfondir cette étude, quelques idées de l'admirable structure des corps organisés.

ZOOLOGIE.

Les naturalistes ont porté la distribution méthodique de

animaux à une si grande perfection, que les coupes fondamentales de zoologie ne paraissent guère susceptibles d'améliorations importantes, et qu'il ne semble plus possible d'innover utilement que sur les divisions inférieures. M. Latreille s'en est occupé sous ce rapport, dans un ouvrage publié cette année sous le titre de *Familles naturelles du règne animal,* et a cherché de plus à donner aux subdivisions qu'il établit des dénominations simples. Le règne animal lui paraît se diviser en trois grandes séries : les animaux vertébrés ; les animaux qui ont encore une espèce de cerveau, des ganglions placés au-dessus de l'œsophage ; enfin ceux qui n'ont point de cerveau, et dont les glanglions, lorsqu'on leur en a trouvé, étaient sous l'œsophage.

Parmi les vertébrés à sang chaud, il fait une classe particulière des quadrupèdes auxquels on n'a point découvert de mamelles, et que M. Geoffroy a nommés monotrèmes. Parmi les vertébrés à sang froid, il en fait une des reptiles appelés batraciens, et une autre des poissons à branchies fixes, tels que les raies et les chiens de mer. Il a donc sept classes de vertébrés au lieu de quatre.

Il en établit huit parmi les non-vertébrés munis d'un cerveau, qu'il nomme céphalidiens, parce qu'il sépare les insectes qui ont plus de six pieds, des autres ; les cirrhipèdes, des mollusques ; les vers intestinaux et les échinodernes, des zoophytes. Il forme même deux classes des premiers, suivant qu'ils ont des sexes ou qu'ils en manquent. Les mollusques de la famille des ascidies, que l'on voit si souvent réunis en animaux composés, lui paraissent devoir entrer dans la même classe que les échinodernes.

Ces classes sont toutes dénommées d'après leurs caractères,

et divisées en ordres et en familles, également fondés sur le plus ou moins de rapports qu'ont entre eux les genres qui les composent, et dénommés d'après des règles semblables.

On comprend que nous ne pouvons entrer dans un détail presque aussi infini que le règne animal, que cet enchaînement tend à représenter. Les naturalistes l'étudieront sans doute avec soin dans l'ouvrage où M. Latreille l'a consigné. Les innombrables êtres animés présentent une telle complication dans leurs rapports, que l'on doit accueillir avec reconnaissance tout essai où ils sont envisagés sous de nouveaux points de vue. Ce n'est qu'à force de tentatives de ce genre, que l'on peut se flatter d'approcher un peu de la connaissance d'un ensemble fait pour effrayer l'imagination la plus hardie.

Lors de l'arrivée des Espagnols en Amérique, les naturels possédaient déja des chiens, et de plusieurs sortes. M. Moreau de Jonnès a pensé que la détermination des races auxquelles ils appartenaient pouvait avoir de l'intérêt, et même contribuer à éclaircir le problème difficile de la population de ce continent. En conséquence il a soigneusement recueilli dans les auteurs les plus voisins du temps de la découverte, les descriptions qu'ils ont laissées des divers chiens indigènes.

Il trouve qu'il y en avait au moins six races, qu'il désigne par les noms de chien comestible, chien bossu, chien pelé, chien chasseur, chien péruvien, et chien arctique. Trois de ces races lui paraissent effacées par leur mélange avec les chiens apportés d'Europe; mais les trois autres existent encore. L'auteur regarde comme douteux qu'elles eussent la faculté d'aboyer, et même il y en avait une d'entièrement

muette; et si les races conservées aboient maintenant, c'est à leur mélange avec celles d'Europe qu'il attribue ce changement de voix.

Comme ces différents chiens n'étaient point concentrés dans certaines zones; comme il y en avait même jusqu'à quatre dans un seul pays, le Mexique; comme d'autres étaient confinés dans certaines contrées et sans communication, M. de Jonnès ne croit pas que l'on puisse attribuer leurs dissemblances à l'influence du climat, ni en général à des circonstances locales, et il se figure que c'étaient autant d'espèces originairement distinctes.

Il tire de leurs divers degrés de dispersion des conséquences intéressantes sur l'ancien état du Nouveau-Monde, les communications de ses peuples aborigènes, et l'habitation primordiale des quatre grandes familles dont il croit que ces peuples descendent.

M. Cuvier, qui travaille avec M. Valenciennes à une grande histoire des poissons où cette classe d'animaux sera considérée sous tous ses rapports et portée à plus de cinq mille espèces, a présenté, cette année, à l'Académie quelques échantillons de cet ouvrage.

Il a décrit un nouveau genre de poissons de la famille des perches, qu'il nomme *myripristis*, parce que ses sous-orbitaires, ses maxillaires, toutes ses pièces operculaires et toutes ses écailles sont dentelées en scie, et qui a surtout cela de remarquable que sa vessie natatoire est bifurquée en avant, et adhère par ses deux lobes à chacun des côtés de la base du crâne, qui est ouverte de manière que la vessie n'est séparée de la cavité qui contient le sac et les pierres de l'oreille

que par une membrane élastique, soutenue par quelques filets osseux. C'est un fait à ajouter à ceux que M. Weber a reconnus dans les carpes, touchant les rapports de la vessie natatoire avec l'oreille.

Le même auteur a présenté l'histoire d'une famille nombreuse de poissons des Indes, qui doivent à une organisation particulière de leurs os pharyngiens la faculté de vivre assez long-temps dans l'air, et qui rampent même sur la terre, à de grandes distances des eaux où ils naissent, au point que le peuple de ces contrées croit qu'ils tombent des nues. Théophraste en avait déja fait mention. Ce sont leurs os pharyngiens supérieurs, développés et divisés en feuillets et en cellules, qui leur procurent cette faculté en retenant une certaine quantité d'eau, qui arrose leurs branchies, préservées d'ailleurs du contact de l'air par la clôture exacte de leurs opercules. Un de ces poissons avait été nommé *perca scandens*, parce que l'on assure qu'il grimpe même sur les arbres du rivage. M. Cuvier a fait voir que l'on doit rapporter à la même famille les ophicéphales, les trichopodes, et jusqu'au gourami, ce poisson d'eau douce, si grand et si délicieux, que l'île de France a depuis long-temps reçu de la Chine, et dont les soins du gouvernement viennent d'enrichir Cayenne.

Le nom de céphalopodes a été donné par M. Cuvier à une famille de mollusques qu'il a établie, et dont le caractère principal consiste à avoir autour de la bouche des espèces de bras ou de pieds charnus, au moyen desquels ils nagent et ils rampent. Les seiches, les poulpes, les calmars en sont les espèces les plus connues; la jolie coquille en forme de

rouleau contourné en spirale, et divisé en petites chambres, que l'on connaît sous les noms de cornet de postillon et de nautile spiral, ayant été reconnue par Péron comme renfermée dans l'intérieur de l'un de ces animaux, on en a conclu que les innombrables coquilles fossiles, également divisées en chambres, telles que les cornes d'Ammon, les nummulaires ou pierres lenticulaires, ont aussi appartenu à des animaux céphalopodes. Comme elles ne se retrouvent pas vivantes dans nos mers, il était difficile de vérifier cette conjecture; mais on trouve dans le sable de plusieurs de nos côtes de très-petites coquilles, chambrées comme celles dont nous venons de parler, et dont il était possible d'observer les animaux.

M. Dorbigny fils, jeune naturaliste de la Rochelle, s'est livré à cette recherche; et autant que l'on en peut juger, d'après les dessins qu'il a faits au microscope de quelques-unes de ces espèces, il paraît bien que les animaux auxquels elles appartiennent ont en effet des bras ou tentacules sur la tête; et tout porte à croire qu'ils ont beaucoup d'analogie avec les grands céphalopodes connus. Le test de ceux que M. Dorbigny nomme foraminifères est renfermé dans le corps de l'animal, ou du moins recouvert totalement par une membrane. Ce corps prend quelquefois un volume considérable relativement à la tête qui est fort petite, et qui trouve un abri, aux moments de danger, dans les replis du corps. Les tentacules qui entourent la bouche sont nombreux, comme il paraît, d'après les figures de Rumphe, que le sont ceux du grand nautile.

Il est fort à désirer que l'auteur soit à même de continuer des observations qui sont pour l'histoire naturelle un besoin

des plus importants et des plus urgents, mais qui paraissent très-difficiles à cause de la promptitude avec laquelle les petits animaux meurent et se décomposent sitôt qu'on les sort de leur position habituelle. C'est seulement lorsqu'on aura achevé d'étudier leur organisation, que l'on pourra s'occuper utilement de leur distribution méthodique. Toutefois M. Dorbigny a aussi essayé d'en donner une distribution provisoire, commode pour mettre quelque ordre dans cette quantité prodigieuse de très-petites coquilles, dont les ouvrages de Plancus, de Soldani, et de Moll et Fichtel, faisaient déja connaître une grande partie, et que les recherches de M. Dorbigny viennent encore d'augmenter considérablement.

Ce naturaliste porte le nombre des céphalopodes grands et petits qu'il a examinés, à plus de six cents. On les avait avant lui distribués dans soixante-neuf genres, qu'il réduit à vingt-deux, mais auxquels il en ajoute trente-un nouveaux. Ces genres ont paru fondés sur des caractères précis, pris surtout de la coquille, mais tels qu'ils doivent être en rapport constant avec les animaux. Il a donné à son travail un prix tout particulier, en imitant en relief, mais sur de grandes dimensions, les formes de ces coquilles souvent microscopiques : ce qui procure un moyen facile, pour les professeurs, d'en démontrer, et pour les commençants d'en étudier les caractères. Ces représentations en donnent une idée plus exacte qu'aucune figure; mais comme elles ne peuvent être multipliées autant que des gravures, l'auteur a aussi préparé de très-beaux dessins, qui procureront un bel ornement à son ouvrage.

L'argonaute est un de ces mollusques céphalopodes qui se tient dans une coquille mince et élégante, de la forme d'une nacelle, et qui pratique une véritable navigation, s'élevant à la surface de l'eau, se servant d'une partie de ses bras pour ramer, et d'une autre pour gouverner, en ayant même deux qui sont dilatés à leur extrémité, et qu'il relève, dit-on, pour s'en faire une sorte de voile. Sa manœuvre est si remarquable, qu'elle a été connue et décrite dès le temps des anciens; mais il s'est élevé à son sujet, dans ces derniers temps quelques contestations. Sa coquille n'adhérant point à son corps par des muscles, n'ayant même aucune de ces empreintes musculaires que l'on voit dans d'autres testacés, quelques naturalistes en ont conclu qu'elle ne lui appartient pas, mais que c'est celle d'un autre mollusque inconnu, dont l'argonaute s'emparerait pour y faire sa demeure, comme l'écrevisse connue sous le nom de *bernard-l'ermite* s'empare des coquilles vides des turbo, des buccins et de plusieurs autres univalves.

M. de Férussac a combattu cette opinion; outre le peu de vraisemblance qu'une coquille si commune ne se soit jamais trouvée avec son véritable animal, il fait remarquer que le défaut d'empreinte musculaire servirait également de motif pour refuser cette coquille à tout animal quelconque, et qu'elle ne prouve rien de plus contre le mollusque qui l'habite constamment que contre tout autre.

L'usage des sangsues est devenu si général, qu'elles forment maintenant un article de commerce assez important. La fraude s'est mêlée quelquefois à ce commerce comme à tant d'autres; mais il est arrivé aussi que l'on a attribué à la fraude des accidents purement naturels.

MM. Pelletier et Huzard fils, chargés par le gouvernement d'examiner pourquoi certaines sangsues ne prennent pas à la peau, tandis que d'autres y font des plaies difficiles à guérir, ont présenté à l'Académie le résultat de leurs observations. Ils ont reconnu qu'il y a une espèce de sangsue, fort semblable à celle qu'on emploie, mais qui n'a pas de même les mâchoires armées de petites scies tranchantes et qui ne peut entamer la peau. Cette espèce de fausse sangsue, si l'on peut l'appeler ainsi, se nourrit d'aliments qu'elle avale, et son estomac est autrement fait que dans la véritable. M. Dutrochet avait déja décrit cet animal.

Quant au plus ou moins de rapidité de la guérison des plaies, on doit l'attribuer, selon les auteurs, au tempérament du malade, et aux procédés plus ou moins convenables que l'on emploie, soit pour placer les sangsues, soit pour leur faire lâcher prise.

On savait que les anciens Égyptiens portaient au cou, en manière d'amulettes, des simulacres de l'insecte connu sous le nom de *scarabée sacré;* mais nous avions ignoré jusqu'à présent qu'un autre insecte, très-différent du précédent et du genre des *circulio* ou *charansons* de Linné, et de la division de ceux avec lesquels on a formé depuis celui des *brachycères,* fût encore de nos jours l'objet d'une pareille superstition. C'est au courageux voyageur M. Cailliaud, de Nantes, qui a rendu des services si importants à la géographie et aux sciences naturelles, que nous devons cette connaissance. Les femmes nègres du royaume de Bertat, contrée située vers la jonction du Nil blanc et du Tourmal, portent ce petit animal au cou. Il paraît, d'après l'individu rapporté par ce voya-

geur, qu'on arrache d'abord à cet insecte la tête et les pieds; qu'on lui fait ensuite un trou sous le ventre, et qu'après l'avoir vidé, on y introduit une lanière de cuir préparée pour le suspendre. Sous le rapport de la consistance plus solide de son corps et de ses élytres, soudés et formant une voûte, cet insecte a sur le scarabée sacré, l'avantage de pouvoir se conserver plus long-temps, d'être ainsi plus portatif. Mais on ignore le motif du sentiment religieux que cette peuplade nègre a conçu pour cet insecte; car ses habitudes, à en juger d'après celles de ses congénères, sont très-différentes de celles du scarabée sacré. Il n'a avec le dernier d'autre analogie que de vivre à terre et d'être très-printanier.

M. Latreille a présenté à l'Académie une description de ce brachycère, qui se rapproche par sa taille et ses caractères de quelques espèces du cap du Bonne-Espérance, telles que le globosus, le verrucosus, etc. Celle-ci paraît inédite, et M. Latreille la désigne aussi par l'épithète de sacrée, brachycerus sacer. La description qu'il en donne fera partie de la relation du voyage de M. Cailliaud.

Tous les naturalistes connaissent les observations remarquables de Bonnet et de Degeer, par lesquelles il a été prouvé que les pucerons se reproduisent sans accouplement pendant plusieurs générations. Bonnet en a obtenu jusqu'à dix. M. Duvau a porté son attention sur ce genre singulier d'insectes. Il a constaté comme ses prédécesseurs cette succession d'accouplements par des pucerons vierges, et l'a conduite jusqu'à la onzième génération. Il croit même qu'avec des précautions on pourrait en obtenir davantage. Il a réussi à faire vivre une de ces mères jusqu'au quatre-vingt-unième jour,

tandis que leur vie ordinaire n'est que de trente. Tantôt les mères ailées lui ont donné des pucerons sans ailes, tantôt de ces dernières lui en ont donné d'ailés, sans qu'il ait pu découvrir de règles dans ces variations de forme, en sorte qu'il regarde l'histoire des pucerons comme entièrement à faire.

M. Bory de St-Vincent, dont nous avons plusieurs fois cité les travaux sur les animaux microscopiques, vient de publier une méthode complète de leur distribution. Commençant par les plus simples, par ces monades si petites, que, grossies mille fois, elles ne paraissent pas encore plus grandes que des piqûres d'aiguille, il passe par degrés à ceux qui ont une organisation plus compliquée, qui montrent des formes de vases ou de bourses; qui sont garnis de cils ou de poils, soit à leur surface, soit à leurs bords; qui sont munis de queue, ou même de membres, d'espèces de roues dentées ou vibratiles, et où l'on aperçoit même à l'intérieur une sorte d'estomac; et il marque pour chaque ordre, pour chaque famille les rapports que ces divisions semblent avoir avec des animaux plus volumineux, et qui peut-être, dit-il, ne nous paraissent mieux organisés que parce que leur taille nous permet de mieux distinguer leurs organes. Il porte le nombre de leurs genres à quatre-vingt-deux; et nous regrettons beaucoup qu'une analyse telle que la nôtre ne puisse entrer dans le détail de leurs caractères : mais comme l'ouvrage de M. Bory vient d'être imprimé, et que d'ailleurs il en donne le développement dans l'Encyclopédie méthodique et dans le Dictionnaire classique d'histoire naturelle, les naturalistes peuvent recourir à ces récits. Nous nous bornerons à ajou-

ter que M. Bory révoque fortement en doute que ce soient ces animaux qui donnent à l'eau de la mer cette phosphorescence que l'on cherche depuis si long-temps à expliquer. Il affirme que des eaux très-phosphorescentes qu'il a examinées avec soin ne contenaient aucuns de ces animaux; et qu'au contraire des eaux qui en fourmillaient ne donnaient aucune lueur.

Il reconnaît cependant que plusieurs grands zoophytes ou mollusques, les pyrosomes, certaines méduses, des beroés, etc., sont très-lumineux; mais la lumière qu'ils font jaillir se distingue aisément de celle qui, dans certains parages, éclaire toute la surface de la mer.

MÉDECINE ET CHIRURGIE.

Des plaies pénétrantes, des hernies étranglées et d'autres accidents peuvent ouvrir l'intestin en même temps que l'abdomen, et il arrive quelquefois que les bords de l'ouverture intestinale contractent de l'adhérence avec ceux de la plaie extérieure: c'est un bonheur pour le blessé, qui autrement aurait infailliblement succombé; mais c'est un bonheur chèrement acheté.

L'orifice qui se forme ainsi est ce qu'on nomme un anus accidentel ou contre nature; et comme il n'a pas le moyen de se tenir fermé, les matières fécales s'écoulent sans cesse, et cet écoulement devient un tourment affreux et continuel. La portion d'intestin placée en arrière de la plaie, ne servant plus, se rétrécit par degrés; celle qui est en avant se dilate au contraire, parce qu'elle doit remplir les fonctions du canal tout entier; il se fait entre elles un repli saillant

vers l'intérieur, une espèce de crête ou d'éperon qui empêche les matières de passer de l'une à l'autre, et les dirige vers le dehors; quelquefois même le bout de l'intestin supérieur se renverse en dehors comme un doigt de gant retourné. Depuis long-temps on a cherché à rétablir l'état naturel, en essayant de dilater la partie postérieure du canal, d'effacer l'éperon qui en ferme l'entrée, et de fermer l'orifice extérieur; et l'on y a quelquefois réussi, quoique bien rarement.

M. Dupuytren, par une longue étude de ce mal, et par des essais répétés, est parvenu à imaginer une méthode curative plus sûre que celles de ses prédécesseurs.

Elle consiste essentiellement dans la destruction faite avec art de la crête qui sépare les deux portions du tube intestinal, afin de faire une route libre de la portion supérieure vers l'inférieure.

A cet effet, M. Dupuytren a inventé un instrument qu'il nomme *entérotome*, composé de deux branches d'acier qui saisissent cette bride, et la compriment assez pour y détruire la vie, mais non pour la diviser immédiatement.

Il a décrit cet instrument avec beaucoup de soin, et donné les plus grands détails sur les procédés à suivre dans son application; deux guérisons très-complètes d'anus contre nature que la chirurgie, dans l'état où elle était, aurait incontestablement abandonnés à eux-mêmes, et dont M. Dupuytren a donné l'histoire, ont prouvé l'efficacité supérieure de cette méthode nouvelle.

Elle a été démontrée encore par ce résultat, que sur quarante-un malades, la plupart réputés incurables, M. Dupuytren, ou d'autres chirurgiens qui ont suivi sa méthode, sont parvenus à en guérir complètement vingt-neuf.

Nous avons parlé, dans notre analyse de 1822, des procédés par lesquels M. Deleau, soit en injectant la trompe d'Eustache, soit en perforant le tympan, est parvenu à débarrasser la caisse de l'oreille des matières qui l'obstruaient, et a guéri ainsi certaines surdités.

Ce médecin a présenté à l'Académie un jeune sourd-muet de naissance qui n'entendait pas les sons les plus violents, et qui a complètement recouvré l'ouïe par cette méthode; mais pour avoir acquis la faculté de percevoir des sons, cet enfant était bien loin encore de jouir de tous les avantages que le sens de l'oïue nous procure. Il lui a fallu une longue éducation pour apprendre à distinguer entre eux les divers sons, à savoir le sens qu'on y attache, et surtout à les imiter. Né de parents peu aisés, il n'avait malheureusement pas même reçu l'instruction dont il était susceptible, en sorte que le peu de développement de son intelligence augmentait les difficultés. Après trois mois, il n'avait encore appris que quelques mots simples; et lorsqu'il voulait en reproduire de plus compliqués, il faisait une multitude d'efforts, et remuait long-temps sans succès ses lèvres, sa langue et son gosier, à peu près comme un homme qui apprend à danser, n'exécute d'abord que des mouvements disgracieux. Il réussit mieux quand on lui eut appris à épeler, et l'on observa que ses organes suivaient plus régulièrement les signes visuels, auxquels il avait une fois attaché de certains sons, que les sons eux-mêmes prononcés devant lui. Encore aujourd'hui, semblable aux personnes qui apprennent une langue, et qui la lisent et l'écrivent long-temps avant de pouvoir s'en servir dans la conversation, il lit des yeux et écrit infiniment mieux qu'il ne parle.

Ce qui est aussi très-remarquable, c'est que, loin d'avoir abandonné son ancien langage, celui des signes, il l'a au contraire perfectionné, sans doute à cause des nouvelles idées que cette langue nouvelle, dont il n'aime point encore à faire usage, n'a pas laissé de lui faire acquérir.

M. Moreau de Jonnès a continué à suivre dans sa marche menaçante le *cholera-morbus*, ce fléau dont la puissance meurtrière n'avait pas eu, dit-on, d'exemple sur le globe, et qui a enlevé en sept ans plus de six millions d'hommes en Asie. Il conduit cette maladie pas à pas depuis Bombay, à Bassora et à Bender-Abassi, et de là au travers de la Perse et de la Mésopotamie jusque sur les côtes de la Méditerranée et sur celles de la mer Caspienne. Il donne pour chacun des lieux qu'elle a ravagés, la date précise de son irruption, sa durée, la mortalité absolue ou relative qu'elle a produite, et l'énoncé des circonstances qui ont semblé favoriser ou atténuer son pouvoir. Le gouvernement russe, et celui d'Égypte, menacés l'un et l'autre, ont eu communication de ce travail, et ont pris sans doute en conséquence des mesures propres à préserver l'Europe du danger que, selon M. Jonnès, elle courait sans presque s'en douter.

Le même officier, toujours occupé avec ardeur de prévenir l'irruption des maladies contagieuses, a publié une note sur les enquêtes officielles qui constatent cette qualité dans la peste et dans la fièvre jaune. On ne peut pas soutenir cette opinion plus vivement qu'il le fait, et cependant toutes les preuves qu'il a rassemblées n'ont point convaincu tous les hommes de l'art. Nous aurons occasion de dire par la suite

que, pendant une grande partie de l'année présente, on a encore présenté à l'Academie des Mémoires où l'on cherche à établir l'opinion contraire.

Dans cette perplexité, le gouvernement a embrassé le parti le plus sûr : c'est de continuer les mesures sanitaires ordonnées par les lois ; et c'est aussi à quoi il a été exhorté dans un rapport très-approfondi, fait au nom de la section de médecine par M. Dupuytren, et dont l'Académie a ordonné l'impression.

AGRICULTURE ET TECHNOLOGIE.

Dans le commerce des animaux domestiques, dans celui des chevaux surtout, l'acheteur est souvent à la merci d'un vendeur qui connaît et cache des défauts quelquefois assez grands pour ôter aux animaux toute leur valeur. Il n'est même pas rare de les voir succomber peu de temps après la vente par suite de ces affections antérieures. D'anciens usages et réglements avaient fixé quelques-uns des cas où ces défauts devaient être à la charge du vendeur et donner lieu à une résiliation du marché; mais cette matière était restée encore fort obscure, et beaucoup de cas étaient très-douteux. M. Huzard fils s'est occupé d'éclaircir ce sujet, et il y a fait une application utile des progrès de la science de guérir dans une de ses branches (la vétérinaire). Ce sera un grand service que ces progrès auront rendu à cette partie de la jurisprudence.

M. Moreau de Jonnès a fait imprimer un ouvrage qui a remporté, l'année dernière, un prix à l'Académie de Bruxelles, sur une question importante, dont nous avons déja eu l'occasion de parler : celle des changements produits par la des-

truction des forêts, dans l'état physique des contrées avoisinantes. On y trouve les faits recueillis par l'auteur relativement à l'influence exercée par les forêts sur la température des lieux, sur la quantité des pluies, sur l'humidité de l'atmosphère, sur l'abondance des sources et des eaux pluviales, sur la force et la direction des vents, sur la salubrité de l'air, sur la fertilité du sol, et enfin sur l'état social des peuples. Dans ses recherches, M. de Jonnès s'est aidé du secours combiné des sciences physiques et de l'histoire, et il a fait usage des observations que lui ont fournies ses voyages; il s'est appliqué surtout à substituer des déterminations expérimentales, des faits certains et concluants, et des termes numériques, aux aperçus vagues et aux considérations générales qui s'offrent plus facilement pour résoudre le problème.

Le même auteur a publié son ouvrage sur le Commerce au XIXe siècle, mentionné honorablement par la commission de statistique de l'Académie des Sciences, et couronné par l'Académie de Marseille. La première partie traite des causes et des effets de l'agrandissement du commerce; la seconde expose quelles sont les causes de sa décadence et quels en sont les effets. Dans la troisième partie, il recherche les moyens d'accroître et de consolider la prospérité agricole, industrielle, coloniale et commerciale de la France. Ce qui distingue particulièrement ce travail, c'est la méthode d'exposer les faits, le plus souvent par des termes numériques et des données positives, d'en tirer des résultats immédiats, et de faire l'application des principes qui en sortent nécessairement. M. de Jonnès a comparé la France et l'Angleterre sous le triple rapport du climat, du sol et de la population; il donne

des renseignements curieux sur la division des propriétés, le nombre des différentes classes d'habitants, la valeur absolue et relative de la production agricole et industrielle à des époques diverses, dans les principaux États de l'Europe. Dans ses recherches sur la consommation intérieure, il rapproche également de la nôtre celle des îles Britanniques; et il a recours à un parallèle semblable avec l'Espagne, la Russie et les États-Unis, pour jeter des lumières utiles sur plusieurs autres sujets. Le second volume, qui traite des moyens d'étendre les relations commerciales de la France dans les différentes régions du globe, peut être consulté avec avantage par les négociants qui projettent des expéditions de long cours.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE M. HAUY,

Prononcé dans la séance publique de l'Académie royale des sciences, le 2 juin 1823,

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE-PERPÉTUEL.

L'HISTOIRE des sciences présente quelques époques où l'esprit humain a semblé prendre un essor extraordinaire. Lorsque de longues années d'études paisibles ont accumulé les faits et les expériences, et que les théories qui avaient dominé jusque-là ne les embrassent plus, les idées que l'on se faisait de la nature deviennent en quelque sorte incohérentes et contradictoires; elles ne forment plus un ensemble, et de toute part l'on éprouve le besoin de trouver entre elles quelque chaînon nouveau. Un génie vient-il alors à naître, assez puissant pour s'élever à des points de vue d'où il saisisse une partie de ces rapports que l'on cherche, il inspire à ses contemporains un courage inconnu; chacun s'élance avec ardeur dans ce domaine, où de nouvelles routes viennent d'être tracées; les découvertes se succèdent avec une rapidité crois-

sante; on dirait que les hommes qui ont le bonheur d'y attacher leur nom appartiennent à une race privilégiée; leurs disciples, ceux dont la jeunesse a été témoin de ce grand mouvement, croient voir en eux des êtres supérieurs; et lorsque le temps arrive où ils doivent successivement payer le tribut à la nature, la génération qui demeure pleure en eux une race de héros qu'elle désespère de voir jamais égaler.

Telle a été incontestablement pour les sciences naturelles la fin du dix-huitième siècle.

Les lois du mouvement réduites à une seule formule; le ciel soumis tout entier à la géométrie; ses espaces s'agrandissant et se peuplant d'astres inconnus; la route des globes fixée plus rigoureusement que jamais et dans le temps et dans l'espace; la terre pesée comme dans une balance; l'homme s'élevant dans les nues, traversant les mers sans le secours des vents; les mystères compliqués de la chimie ramenés à quelques faits simples et clairs; la liste des êtres naturels décuplée dans tous les genres; leurs rapports établis d'une manière irrévocable sur l'ensemble de leur structure interne et externe; l'histoire même de la terre dans les siècles reculés étudiée enfin sur des monuments, et non moins étonnante dans sa vérité, qu'elle avait pu le paraître dans des conceptions fantastiques...; spectacle magnifique et inoui qu'il nous a été donné de contempler, mais qui nous rend aussi bien amère la disparition des grands hommes à qui nous en sommes redevables! Peu d'années ont vu descendre au tombeau les Lavoisier, les Priestley, les Cavendish, les Camper, les de Saussure, les Lagrange; et qui ne serait effrayé de l'accélération de nos pertes, lorsque quelques mois nous enlèvent Herschel et Delambre, Haüy et Bertholet, et qu'à

peine nos forces suffisent pour leur rendre dans le temps prescrit l'hommage qui leur est dû par les sociétés dont ils firent l'ornement?

On serait d'autant plus tenté de croire que M. Haüy éprouva cette influence irrésistible de son époque, que ce fut presque sans s'en être douté qu'il fut jeté dans une carrière à laquelle pendant quarante ans il n'avait point songé à se préparer. Au milieu d'occupations obscures, une idée vient lui sourire; une seule, mais lumineuse et féconde. Dès-lors, il ne cesse de la suivre; son temps, ses facultés, il lui consacre tout; et ses efforts obtiennent enfin la récompense la plus magnifique. Aussi nul exemple ne montre-t-il mieux que le sien tout ce que peut opérer de grand, j'oserais presque dire de miraculeux, l'homme qui s'attache avec opiniâtreté à l'étude approfondie d'un objet; et combien cette proposition est vraie, du moins dans les sciences exactes, que c'est la patience d'un bon esprit, quand elle est invincible, qui constitue véritablement le génie.

René-Just Haüy, chanoine honoraire de Notre-Dame, membre de cette Académie et de la plupart de celles de l'Europe et de l'Amérique, naquit à Saint-Just, petit bourg du département de l'Oise, le 28 février 1743. Il était le frère aîné de feu M. Haüy, si connu comme inventeur des moyens d'instruire les aveugles-nés; et tous deux avaient pour père un pauvre tisserand, qui n'aurait probablement pu leur donner d'autre profession que la sienne, si des personnes généreuses n'étaient venues à son secours.

La première amélioration de la fortune de ces deux jeunes gens tint à cette disposition à la piété que l'aîné montra dès ses premières années, et qui a dominé sa vie.

Encore tout enfant il prenait un plaisir singulier aux cérémonies religieuses, et surtout aux chants de l'église, car le goût de la musique, cet allié naturel des sentiments tendres, se joignit promptement à lui au penchant pour la dévotion. Le prieur d'une abbaye de Prémontrés, principal établissement de son lieu natal, qui avait remarqué son assiduité au service divin, chercha un jour à lier conversation avec lui, et, s'apercevant de la vivacité de son intelligence, il lui fit donner des leçons par quelques-uns de ses moines. Les progrès de l'enfant ayant promptement répondu aux soins de ses maîtres, ceux-ci s'intéressèrent à lui de plus en plus, et firent entendre à sa mère que si elle pouvait seulement le conduire pour quelque temps à Paris, elle finirait, avec leurs recommandations, par obtenir quelques ressources pour lui faire achever ses études.

A peine cette excellente femme en avait-elle de suffisantes pour subsister quelques mois dans la capitale; mais elle aima mieux s'exposer à tout, que de manquer à l'avenir qu'on lui laissait entrevoir pour son fils. Long-temps cependant sa tendresse ne reçut que de bien faibles encouragements. Un jeune homme, dont le nom devait un jour remplir l'Europe, ne trouva de moyen de vivre qu'une place d'enfant de chœur dans une église du quartier Saint-Antoine. *Ce poste,* disait-il naïvement dans la suite, *eut du moins cela d'agréable que je n'y laissai pas enfouir mon talent pour la musique;* et en effet, toujours fidèle à ses premiers goûts, il devint bon musicien, et acquit assez de force sur le violon et sur le clavecin, deux instruments dont il s'est toujours amusé. Enfin, le crédit de ses protecteurs de Saint-Just lui procura une bourse au collége de Navarre, et ce fut seulement alors qu'il

lui fut possible de vaquer régulièrement à son instruction classique.

Sa conduite et son application lui valurent à Navarre le même intérêt qu'à Saint-Just, et à l'époque où il cessa d'y être écolier, les chefs de la maison lui proposèrent de devenir un de leurs collaborateurs. On l'employa comme maître de quartier, et aussitôt qu'il eut pris ses degrés, on lui confia la régence de quatrième, lorsqu'il n'était encore âgé que de 21 ans. Quelques années après, il passa au collége du cardinal Lemoine, comme régent de seconde; et c'était à ces fonctions utiles, mais modestes, qu'il semblait avoir borné son ambition. A la vérité il avait pris à Navarre sous feu M. Brisson, de cette académie, un certain goût pour les expériences de physique, et à ses moments de loisir il en faisait quelques-unes d'électricité; mais c'était pour lui un délassement plutôt qu'une étude : quant à l'histoire naturelle proprement dite, il n'en avait aucune connaissance et ne songeait nullement à s'en occuper.

Une seconde particularité remarquable de son histoire, c'est que ce fut encore aux dispositions affectueuses de son cœur, qu'il dut d'entrer dans une carrière qui lui est devenue si glorieuse, en sorte qu'il est littéralement vrai de dire que, dans tous leurs degrés, sa renommée et sa fortune ont été des récompenses de ses vertus.

Parmi les régents du cardinal Lemoine, se trouvait alors Lhomond, homme savant, qui s'était consacré par piété à l'instruction de la jeunesse. Fort capable d'écrire et de parler pour tous les âges, il ne voulut point s'élever au-dessus de la sixième, et n'a composé que de petits ouvrages destinés aux enfants, mais qui par leur clarté et le ton simple qui y

règne, ont obtenu plus de succès que beaucoup d'ouvrages à prétentions. Une grande conformité de caractère et de sentiments engagea M. Haüy à le choisir pour son ami de cœur et pour son directeur de conscience; dévoué à lui comme un fils, il le soignait dans ses affaires, dans ses maladies et l'accompagnait dans ses promenades. Lhomond aimait la botanique, et M. Haüy, qui à peine en avait entendu parler, éprouvait chaque jour le chagrin de ne pouvoir donner à leur commerce cet agrément de plus. Il découvrit dans une de ses vacances, qu'un moine de Saint-Just s'amusait aussi des plantes. A l'instant il conçut l'idée de surprendre agréablement son ami, et dans cette seule vue il pria ce religieux de lui donner quelques notions de la science, et de lui faire connaître un certain nombre d'espèces. Son cœur soutint sa mémoire; il comprit et retint tout ce qui lui fut montré, et rien n'égala l'étonnement de Lhomond, lorsqu'à sa première herborisation, Haüy lui nomma en langage de Linnæus la plupart des plantes qu'ils rencontrèrent, et lui fit voir qu'il en avait étudié et détaillé la structure.

Dès-lors tout fut commun entre eux jusqu'aux amusements, mais dès-lors aussi M. Haüy devint tout de bon naturaliste, et naturaliste infatigable. On aurait dit que son esprit s'était éveillé subitement pour ce nouveau genre de jouissance. Il se prépara un herbier, avec des soins et une propreté extraordinaires (1), et s'habitua ainsi à un premier emploi des mé-

---

(1) Il y employa des procédés particuliers qui ont conservé jusqu'à présent la couleur des fleurs. Voyez ses observations sur *la manière de faire des herbiers*, dans le volume de l'Académie de 1785, pag. 210.

thodes. Le Jardin du Roi était voisin de son collége. Il était naturel qu'il s'y promenât souvent. Les objets nombreux qu'il y vit, étendirent ses idées, l'exercèrent de plus en plus au classement et à la comparaison. Voyant un jour la foule entrer à la leçon de minéralogie de M. Daubenton, il y entra avec elle, et fut charmé d'y trouver un sujet d'étude plus analogue encore que les plantes à ses premiers goûts pour la physique.

Mais le Jardin du Roi avait un grand nombre d'élèves, et M. Daubenton beaucoup d'auditeurs qui laissèrent la botanique et la minéralogie ce qu'elles étaient. Peut-être savaient-ils l'une et l'autre mieux que M. Haüy, parce qu'ils les avaient étudiées de meilleure heure; mais cette habitude plus longue était précisément ce qui les avait familiarisés avec des difficultés qu'ils finissaient à force d'habitude par ne plus apercevoir. Ce fut pour avoir appris ces sciences plus tard, que M. Haüy les envisagea autrement. Les contrastes, les lacunes dans la série des idées frappèrent vivement un bon esprit, qui, à l'époque de sa force, se jetait tout d'un coup dans une étude inconnue. Il s'étonnait profondément de cette constance dans les formes compliquées des fleurs, des fruits, de toutes les parties des corps organisés, et ne concevait pas que les formes des minéraux, beaucoup plus simples et pour ainsi dire toutes géométriques, ne fussent point soumises à de semblables lois; car en ce temps-là on ne connaissait pas même encore cette espèce de demi-rapprochement que propose Romé de l'Isle, dans la seconde édition de sa *Cristallographie* (1). Comment, se disait M. Haüy, la même pierre,

(1) Elle n'a paru qu'en 1783.

le même sel, se montrent-ils en cubes, en prismes, en aiguilles, sans que leur composition change d'un atôme, tandis que la rose a toujours les mêmes pétales, le gland la même courbure, le cèdre la même hauteur et le même développement.

Ce fut lorsqu'il était rempli de ces idées, qu'examinant quelques minéraux chez un de ses amis, M. Defrance, maître des comptes, il eut l'heureuse maladresse de laisser tomber un beau groupe de spath calcaire cristallisé en prismes. Un de ces prismes se brisa de manière à montrer sur sa cassure des faces non moins lisses que celles du dehors, et qui présentaient l'apparence d'un cristal nouveau tout différent du prisme pour la forme. M. Haüy ramasse ce fragment; il en examine les faces, leurs inclinaisons, leurs angles. A sa grande surprise, il découvre qu'elles sont les mêmes que dans le spath en cristaux rhomboïdes, que dans le spath d'Islande.

Un monde nouveau semble à l'instant s'ouvrir pour lui. Il rentre dans son cabinet, prend un spath cristallisé en pyramide hexaèdre, ce que l'on appelait *dent de cochon;* il essaie de le casser, et il en voit encore sortir ce rhomboïde, ce spath d'Islande; les éclats qu'il en fait tomber sont eux-mêmes de petits rhomboïdes; il casse un troisième spath, celui que l'on nommait *lenticulaire;* c'est encore un rhomboïde qui se montre dans le centre, et des rhomboïdes plus petits qui s'en détachent.

Tout est trouvé! s'écrie-t-il; les molécules du spath calcaire n'ont qu'une seule et même forme : c'est en se groupant diversement qu'elles composent ces cristaux dont l'extérieur si varié nous fait illusion; et partant de cette idée, il lui fut bien aisé d'imaginer que les couches de ces molécules s'empilant les unes sur les autres, et se rétrécissant à mesure, devaient

former de nouvelles pyramides, de nouveaux polyèdres, et envelopper le premier cristal comme d'un autre cristal où le nombre et la figure des faces extérieures pourraient différer beaucoup des faces primitives, suivant que les couches nouvelles auraient diminué de tel ou tel côté, et dans telle ou telle proportion.

Si c'était là le véritable principe de la cristallisation, il ne pouvait manquer de régner aussi dans les cristaux des autres substances; chacune d'elles devait avoir des molécules constituantes identiques, un noyau toujours semblable à lui-même, et des lames ou des couches accessoires, produisant toutes les variétés. M. Haüy ne balance pas à mettre en pièces sa petite collection; ses cristaux, ceux qu'il obtient de ses amis, éclatent sous le marteau. Partout il retrouve une structure fondée sur les mêmes lois. Dans le grenat, c'est un tétraèdre; dans le spath fluor, c'est un octaèdre; dans la pyrite, c'est un cube; dans le gypse, dans le spath pesant, ce sont des prismes droits à quatre pans, mais dont les bases ont des angles différents, qui forment les molécules constituantes; toujours les cristaux se brisent en lames parallèles aux faces du noyau; les faces extérieures se laissent toujours concevoir comme résultant du décroissement des lames superposées, décroissement plus ou moins rapide et qui se fait tantôt par les angles, tantôt par les bords. Les faces nouvelles ne sont que de petits escaliers ou que de petites séries de pointes produites par les retraites de ces lames, mais qui paraissent planes à l'œil à cause de leur ténuité. Aucun des cristaux qu'il examine ne lui offre d'exception à sa loi. Il s'écrie une seconde fois, et avec plus d'assurance : *Tout est trouvé!*

Mais pour que l'assurance fût complète, une troisième con-

dition devait être remplie. Le noyau, la molécule constituante, ayant chacun une forme fixe, et géométriquement déterminable dans ses angles et dans les rapports de ses lignes, chaque loi de décroissement devait produire aussi des faces secondaires déterminables, et même le noyau et les molécules étant une fois donnés, on devait pouvoir calculer d'avance les angles et les lignes de toutes les faces secondaires que les décroissements pourraient produire. En un mot, il fallait ici, comme en astronomie, comme dans toute la physique, pour que la théorie fût certaine, qu'elle expliquât avec précision les faits connus, et qu'elle prévît avec une précision égale ceux qui ne l'étaient pas encore.

M. Haüy sentait cela; mais depuis quinze ans qu'il passait la meilleure partie de ses journées à enseigner le latin, il avait presque oublié le peu de géométrie qu'on lui avait montré au collége. Il ne s'effraya point, et se mit tranquillement à la rapprendre. Lui qui avait si vite appris la botanique pour plaire à son ami, sut promptement autant de géométrie qu'il lui en fallait pour compléter sa découverte, et dès ses premiers essais il se vit pleinement récompensé. Le prisme hexaèdre qu'il avait cassé par mégarde lui donna, par une observation ingénieuse et des calculs assez simples, une valeur fort approchée des angles de la molécule du spath; d'autres calculs lui donnèrent ceux des faces qui s'y ajoutent par chaque décroissement, et en appliquant l'instrument aux cristaux, il trouva les angles précisément de la mesure que donnait le calcul. Les faces secondaires des autres cristaux se déduisaient tout aussi facilement de leurs faces primitives; il reconnut même que presque toujours, pour produire les faces secondaires, il suffit de décroissements dans des pro-

portions assez simples, comme le sont en général les rapports des nombres établis par la nature. Ce fut alors que pour la troisième fois, et désormais sans hésitation, il put se dire : *J'ai tout trouvé!* et ce fut alors aussi qu'il prit la confiance de parler de ses découvertes à son maître, M. Daubenton, dont jusqu'alors il avait suivi les cours modestement et en silence. On peut juger avec quelle faveur elles furent accueillies ; M. de Laplace, à qui M. Daubenton en fit part, en prévit à l'instant toutes les conséquences, et se hâta d'encourager l'auteur à venir les présenter à l'Académie (1).

Ce n'est pas à quoi il fut le plus aisé de déterminer M. Haüy. L'Académie, le Louvre étaient pour le bon régent du cardinal Lemoine une sorte de pays étranger qui effrayait sa timidité. Les usages lui étaient si peu connus, qu'à ses premières lectures il y venait en habit long que les anciens canons de l'Église prescrivent, dit-on, mais que depuis long-temps les ecclésiastiques qui n'étaient point en fonctions curiales ne portaient plus dans la société. A cette époque de légèreté, quelques amis craignirent que ce vêtement ne lui ôtât des

---

(1) Son premier Mémoire, où il traitait des grenats et des spaths calcaires, y fut lu le 10 janvier 1781.

Daubenton et Bezout en firent le rapport le 21 février ; mais il est aisé de voir, en lisant ce rapport, qu'ils n'avaient pas encore entièrement saisi la nature de la découverte. Ce Mémoire est imprimé par extrait dans le Journal de Physique de 1782, tom. I, p. 366.

Son second Mémoire, où il s'attache aux spaths calcaires seulement, fut lu le 22 août 1781, et le rapport en fut fait par les mêmes commissaires le 22 décembre. Cette fois, ils s'étaient mis entièrement au fait des idées de l'auteur, et de leur importance. Le Mémoire est imprimé dans le Journal de Physique de 1782, tom. II, p. 33.

voix; mais pour le lui faire quitter (et c'est encore ici un trait de caractère), il fallut qu'ils appuyassent leur conseil de l'avis d'un docteur de Sorbonne. « Les anciens canons sont « très-respectables, lui dit cet homme sage, mais en ce mo- « ment ce qui importe, c'est que vous soyez de l'Académie. » Il est au reste fort à présumer que c'était là une précaution superflue, et à l'empressement que l'Académie montra pour l'acquérir, on vit bien qu'elle aurait voulu l'avoir, quelque habit qu'il eût porté. On n'attendit pas même qu'une place de physique ou de minéralogie fût vacante, et quelques arrangements en ayant rendu une de botanique disponible (1), elle lui fut donnée presque d'une voix et même de préférence à de savants botanistes (2).

Il reçut un témoignage encore plus flatteur de l'estime de ses nouveaux confrères. Plusieurs d'entre eux et des plus distingués le prièrent de leur donner des explications orales et des démonstrations de sa théorie. Il leur en fit un cours particulier. MM. de Lagrange, Lavoisier, de Laplace, Fourcroy, Berthollet et de Morveau vinrent au cardinal Lemoine suivre les leçons du modeste régent de seconde, tout confus de se voir devenu le maître d'hommes dont il aurait à peine osé se

(1) C'était la place d'adjoint dans la classe de botanique, laissée vacante par la promotion de M. de Jussieu à celle d'associé. L'élection de M. Haüy est du 12, et la lettre de M. Amelot qui annonce la confirmation du Roi, du 15 février 1783.

(2) MM. Desfontaines et Tessier qui eurent les secondes voix, et MM. Dombey et Beauvois. Dombey est mort avant d'être de l'Académie. Beauvois n'y est entré qu'en 1803. En 1788, M. Haüy passa comme associé à la classe d'histoire naturelle et de minéralogie.

dire le disciple. C'est qu'en effet dans une doctrine aussi nouvelle, et cependant déja presque complète, les hommes les plus habiles étaient des écoliers. Peut-être n'en avait-il point encore été présenté de cette étendue, qui fût dès l'origine à l'état de clarté et de développement où M. Haüy présentait la sienne. Il avait inventé jusqu'aux méthodes de calcul qui lui étaient nécessaires (1), et avait représenté d'avance par des formules qui lui étaient propres, toutes les combinaisons possibles de la cristallographie.

On ne peut mieux apprendre qu'en cette occasion ce qui distingue ces travaux solides du génie, sur lesquels se fondent des édifices éternels, de ces idées plus ou moins heureuses qui s'offrent pour un moment à certains esprits, mais qui, faute d'être cultivées, ne produisent point de fruits durables.

Six ou sept ans avant Haüy, Gahn, jeune chimiste suédois (2), qui fut depuis professeur d'Abo, avait aussi remarqué, en brisant un cristal de spath pyramidal, que son noyau était un rhomboïde semblable au spath d'Islande; il avait fait part de cette observation à son maître, le célèbre Bergman, homme supérieur, et que l'on devait croire ca-

---

(1) Voyez ses mémoires sur une *Méthode analytique pour résoudre les problèmes relatifs à la structure des cristaux*, dans le vol. de l'Acad. pour 1788, pag. 13, et *sur la manière de ramener à la théorie du parallélépipède, celle de toutes les autres formes primitives des cristaux*, dans le volume de 1789, pag. 519.

(2) Voyez dans le premier volume des *Nova Acta* de l'Académie d'Upsal, imprimé en 1773, pag. 150, le Mémoire de Bergman, intitulé : *Crystallorum formæ è spatho ortæ*. Il est réimprimé dans les œuvres de Bergman, édition de Leipsig, et Lametherie en a inséré une traduction dans le Journal de Physique.

pable d'en suivre toutes les conséquences; mais au lieu de la répéter sur des cristaux différents, et de reconnaître ainsi par l'expérience dans quelles limites ce fait pouvait se généraliser, Bergman se jeta dans des hypothèses, et dès le premier pas il s'égara. De ce rhomboïde du spath, il prétendit déduire non-seulement les autres cristaux de spath, mais ceux du grenat, ceux de l'hyacinthe qui n'ont avec lui aucun rapport de structure. Ainsi, un savant du premier ordre, consommé dans la physique et la géométrie, s'arrêta sur le chemin d'une belle découverte, et elle se trouva réservée à un homme qui commençait à peine à s'occuper de ces sciences, mais qui sut poursuivre cette vérité, comme la nature veut qu'elles soient toutes poursuivies; en marchant pas à pas, en observant sans relâche, et en ne se laissant ni emporter ni détourner par son imagination.

Mais par la raison que les autres minéralogistes n'avaient pas su trouver la bonne voie, ils ne surent pas non plus saisir combien celle de Bergman en différait, et ils accusèrent M. Haüy de lui avoir emprunté ses idées, lui qui à peine connaissait le nom de Bergman, et n'avait jamais aperçu son Mémoire. Ils ajoutaient, comme on le fait toujours en pareille occasion, que non-seulement la découverte n'était pas de M. Haüy, mais qu'elle était fausse.

Romé Delisle, minéralogiste, qui d'ailleurs n'était pas sans mérite, mais qui s'occupait depuis long-temps des cristaux sans avoir seulement soupçonné le principe de leur structure, eut la faiblesse de le vouloir combattre quand un autre l'eut découvert (1). Il trouva plaisant d'appeler M. Haüy

(1) Voyez la note de la page 27 de la préface de la *Cristallographie*, par Romé Delisle, édition de 1783, et les pag. 28 et 29 de cette même préface.

un *cristalloclaste*, parce qu'il brisait les cristaux, comme dans le Bas-Empire on appelait *iconoclastes* ceux qui brisaient les images. Mais heureusement, nous ne connaissons d'hérétiques dans les sciences que ceux qui ne veulent pas suivre les progrès de leur siècle, et ce sont aujourd'hui Romé Delisle et ceux qui lui ont succédé dans ses petites jalousies, qu'atteint avec justice cette qualification.

Quant à M. Haüy, la seule réponse qu'il fit à ses détracteurs consista en de nouvelles recherches et d'une application encore plus féconde. Jusque-là il n'avait donné que la solution d'un problème curieux de physique. Bientôt ses observations fournirent des caractères de première importance à la minéralogie.

Dans les nombreux essais qu'il avait faits sur les spaths, il avait remarqué que la pierre dite *spath perlé*, que l'on regardait alors comme une variété du spath pesant ou de la barite sulfatée, a le même noyau que le spath calcaire, et une analyse que l'on en fit prouva qu'en effet elle ne contient, comme le spath calcaire, que de la chaux carbonatée.

Si les minéraux bien déterminés, quant à leur espèce et à leur composition, se dit-il aussitôt, ont chacun son noyau et sa molécule constituante fixes, il doit en être de même de tous les minéraux distingués par la nature, et dont la composition n'est point encore connue. Ce noyau, cette molécule peuvent donc suppléer à la composition pour la distinction des substances, et dès la première application qu'il fit de cette idée, il porta la lumière dans une partie de la science que tous les travaux de ses prédécesseurs n'avaient pu éclaircir.

A cette époque, les minéralogistes les plus habiles, Lin-

næus, Wallérius, Romé Delisle (1), de Saussure lui-même, confondaient sous le nom de *schorl* une multitude de pierres qui n'avaient de commun entre elles que quelque fusibilité jointe à une forme plus ou moins prismatique, et sous celui de *zéolithe*, une multitude d'autres dont le seul caractère distinctif était de se changer, dans les acides, en une sorte de gelée. Les schorls surtout formaient la réunion la plus hétérogène; on y jetait en quelque sorte tous les minéraux dont on ne se faisait pas d'idées nettes, et feu M. de Lagrange, cet homme dont l'étendue des connaissances et la finesse d'esprit égalaient le génie, disait en plaisantant que le schorl était le *nectaire* des minéralogistes, parce que les botanistes avaient aussi l'usage d'appeler *nectaire* les parties de la fleur dont ils ignoraient la nature.

M. Haüy divisant mécaniquement la pierre appelée *schorl blanc*, est tout étonné d'y trouver le noyau et la molécule du feld-spath (2). Feu Darcet, l'essayant sur cette indication, lui reconnaît en effet tous les caractères physiques et chimiques des feld-spaths.

Rempli d'un nouvel espoir, M. Haüy examine les autres schorls; il découvre que cette pierre noire dont sont lardées tant de laves et que l'on nommait *schorl des volcans*, a son noyau en prisme oblique à base rhombe; que le prétendu

---

(1) *Cristallographie*, tom. II, pag. 344 et suivantes.

(2) Note sur le *schorl blanc*, lue à l'Académie le 28 juillet 1784, imprimée dans le Journal de Physique de 1786, tom. I, p. 63, et en 1787 dans les Mémoires de l'Académie pour 1784, p. 270.

schorl violet du Dauphiné l'a en prisme droit; il sépare encore l'un et l'autre du genre des schorls (1).

Plus tard il arrive à distinguer le *schorl électrique* ou *tourmaline* du *schorl noir des montagnes primitives.* Le noyau du premier est un prisme hexaèdre régulier; celui du second est seulement tétraèdre (2).

Il continue ses recherches; chacun de ces prétendus schorls lui offre des caractères fixes, se groupe avec les variétés qui lui appartiennent véritablement, s'isole de celles qu'on lui avait associées mal-à-propos. Des opérations semblables montrent les différences des pierres confondues sous le nom de *zéolithes* (3), et toujours la chimie et la physique, réveillées par ces résultats de la cristallographie, découvrent à leur tour dans ces minéraux des caractères ou des éléments qu'elles n'y avaient pas aperçus.

Dès ce moment, M. Haüy ne fut plus un simple physicien; il se prépara à devenir le législateur de la minéralogie, et en effet l'on peut dire que c'est de ses recherches sur les schorls que date la nouvelle ère de cette science, et que chaque année, depuis cette époque, l'étude de la structure cristalline des minéraux a enfanté quelque découverte inattendue.

Parmi les schorls, M. Haüy est parvenu à la fin à distinguer jusqu'à quatorze espèces. Il en a indiqué six parmi les

---

(1) Note sur la structure des cristaux de schorl, lue à l'Académie le 30 mars 1787, imprimée dans le Journal de Physique de 1787, p. 322.

(2) *Journal d'histoire naturelle*, tom. II, pag. 67, imprimé en 1792. Depuis lors M. Haüy a préféré le rhomboïde pour la tourmaline; mais ces formes ne soint point incompatibles.

(3) *Journal des mines*, n° XIV, page 86.

zéolithes, quatre parmi les grenats, cinq parmi les hyacinthes. Non-seulement il a annoncé ainsi aux chimistes qu'en recommençant leurs analyses, ils trouveraient dans ces pierres des différences de composition qu'ils avaient méconnues; il leur a encore très-souvent prédit que des différences qu'ils croyaient voir ne devaient pas exister. C'est ainsi que d'après les indications de la cristallographie, M. Vauquelin a fini par trouver la *glucine* dans l'*émeraude*, comme il l'avait auparavant découverte dans le *beril.*

Quelquefois ces indications résultaient des recherches de M. Haüy, sans que lui-même les eût aperçues d'abord, faute d'avoir songé à comparer ses résultats. Ainsi lorsque MM. Klaproth et Vauquelin eurent découvert que l'*apatite* et la *chrysolite* des joailliers n'étaient que du phosphate de chaux, il retrouva dans ses papiers que depuis long-temps il avait déterminé pour l'une et pour l'autre la même structure. C'était à ses yeux le triomphe de la cristallographie que cet accord entre des opérations faites séparément, et que l'on ne pouvait soupçonner d'avoir été concertées.

Il était du devoir d'un homme qui servait ainsi les sciences de se vouer entièrement à elles. Sur les conseils de Lhomond lui-même, M. Haüy, lorsqu'il eut dans l'Université les vingt années de services qui suffisaient alors pour obtenir la pension d'émérite, se hâta de la demander (1). Il y joignit les produits d'un petit bénéfice. Tout cela ensemble ne faisait encore que le nécessaire bien juste; mais comme il ne cher-

(1) En 1784. Il continua cependant de loger au cardinal Lemoine, comme professeur émérite.

chait de jouissances que dans ses travaux, il lui aurait suffi que ce nécessaire fût assuré. Par malheur il apprit au bout de bien peu de temps que les effets des passions humaines ne se laissent pas calculer si aisément que ceux des forces de la nature.

On se souvient avec quelle imprudence l'assemblée constituante se laissa induire par des esprits étroits à joindre encore des disputes théologiques à toutes les autres disputes qui agitaient la France, et à doubler ainsi l'âcreté des querelles politiques en leur donnant le caractère de persécutions religieuses. La nouvelle forme de gouvernement que l'on imposait à l'Église avait divisé le clergé, et les hommes qui voulaient porter la révolution à l'extrême, se faisaient un plaisir d'envenimer cette division. Les ecclésiastiques qui ne s'étaient pas soumis aux innovations furent d'abord attaqués dans leur fortune; on les priva de leurs places et et de leurs pensions; et M. Haüy, que sa piété scrupuleuse avait toujours retenu dans cette classe, se vit en un instant aussi pauvre que le jour où il avait ambitionné de devenir enfant de chœur.

Il se serait contenté encore de pouvoir vivre de son travail; mais les persécuteurs ne se contentèrent pas d'une première vexation. Lorsqu'au 10 août 1792, le trône eut été renversé, l'une des premières mesures que prirent ou que laissèrent prendre les hommes cruellement légers dans les mains de qui tomba le pouvoir, fut d'emprisonner les prêtres qui n'avaient pas prêté le serment prescrit, et la célébrité de M. Haüy dans les sciences ne donna qu'un motif de plus de lui faire subir le sort commun.

Fort peu au courant dans sa vie solitaire de ce qui se pas-

sait autour de lui, il voit un jour avec surprise des hommes grossiers entrer violemment dans son modeste réduit. On commence par lui demander s'il n'a point d'armes à feu Je n'en ai d'autre que celle-ci, dit-il, en tirant une étincelle de sa machine électrique, et ce trait désarme un instant ces horribles personnages, mais il ne les désarme que pour un instant; on se saisit de ses papiers où il n'y avait que des formules d'algèbre; on culbute cette collection qui était sa seule propriété; enfin on le confine avec tous les prêtres et les régents de cette partie de Paris dans le séminaire de Saint-Firmin, qui était contigu au Cardinal Lemoine, et dont on venait de faire une prison.

Cellule pour cellule, il n'y trouvait pas trop de différence: tranquillisé surtout en se voyant au milieu de beaucoup de ses amis, il ne prend d'autres soins que de se faire apporter ses tiroirs, et de tâcher de remettre ses cristaux en ordre.

Heureusement il lui restait au dehors des amis, mieux informés de ce que l'on préparait.

L'un de ses élèves, devenu depuis son collègue, M. Geoffroy de Saint-Hilaire, membre de cette Académie, logeait au Cardinal Lemoine. A peine instruit de ce qui vient d'arriver à son maître, il court implorer pour lui tous ceux qu'il croit pouvoir le servir. Des membres de l'Académie, des fonctionnaires du Jardin du Roi, n'hésitent point à aller se jeter aux pieds des hommes féroces qui conduisaient cette affreuse tragédie. On obtient un ordre de délivrance, et M. Geoffroy court le porter à Saint-Firmin; mais il arriva un peu tard, et M. Haüy était si tranquille, il se trouvait si bien, que rien ne put le déterminer à sortir ce jour-là; le lendemain matin

il fallut presque l'entraîner de force. On frémit encore en songeant que le surlendemain fut le 2 septembre!

Ce qui est bien singulier, c'est que depuis lors on ne l'inquiéta plus. Pour rien au monde il ne se serait prêté à la moindre des extravagances de cette époque, mais personne aussi ne lui proposa de s'y prêter. La simplicité de ses manières, sa douceur lui tinrent lieu de tout. Un jour seulement on le fit comparaître à la revue de son bataillon, mais on le réforma aussitôt sur sa mauvaise mine. Ce fut là à peu près tout ce qu'il sut, ou du moins tout ce qu'il vit de la révolution. La Convention, au temps où elle agissait avec le plus de violence, le nomma membre de la commission des poids et mesures (1), et conservateur du cabinet des mines (2); et lorsque Lavoisier fut arrêté, lorsque Borda, Delambre furent destitués, ce fut M. Haüy, ce fut un prêtre non assermenté, remplissant tous les jours ses fonctions ecclésiastiques, qui se trouva seul en position d'écrire pour eux, et qui le fit sans hésiter, ni sans qu'il lui en arrivât rien. A une pareille époque, son impunité était plus étonnante encore que son courage.

C'est au cabinet du conseil des mines, et sur l'invitation et avec le secours de cette administration éclairée que M. Haüy a préparé son traité de minéralogie, le principal de ses ouvrages, et qu'il en a publié le programme (3) et la première édition (4).

---

(1) 22 septembre 1793. — (2) 2 août 1794.

(3) *Extrait d'un Traité élémentaire de minéralogie*, publié d'abord par parties dans le *Journal des mines*, puis en un vol. séparé, in-8°. Paris, an V (1797).

(4) *Traité de minéralogie*, 4 vol. in-8°, et un de planches in-4° transv. Paris (1801).

Disposant d'une grande collection où affluaient de tous côtés les différents minéraux, employant les secours de jeunes élèves pleins de connaissances et d'ardeur que l'école polytechnique lui avait préparés, et dont plusieurs sont eux-mêmes aujourd'hui de savants minéralogistes, il répara promptement le temps qu'il avait consumé à d'autres travaux et éleva en peu d'années ce monument admirable dont on peut dire qu'il a fait pour la France ce que des circonstances tardives avaient fait pour M. Haüy, et qu'après des siècles de négligence, il l'a subitement replacée au premier rang dans cette partie de l'histoire naturelle. Ce livre a en effet au plus haut degré deux avantages qui se concilient bien rarement: le premier, qu'il est fondé sur une découverte originale et entièrement due au génie de l'auteur; le second, que cette découverte y est suivie et appliquée avec une persévérance inouïe aux moindres variétés minérales. Tout y est grand dans le plan; tout y est précis et rigoureux dans les détails; il est fini comme la doctrine même dont il contient l'exposition.

La minéralogie, cette partie de l'histoire naturelle qui a pour objet les êtres les moins nombreux et les moins compliqués, est cependant celle qui se prête le moins aisément à une classification rationnelle.

Les premiers observateurs distribuèrent et nommèrent vaguement les minéraux d'après leurs apparences extérieures et leurs usages. Ce n'est que vers le milieu du dix-huitième siècle que l'on essaya de les soumettre à ces méthodes qui avaient rendu tant de services à la zoologie et à la botanique; on crut pouvoir établir parmi eux des genres et des espèces comme parmi les êtres organisés, et l'on oublia que l'on manque en minéralogie du principe qui a donné naissance à l'idée

d'espèces, c'est-à-dire de la génération; qu'à peine peut-on y admettre le principe de l'individualité, telle qu'on la conçoit dans les règnes organiques, c'est-à-dire, cette unité d'actions d'organe divers concourant à l'entretien d'une même vie.

Ce n'est point par la matière que se manifeste l'identité de l'espèce dans les plantes et dans les animaux, c'est par la forme, comme le nom même d'espèce l'indique déja: il n'est peut-être pas deux hommes, deux chênes, deux rosiers qui aient les substances composantes de leur corps en même proportion, et même ces substances changent sans cesse; elles circulent dans cet espace abstrait et figuré que l'on nomme la forme de l'être, plutôt qu'elles n'y séjournent; dans quelques années, il ne restera peut-être plus un atôme de ce qui compose notre corps aujourd'hui; la seule forme est persistante; la seule forme se perpétue en se multipliant; transmise par l'opération mystérieuse de la génération à des séries d'individus sans fin, elle attirera successivement en elle des molécules sans nombre de matières diverses, mais toutes passagères.

Au contraire, dans les minéraux où il ne se fait point de mouvement apparent, où les molécules une fois placées restent à leur place jusqu'à ce qu'une cause violente les arrache les unes aux autres, où la matière, en un mot, est persistante, il semblerait au premier coup-d'œil que ce serait elle, ou en d'autres termes, que ce serait la composition chimique qui devrait faire l'essence de l'être; mais en y réfléchissant davantage, on vient à comprendre que si les matières elles-mêmes sont diverses, ce ne peut guère être que par la forme de leurs molécules; on conçoit de plus que de ces formes

particulières des molécules et des divers groupements qu'elles contractent, doivent nécessairement résulter des formes totales déterminées; on trouve même que s'il y a quelque chose en minéralogie qui puisse représenter l'individu, ce sont ces formes totales, quand elles offrent un ensemble régulier, un cristal en un mot, puisque au moins au moment où ce cristal s'est réuni, toutes les molécules qui le constituent ont dû concourir à un mouvement commun, et se grouper d'après une loi qui leur commandait à toutes. Or, rien ne prouve que dans ce mouvement commun, il n'ait pu être entraîné des molécules d'une autre nature qui se trouvaient par hasard dans la même sphère d'action; ni que des éléments, des atômes identiques dans leur nature, au moment où ils ont contracté leur première union, n'aient pu se grouper en molécules cristallines diverses; et ce que l'esprit conçoit comme possible, l'expérience l'a fait connaître comme réel : il est donc manifeste que dans ces deux cas l'analyse chimique ne donnerait que des idées incomplètes du minéral, et ne serait point en rapport avec ses propriétés les plus apparentes.

Telles sont sans doute les vues dont M. Haüy ne se rendait peut-être pas un compte bien exact à lui-même, mais qui guidaient en quelque sorte son génie, ou si l'on veut son instinct scientifique, et qui l'engagèrent à mettre en première ligne la cristallisation dans toutes ses déterminations d'espèces minéralogiques.

On peut dire que toutes les découvertes et les observations faites dans ces dernières années, même celles que l'on a considérées comme des objections contre cette règle fondamentale, en sont plutôt des confirmations.

Ce que nous venons de dire, par exemple, de la force cristallisante et du pouvoir qu'elle a d'entraîner des molécules étrangères avec les molécules essentielles, est si vrai, qu'elle entraîne les premières quelquefois en beaucoup plus grande quantité, en sorte qu'une même espèce minéralogique, telle que le fer spathique, qui fondamentalement n'est qu'un spath calcaire, une chaux carbonatée, peut contenir du fer au quart, au tiers de son poids, et devenir ainsi pour le métallurgiste, au lieu d'une simple pierre, une véritable mine; que le spath muriatique, qui n'est aussi qu'un spath calcaire, peut envelopper des grains de grès au point de ne contenir presque autre chose; le tout, sans que les angles de ses cristaux changent d'une seconde.

Il en est absolument dans nos laboratoires comme dans celui de la nature. M. Beudant, en faisant cristalliser un mélange de deux sels, a vu l'un des deux contraindre l'autre à se mêler à ses cristaux, en proportion beaucoup plus grande qu'il ne s'y trouvait lui-même. Lequel des deux doit caractériser le minéral? Est-ce le plus abondant? Non sans doute; car, excepté cette abondance, tous les caractères du produit sont donnés par l'autre.

Il n'est pas moins certain que la même substance prend quelquefois au moment où elle se forme en cristaux, où elle s'individualise, s'il est permis d'employer cette expression, une forme très-différente de celle qui lui est ordinaire. Tous les efforts des chimistes n'ont pu trouver d'essentiel dans l'arragonite que la même chaux carbonatée dont se compose aussi le spath calcaire; car la petite portion de strontiane qu'on a découverte dans la première ne peut y être considérée que comme accidentelle; et cependant l'arragonite cris-

tallise en octaèdre et le spath en rhomboïde. Et ici l'art de l'homme parvient également à imiter la nature, et même à faire, quand il lui plaît, ce que la nature fait rarement. Des expériences récentes de M. Mitscherlich paraissent prouver que l'on peut faire prendre à volonté, à certains sels, des formes cristallines élémentaires différentes, suivant les circonstances dans lesquelles on les fait cristalliser. Mais dans le petit nombre de cas où la nature a produit elle-même de telles différences, doit-on ne faire qu'une espèce de ces cristallisations diverses? Alors il faudrait aussi n'en faire qu'une de presque tous les animaux à sang chaud; car ils sont aussi identiques dans la nature chimique de leurs éléments, que les deux pierres que nous venons de nommer. Un aigle et un chien ont la même fibrine dans leurs muscles, la même gélatine dans leurs membranes, le même phosphate de chaux dans leurs parties osseuses. Comme le spath calcaire et l'arragonite, ils ne diffèrent que par la forme que ces matières ont prise au moment où elles ont constitué des individus.

Je prie de remarquer que je n'entends nullement que l'analyse chimique des minéraux doive être négligée, et ce n'était pas non plus à beaucoup près l'opinion de M. Haüy. Cette analyse est tout aussi nécessaire à leur connaissance que la détermination de leur forme : elle est beaucoup plus utile par rapport à leurs usages. Ce que M. Haüy soutenait, c'est qu'elle est généralement impuissante pour déterminer leurs espèces, parce qu'elle n'a pas de moyens sûrs de distinguer les substances accidentelles des essentielles; parce qu'elle n'est pas en état, pour certaines classes de pierres, d'affirmer qu'elle connaît leurs éléments, et que chaque

jour elle en découvre qui lui étaient demeurés cachés (1).

Feu M. Werner, que l'Europe a regardé long-temps comme un rival et même comme un adversaire de M. Haüy, n'en différait au fond que parce qu'il ne remontait pas aussi haut dans la recherche des principes. Cette dureté, cette cassure, ce tissu, auxquels il s'attachait de préférence, ne sont en réalité que des conséquences de la forme des molécules et de leur arrangement, et l'emploi heureux que ce grand minéralogiste en a fait pour reconnaître et déterminer tant d'espèces de minéraux pouvait déja faire présumer tout ce que donnerait la source, puisque de simples dérivations étaient si fécondes. Mais cette source, c'est M. Haüy seul qui non-seulement l'a découverte, mais qui en a mesuré la force et l'abondance. Aussi est-ce à lui seul qu'il a été possible de porter ou de ramener à leur juste valeur beaucoup de résultats qui, dans les mains de M. Werner, n'étaient demeurés en quelque sorte que des demi-vérités.

Il n'est presque plus aujourd'hui de minéral cristallisable connu dont M. Haüy n'ait déterminé le noyau et les molécules avec la mesure de leurs angles et la proportion de leurs côtés, et dont il n'ait rapporté à ces premiers éléments toutes les formes secondaires, en déterminant pour chacune les divers décroissements qui la produisent, et en fixant par le calcul leurs angles et leurs faces. C'est ainsi qu'il a fait enfin de la minéralogie une science tout aussi précise et tout aussi méthodique que l'astronomie.

---

(1) Tableau comparatif des résultats de la cristallographie et de l'analyse chimique relativement à la classification des minéraux, 1 vol. in-8°. Paris, 1809.

On peut dire en un mot, que M. Haüy est à Werner et à Romé Delisle, ce que Newton a été à Képler et à Copernic.

Mais ce qui lui est tout particulier, c'est que son ouvrage n'est pas moins remarquable par sa rédaction et la méthode qui y règne, que par les idées originales sur lesquelles il repose. La pureté du style, l'élégance des démonstrations, le soin avec lequel tous les faits y sont recueillis et discutés, en auraient fait encore un ouvrage classique, quand il n'aurait contenu que la minéralogie la plus ordinaire. M. Haüy s'y montre habile écrivain et bon géomètre autant que savant minéralogiste; on voit qu'il y a retrouvé toutes ses premières études; on y reconnaît jusqu'à l'influence de ses premiers amusements de physique; s'il faut apprécier l'électricité des corps, leur magnétisme, leur action sur la lumière, il imagine des moyens ingénieux et simples, de petits instruments portatifs : le physicien y vient sans cesse au secours du minéralogiste et du cristallographe.

Il est dans les sciences des rangs qui sont marqués aussitôt que les titres en sont produits, et tel est celui où M. Haüy s'est placé sans contradiction, le jour où il a fait paraître son ouvrage.

Cependant à la mort de Daubenton, ce fut Dolomieu, et non pas M. Haüy, qui fut nommé professeur de minéralogie au Muséum d'histoire naturelle; mais Dolomieu, arrêté contre toutes les règles du droit des gens, gémissait dans les cachots de la Sicile; on n'avait de lui pour tout signe de vie que quelques lignes, qu'enchaîné dans un souterrain étroit il était parvenu à écrire avec un éclat de bois et la fumée de sa lampe, et que l'ingénieuse humanité d'un Anglais avait su, à force d'or, se faire remettre par le geôlier. Ces lignes parlèrent en

X 2.

sa faveur autant que tous ses ouvrages, et l'un de ceux qui sollicitèrent le plus vivement pour lui, ce fut le rival qu'il devait craindre le plus, ce fut M. Haüy.

On aurait pu croire que de pareils témoignages, et rendus par de tels hommes, auraient adouci les bourreaux de Dolomieu; mais combien de gens en pouvoir, lorsqu'une passion momentanée les excite, ne s'informent pas plus des sentiments de leurs contemporains qu'ils ne prévoient l'indignation de la postérité? Dolomieu ne sortit de son souterrain que par un article du traité de paix; et une mort prématurée, fruit des traitements qu'il avait subis, ne rendit que trop tôt à M. Haüy la place à laquelle celui-ci avait si généreusemen renoncé. Il y fut nommé le 9 décembre 1802.

Dès-lors cette partie de l'établissement a pris une vie nouvelle; les collections ont été quadruplées; il y a régné un ordre sans cesse conforme aux découvertes les plus récentes, et l'Europe minéralogique est accourue non moins pour observer tant d'objets si bien exposés, que pour entendre un professeur si élégant, si clair, et surtout si complaisant. Sa bienveillance naturelle se montrait à toute heure envers ceux qui avaient le désir d'apprendre. Il les admettait dans son intérieur, leur ouvrait ses propres collections, et ne leur refusait aucune explication. Les étudiants les plus humbles étaient reçus comme les personnages les plus savants, et comme les plus augustes, car il a eu des élèves de tous les rangs.

L'Université, lors de sa fondation, crut s'honorer en plaçant le nom de M. Haüy sur la liste d'une de ses facultés; elle n'en attendait point de leçons, et lui avait donné au même instant un adjoint très-digne de lui, M. Brongniart,

aujourd'hui membre de cette académie, et qui lui a succédé au Muséum d'histoire naturelle. Mais M. Haüy ne voulait pas porter un titre sans en remplir les devoirs. Il faisait venir chez lui les élèves de l'école normale, et, dans des conversations aimables et variées, les initiait à tous ses secrets. Il reprenait alors sa vie de collége, jouait presque avec les jeunes gens, et surtout ne les renvoyait jamais sans une ample collation.

Ainsi se passaient ses journées; ses devoirs religieux, des recherches profondes suivies sans relâche, et des actes continuels de bienveillance, surtout envers la jeunesse, les occupaient tout entières. Aussi tolérant que pieux, jamais l'opinion des autres n'influa sur sa conduite envers eux; aussi pieux que fidèle à ses études, les plus sublimes spéculations ne l'auraient détourné d'aucune pratique prescrite par le rituel; du reste, ne mettant aux choses de ce monde que le prix qu'elles pouvaient avoir aux yeux d'un homme pénétré de tels sentiments. Par la nature de ses recherches, les plus belles pierreries de l'Europe ont passé sous ses yeux, et même il en a donné un traité particulier (1); il n'y a jamais vu que des cristaux; un degré de plus ou de moins dans quelque angle d'un schorl ou d'un spath, l'aurait à coup sûr intéressé plus que les trésors des deux Indes: et même si l'on a pu lui reprocher d'avoir mis à quelque chose un attachement trop vif, c'est à ces idées sur cette matière. Il s'y concentrait entièrement; ce n'était qu'avec impatience qu'il s'en voyait détourné par des objections; son

(1) *Traité des caractères physiques des pierres précieuses*, 1 vol. in-8°. Paris, 1817.

repos en était troublé; c'était le seul motif qui pût le faire renoncer à sa douceur, à sa bienveillance ordinaire, et, nous devons l'avouer, cette disposition a produit quelquefois cet effet; elle l'a peut-être empêché d'avoir assez d'égards aux observations faites avec le nouveau goniomètre de M. Wollaston sur les angles du spath calcaire, du spath magnésifère, et du fer spathique. Mais qui n'excuserait un homme valétudinaire, long-temps étranger au monde, attaqué lors de son début de la manière la plus injuste et la plus offensante; qui ne l'excuserait, dis-je, de n'avoir pas assez distingué de ses premiers et ignorants antagonistes, ceux qui dans la suite, éclairés par ses propres découvertes, apprécièrent autrement que lui quelques faits de détails, ou même quelques principes qu'il avait trop généralisés?

Ce qui est certain, c'est que dans les moments où il payait ce tribut à la faiblesse humaine, il n'était animé que de ce qu'il croyait de l'intérêt de la science, et que, s'il se fâchait, c'était uniquement de ce qu'il jugeait devoir faire obstacle au triomphe de la vérité.

A l'époque où l'on chercha à rendre quelque activité à l'instruction publique, le gouvernement demanda à M. Haüy un traité de physique pour les colléges. M. Haüy avait plus d'un titre à cette commission, et dans la manière ingénieuse dont il avait appliqué la physique à la minéralogie, et dans plusieurs mémoires intéressants sur l'électricité et la double réfraction des minéraux, et dans l'élégante exposition qu'il avait donnée de la théorie d'Æpinus sur l'électricité et sur le magnétisme, et dans le succès qu'avait obtenu le cours de physique qu'il fit à cette école normale créée en 1795 par la convention et qui ne dura que quelques mois. Mais ces titres

ne suffisaient point à ses yeux ; il doutait surtout qu'il lui fût permis d'abandonner, même pour peu de temps, les recherches si heureuses auxquelles il lui semblait que la Providence l'avait conduit, et il ne voulut point s'engager avant d'avoir consulté M. l'abbé Émery, l'ancien supérieur de Saint-Sulpice. « N'hésitez pas, lui dit M. Émery : vous feriez « une grande faute, si vous manquiez cette occasion, en trai- « tant de la nature, de parler de son auteur... et n'oubliez « point, ajouta-t-il, de prendre sur le frontispice votre titre « de chanoine de la métropole. » M. Émery, dont l'habileté n'a pas été moins célèbre que ses sentiments ont été purs, savait qu'il n'est aucune profession qui ne doive s'honorer des talents de ceux qui l'exercent, et il se souvenait que l'époque où le christianisme a fait le plus de conquêtes, et où ses ministres ont obtenu le plus de respect, est celle où ils portaient chez les peuples convertis les lumières des lettres, en même temps que les vérités de la religion, et où ils formaient à la fois dans les nations l'ordre le plus éminent et le plus éclairé.

Si ce traité de physique n'ajouta pas beaucoup à la réputation scientifique de M. Haüy, il ne nuisit point à sa gloire littéraire. On y trouve la même clarté, la même pureté que dans sa minéralogie, et encore plus d'intérêt. C'est un des livres les plus propres à inspirer à la jeunesse le goût des sciences naturelles, et il se fait lire avec agrément par tous les âges: aussi a-t-il eu trois éditions.

L'auteur fut vivement pressé et à plusieurs reprises de faire connaître ce qu'il désirait qui fût fait pour lui. Il se borna à demander qu'on le mît à même de rapprocher de lui sa famille, pour en être soigné dans sa vieillesse et dans

ses infirmités, et son vœu fut rempli sur-le-champ au moyen d'une petite place de finance accordée au mari de sa nièce.

Qui croirait qu'une récompense si bien méritée disparut à la première réforme, et que les amis de M. Haüy ne purent obtenir d'autre réponse à leurs sollicitations, si ce n'est qu'il n'y a point de rapport entre les contributions et la cristallographie?

Newton avait aussi été récompensé par un emploi de finance, et bien autrement considérable, de la gloire que son génie avait répandue sur son pays; mais il le conserva sous trois rois et sous dix ministres. Pourquoi les hommes qui disposent, ordinairement pour un temps si court, du sort des autres, oublient-ils quelquefois que de pareils actes de leur part resteront dans l'histoire beaucoup plus sûrement qu'aucun des détails éphémères de leur administration?

Ce ne fut pas la seule épreuve que M. Haüy eut à subir. Peu de temps après, les lois de finance lui firent perdre une pension qui ne pouvait plus se cumuler avec un traitement d'activité; et son frère, que l'on avait attiré en Russie pour y répandre les moyens d'instruire les aveugles, en revint sans qu'aucune des promesses qui lui avaient été faites eût été remplie, et avec une santé tellement délabrée, qu'il tombait entièrement à la charge de sa famille.

C'est ainsi que vers la fin de ses jours, M. Haüy se vit subitement ramené bien près de ce strict nécessaire dont il avait déja eu l'expérience. Il aurait eu besoin de toute sa religieuse résignation pour supporter ces revers, sans l'attention que mirent ses jeunes parents à lui cacher toute la gêne que ses affaires en éprouvaient. Leurs soins redoublaient en quelque sorte à mesure qu'il perdait les moyens de leur en mar-

quer sa reconnaissance. L'amour de ses élèves, les respects de l'Europe contribuèrent sans doute aussi à les consoler. Les hommes instruits de tous les rangs qui arrivaient à Paris, s'empressaient de lui apporter leurs hommages, et presqu'à la veille de sa mort, nous avons vu l'héritier d'un grand royaume revenir à plusieurs reprises converser près de son lit, et lui marquer son intérêt dans les termes les plus expressifs et les plus touchants. Mais le soutien le plus réel qu'il trouva fut qu'au milieu de sa gloire et de sa fortune, il n'avait quitté ni les habitudes de son collége, ni celles de son village. Jamais il n'avait changé les heures de ses repas, de son lever et de son coucher; chaque jour, il faisait à peu près le même exercice, se promenait dans les mêmes lieux, et il savait encore en se promenant exercer sa bienveillance; il conduisait les étrangers qu'il voyait embarrassés, il leur donnait des billets d'entrée dans les collections; et beaucoup de gens lui ont dû de ces petits agréments, qui ne se sont point doutés de quelle main ils les tenaient. Son vêtement antique, son air simple, son langage toujours d'une modestie excessive, n'étaient pas de nature à le faire reconnaître. Lorsqu'il allait passer quelque temps dans le bourg où il avait pris naissance, aucun de ses anciens voisins n'aurait pu soupçonner à ses manières qu'il fût devenu à Paris un personnage considérable. Un jour, dans une promenade sur le boulevard, il rencontra deux anciens soldats qui allaient se battre. Il s'informe du sujet de leur querelle, il les raccommode, et pour bien s'assurer qu'elle ne renaîtra point, il va avec eux sceller la paix à la manière des soldats, au cabaret.

Cette grande simplicité de mœurs aurait problablement prolongé sa vie, malgré l'extrême délicatesse de sa santé, si

un accident n'en eût accéléré la fin. Une chute faite dans sa chambre lui cassa le col du fémur, et un abcès qui se forma dans l'articulation rendit le mal incurable. Pendant les longues douleurs dont sa mort fut précédée, il ne cessa de montrer cette bienveillance, cette pieuse soumission aux arrêts de la Providence, cette ardeur pour la science, qui ont caractérisé sa vie. Son temps fut partagé entre la prière, le soin de la nouvelle édition de son livre, et l'intérêt pour le sort à venir des élèves qui l'avaient secondé dans ce travail.

M. Haüy est décédé le 3 juin de l'année dernière (1822), à soixante-dix-neuf ans, ne laissant à sa famille qu'un héritage, mais magnifique, cette précieuse collection de cristaux de toutes les variétés, que les dons de presque toute l'Europe pendant vingt ans ont portée à un degré qui n'a point d'égal.

Il a eu pour successeur au Muséum d'histoire naturelle, M. Brongniart, à la Faculté des sciences, M. Beudant, et dans cette académie M. Cordier. Ce sont trois de ses élèves : en effet, et ce sera le dernier trait de son éloge, il serait difficile de trouver aujourd'hui en Europe un minéralogiste digne de ce nom, qui ne le soit sinon immédiatement, au moins par une étude assidue de ses ouvrages et de ses découvertes.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE

M. LE COMTE BERTHOLLET,

Lu à la séance publique du 7 juin 1824;

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

QUELQUE grande, quelque heureuse qu'ait été la carrière de M. Berthollet, son histoire n'en est pas moins uniforme et toute scientifique. Témoin des événements les plus surprenants, porté par eux dans des climats lointains, élevé à de grandes places et à des dignités éminentes, tout ce monde extérieur est peu de chose pour lui en comparaison de la vérité, ou même d'une vérité. Particulier, académicien, sénateur, pair de France, il n'existe que pour méditer et pour découvrir. La science fait naître à chaque instant dans ses mains de ces procédés avantageux, de ces industries fructifiantes qui enrichissent les peuples; mais ce n'est point pour ces applications faciles qu'il la poursuit : c'est pour elle seule : dans l'invention la plus utile il ne voit qu'un théorème de plus; et dans ce théorème, qu'un échelon d'où il s'efforce d'apercevoir et d'atteindre un théorème plus élevé.

Malheureusement, et nous devons en prévenir, il n'est pas toujours facile de le suivre dans ces régions ardues de la science où son génie l'entraîne. On dirait que, familiarisé avec ces routes escarpées et repliées en mille sens divers, sur lesquelles il planait de si haut, il a cru que ses lecteurs s'y retrouveraient aussi aisément que lui, et qu'il pourrait les y introduire sans leur en tracer le plan, ou leur donner quelque fil propre à les y guider.

Essayons cependant de braver ces difficultés, et de faire réfléchir sur des recherches qui ont été si fécondes, un peu de cette lumière que l'auteur a dédaigné d'y répandre. Cette histoire des idées de M. Berthollet n'est pas moins que celle d'une grande partie de la chimie et de la physique modernes. Les écrits où il les a consignées, tiennent une grande place parmi les actes de l'heureuse révolution que ces sciences ont éprouvée de nos jours; et ces monuments d'acquisitions éternelles sont bien autant dignes de notre attention que ces chartes et ces diplômes qui ne récompensent le plus souvent la peine que l'on prend à les déchiffrer, que par quelques traits de plus sur les ridicules et passagères agitations de nos temps barbares.

La France n'était point sa patrie, et il ne lui appartient que par l'accueil qu'elle lui fit, comme à Cassini, à Winslow, à Lagrange, et à tant d'autres hommes illustres dont la gloire est devenue pour nous une propriété nationale.

Il était né à Talloire, près d'Annecy en Savoie, le 9 décembre 1748. Ses études, commencées à Chambéry, se continuèrent au collége des Provinces de Turin, institution des plus recommandables, due à ce sage législateur, Charles Emmanuel III, et d'où le Piémont a tiré la plupart de ces

hommes de talent auxquels il a dû un poids dans la balance de l'Europe, et un rang dans la république des lettres, si supérieurs à ce que l'on devait naturellement attendre de son étendue et de sa population.

A même, comme ses camarades, de choisir parmi des carrières dont quelques-unes pouvaient le conduire aux plus hautes dignités de l'Église et de l'État, M. Berthollet s'en tint à la plus modeste. Il s'attacha à la médecine, moins encore pour les avantages qu'elle pouvait lui offrir, que par l'attrait irrésistible qui l'entraînait déja vers les sciences sur lesquelles elle repose. Ce même attrait, aussitôt qu'il eut pris ses degrés, le fit accourir à Paris, seule ville où il crût pouvoir satisfaire à son aise la passion qui le dominait.

Il n'y avait ni connaissances ni recommandations; mais le célèbre médecin genevois Tronchin, membre étranger de cette académie, y jouissait au plus haut degré de la faveur publique; et le jeune Savoisien pensa que, né si près de Genève, ce voisinage l'autorisait à se réclamer de ce demi-compatriote. Son assurance ne fut pas trompée. Prévenu par son air franc et sa tournure réfléchie, s'attachant à lui à mesure qu'il le connut davantage, Tronchin en fit en quelque sorte son enfant d'adoption; et pour lui assurer d'abord une existence tranquille, il engagea le duc d'Orléans Louis-Philippe, aïeul du duc actuel, près duquel il pouvait tout, à le prendre pour l'un de ses médecins ordinaires.

Ce n'était point le détourner des sciences que de le placer dans une maison où elles étaient héréditaires. Le régent avait travaillé personellement aux expériences de chimie avec Homberg; son fils s'était beaucoup occupé de minéralogie; et Guettard, qui l'avait secondé, était demeuré au service

de son successeur. Ces exemples encourageaient M. Berthollet. Bien convaincu qu'il n'aurait pas besoin des moyens ordinaires dans les cours pour conserver la faveur que son ami venait de lui procurer, et s'étant fait naturaliser (1), il se livra aussitôt, et tout entier, aux travaux dont la succession a rempli cinquante années de la vie la plus active.

Vers cette époque avait commencé dans la chimie l'espèce de fermentation qui en a changé le système et le langage. Lavoisier, excité par les observations nouvelles sur les airs, et les rapprochant de faits anciennement constatés sur les calcinations, que l'école de son temps avait presque mis en oubli, s'était convaincu de la nécessité d'abandonner la théorie dominante. Il en cherchait une meilleure avec cette inquiétude naturelle à un esprit dont le caractère distinctif était de vouloir se rendre clairement compte de chaque chose. Recueillant soigneusement les nouveaux faits, s'efforçant d'en multiplier le nombre par ses propres travaux, il dirigeait surtout son attention vers ceux à l'aide desquels il espérait découvrir quelque issue au labyrinthe où les chimistes s'étaient enfoncés. Enfin, en 1775, il saisit presque subitement dans quelques expériences de Bayen et de Priestley, le point précis que depuis long-temps il cherchait, et que ces laborieux opérateurs n'apercevaient pas eux-mêmes; et il prononça, contre le phlogistique de Stahl, un arrêt qui a été irrévocable. « Les calcinations, les combustions, et la production des acides, dit-il, ne sont que des effets de l'union

(1) Lettres de naturalisation, février 1778; enregistrées au parlement le 21 mars.

de l'air vital avec les corps : la chaleur qui se manifeste dans ces opérations est celle qui auparavant, combinée avec cet air vital, le maintenait à l'état élastique. » Telles furent les deux pierres fondamentales d'un édifice auquel ces dernières années ont seules commencé à faire quelques brèches.

Mais dans les sciences il n'existe d'autorité que la conviction individuelle, et il faut toujours beaucoup de temps pour que la vérité la plus sensible déplace les préventions enracinées par l'habitude. Pendant plusieurs années encore, Lavoisier fut seul de son avis, et nous en avons des preuves remarquables dans les rapports mêmes qu'il fit à l'Académie sur les premiers Mémoires que lui présenta M. Berthollet (1). Le jeune chimiste n'y avait suivi que ses propres idées, comme il le fit toujours ; il adaptait encore à ses expériences ou les théories vulgaires, ou quelques vues isolées que lui suggéraient les faits qu'il observait. Lavoisier, de son côté, ne le combattait qu'avec réserve, et ne proposait que dans des termes modestes les explications simples qui ressortaient de sa théorie. A peine pourrions-nous comprendre aujourd'hui qu'il se crût encore obligé de parler sur ce ton en 1780, cinq ans après qu'il avait démontré, pour tous les esprits non prévenus, l'insuffisance absolue de l'hypothèse du phlogistique, si nous ne voyions, en lisant les Mémoires et les rapports de ses confrères, qu'un autre langage n'eût pas été

(1) Le premier des Mémoires de M. Berthollet, sur l'*Acide tartareux*, est imprimé dans le Journal de Physique de 1776, tom. VII; mais il ne paraît pas avoir été soumis à l'Académie.

de mise avec ces vieux chimistes entêtés de la méthode arbitraire et vague dans laquelle ils avaient toujours raisonné. Imaginerait-on, par exemple, que cette même année 1780, et à l'occasion d'un Mémoire où M. Berthollet annonçait ce fait aujourd'hui si connu, et que la théorie de Lavoisier explique si aisément, qu'en traitant le verre de plomb par le charbon on obtient beaucoup d'air, quoique chacune de ces substances traitée à part n'en donne que très-peu, un docteur Cornette disait gravement à l'Académie que le charbon est obligé, pour réduire le plomb, de se convertir en terre, et d'abandonner l'air qu'il contenait? Ce n'était pas seulement dans ces suppositions ridicules que l'on se jetait pour soutenir un édifice ruiné: l'envie n'agissait pas moins que l'attachement aux vieilles habitudes. On déterrait, pour chagriner Lavoisier, tous les vieux livres où pouvaient se trouver quelques idées analogues aux siennes; et pénétré, comme il était impossible qu'il ne le fût pas, du sentiment de sa force, en parlant avec cette réserve, il donnait moins encore une leçon de modestie que de patience.

Peut-être aussi, dans ce qui regardait M. Berthollet, ne voulait-il pas rebuter par trop de rigueur un esprit dont il mesurait déja la portée, et ne se croyait-il pas bien assuré que, parmi ces explications hasardées et ces faits mal éclaircis, il ne se trouvât quelques germes de vérités qui se développeraient plus tard.

En effet, il s'y en trouvait qui lui servirent à lui-même à compléter sa théorie.

Ainsi M. Berthollet, dans le premier des Mémoires qu'il présenta, où il traitait de l'acide sulfureux (1), montrait qu'il

---

(1) Lu le 5 décembre 1777; Rapport le 7 janvier 1778.

ne diffère de l'acide vitriolique que par une plus grande proportion de soufre; ce qu'il fut aisé de traduire dans la suite par une moindre proportion d'oxigène.

Il s'y en trouvait même qui, si Lavoisier en eût prévu les conséquences, l'auraient engagé à retenir cette théorie dans des limites plus justes.

Ainsi, en faisant voir (1) que l'air obtenu du foie de soufre, c'est-à-dire ce que nous connaissons sous le nom de gaz hydrogène sulfuré, se comporte à la manière des acides, M. Berthollet donnait déja, sans que Lavoisier, ni lui, y prissent garde, le premier indice d'un ordre de faits qui, dans ces derniers temps, a obligé de restreindre beaucoup la doctrine de la formation des acides par l'oxigène.

C'est toujours avec un grand intérêt que l'ami des sciences observe ces tentatives plus ou moins heureuses, ces sortes de tâtonnements par lesquels des hommes de génie approchent quelquefois de la vérité sans y atteindre, et qu'il cherche à trouver leurs premières traces dans ces routes compliquées qui les y ont conduits; mais ce qui, pour Berthollet et pour Lavoisier, donne un caractère particulier à cet intérêt, ce sont les conseils, le ton amical de celui à qui son âge et sa position donnaient de l'avantage, et la docilité du plus jeune et du moins expérimenté. Il est vrai que sa docilité était un peu lente pour les découvertes de Lavoisier, mais elle fut toujours prompte et complète sur ses propres erreurs; et, par une justice distributive qui n'a pas toujours lieu dans ces sortes de matières, sa docilité

(1) Lu le 7 février 1778; Rapport le 28 février.

fut récompensée et sa lenteur punie d'une manière bien remarquable.

Distillant à diverses reprises de l'esprit de vin sur des alcalis fixes, il avait obtenu, chaque fois, un peu d'alcali volatil; et de ce fait mal vu il avait déduit, sur l'origine de cette substance, un système entièrement erroné. Lavoisier, dans son Rapport (1), l'engagea à en différer la publication. Il mit, en effet, ce Mémoire de côté, et ce fut pour lui un très-grand bonheur. Une fois engagé dans cette fausse route, l'amour-propre l'y aurait peut-être retenu, et il n'aurait plus songé à des recherches plus sévères qui lui procurèrent, deux ou trois ans plus tard, l'une de ses plus belles découvertes, celle de la véritable composition de l'alcali volatil.

Dans une autre occasion, ce fut sa lenteur qui le priva évidemment d'une autre grande découverte, qu'il touchait déja en quelque façon. Ses expériences sur la décomposition du nitre (2) présentent des faits dont l'explication est très-simple dans la théorie de l'oxigène, et qui devaient naturellement conduire à prononcer que l'acide nitreux se compose d'oxigène et d'azote, vérité que Cavendish proclama quelque temps après; mais, par une sorte de fatalité, c'étaient ces expériences mêmes sur le nitre qui semblaient à M. Berthollet repousser la théorie nouvelle. L'acide, en se décomposant, rendait libre et élastique un grand volume d'air; il aurait donc dû s'absorber beaucoup de chaleur, et au lieu de cela il s'en dé-

---

(1) 11 mars 1778.

(2) Mémoire lu le 7 septembre 1781, imprimé avec les Mémoires pour cette année en 1784.

veloppait une quantité immense. M. Berthollet cherchait donc d'autres explications; mais les hypothèses où il se jetait pour les trouver étaient si vagues, qu'à la réflexion elles durent lui déplaire à lui-même. Il comprit enfin que, dans ce cas tout-à-fait exceptionnel, l'oxigène se combine avec toute sa chaleur, et ce fut alors seulement qu'il se rendit. Sa conversion complète ne date que de 1785. Dans un Mémoire de cette année, sur l'acide muriatique oxigéné (1), il fait sa profession de foi, et combat même Guyton de Morveau, qui croyait encore à la nécessité du phlogistique, pour expliquer l'action de l'oxide de manganèse sur l'acide muriatique.

Ainsi, ne l'oublions pas : il a fallu dix années à Lavoisier pour ramener à lui, même dans ce que sa doctrine avait d'incontestable, les hommes les plus dignes de l'entendre; et faisons-le remarquer aussi : M. Berthollet, peu de temps après, éprouva par une sorte de talion, un sort semblable. En 1787 (2) il reconnut que l'acide prussique ne contenait point d'oxigène. Ce fait, rapproché de ce qu'il avait observé sur l'hydrogène sulfuré, démontrait de plus en plus que l'oxigène n'est pas le principe nécessaire de l'acidité; mais cette vérité ne put prévaloir. La théorie qui venait de triompher était devenue despotique à son tour, et les esprits dominés par elle se refusèrent à admettre sitôt une exception. Un second travail, fait neuf ans après, sur l'hydrogène sulfuré (3), ne suffit point encore, et il a fallu les belles expé-

---

(1) Lu en 1785, imprimé avec les Mémoires pour cette année en 1788, p. 276.

(2) Mémoire de l'Académie pour 1787, imprimé en 1789, page 148.

(3) 1796, Annales de Chimie, tom. XXV, p. 233.

riences de MM. Thenard et Gay-Lussac, les conceptions élevées de M. Ampère, et toute la force de logique de M. Davy, pour que l'on permît à la chimie de faire ce nouveau pas.

De pareils exemples peuvent consoler bien des amours-propres : ce que nous désirerions, surtout, ce serait qu'ils missent en garde contre une résistance naturelle à l'esprit humain, qui sans doute a été utile quelquefois en repoussant de vains systèmes, mais qui en mainte occasion a opposé aussi aux progrès des sciences des obstacles plus durables que ceux dont nous venons de parler.

Le peu de succès qu'eut alors M. Berthollet est une chose d'autant plus notable, que déja, de l'aveu général, il avait pris son rang parmi les premiers chimistes. C'est de 1785 que date la découverte qui le lui donna, celle que l'alcali volatil est un composé d'un quart à peu près d'azote, et de trois quarts d'hydrogène (1), et surtout que le caractère des substances animales est d'avoir l'azote pour l'un des principes essentiels de leur composition (2) : découverte qui, jointe à celle de Cavendish sur l'acide nitreux, compléta le système de la nouvelle chimie dans tout ce qui paraissait alors nécessaire pour satisfaire aux phénomènes connus.

Nous avons vu dans l'éloge de Cavendish le singulier hasard qui rapprocha ces deux belles expériences, et qui fut tel que Cavendish, ayant annoncé la sienne dans une lettre à M. Berthollet, reçut de celui-ci, par le courrier d'après, la nouvelle de celle qu'il venait de faire.

---

(1) Mémoire lu le 11 juin 1785, imprimé parmi les Mémoires pour cette année en 1788, page 316.

(2) Impr. ibid., p. 331. Lu en décembre 1785.

Remarquons encore ici qu'il n'a tenu à rien que M. Berthollet ne fût prévenu par le célèbre suédois Scheele, et que si cette vérité ne fut pas complétement énoncée par un si habile homme, ce furent aussi des idées théoriques qui l'en empêchèrent. Il avait dit positivement que toutes les fois qu'un corps attire le phlogistique de l'alcali volatil, ou, d'après le nouveau langage, toutes les fois qu'il lui enlève son hydrogène, il reste de l'air phlogistiqué, c'est-à-dire de l'azote; et quelque bizarre qu'une proposition ainsi exprimée dût paraître dans la théorie du phlogistique, Bergman et Kirwan s'étaient bornés à la répéter sans autre réflexion. Dans les sciences, comme dans le monde, c'est souvent pour la plus légère cause que l'on manque la plus belle fortune.

Avec de pareils titres M. Berthollet ne pouvait manquer d'être appelé à ce congrès où l'on essaya de fixer pour la chimie une nomenclature qui représentât méthodiquement les faits qu'elle avait constatés. Comparé au langage extravagant que la chimie avait hérité de l'art hermétique, ce nouvel idiome fut un service réel rendu à la science, et contribua à accélérer l'adoption des nouvelles théories. On ne lui reprochera pas sans doute de n'avoir pu exprimer que ce que l'on savait quand on le créa, et d'avoir été sujet, encore plus promptement qu'aucune autre langue, à de grandes mutations; ce sont des inconvénients communs aux langages les mieux faits. Mais on se demande pourquoi l'on y manqua, sur quelques points déja bien connus, aux principes que l'on avait posés; pourquoi l'on donna un nom simple à l'ammoniaque, pourquoi l'acide nitrique ne reçut pas le nom d'azotique? Et l'on ne peut s'empêcher de voir encore ici un effet de la modestie de M. Berthollet et du peu d'insistance qu'il

mettait à faire prévaloir les choses auxquelles il avait le plus de part.

M. Berthollet était académicien avant cette époque; il avait été élu, en 1780 (1), à la place de Bucquet, et de préférence à Fourcroy, à Quatremère d'Isjonval et à d'autres concurrents qui ont été admis plus tard.

Il avait eu moins de succès dans un autre concours. M. de Buffon, en 1784, lui avait préféré Fourcroy pour la chaire vacante, au Jardin du Roi, par la mort de Macquer. Quelques méchants accusèrent alors Buffon de s'être déterminé parce que le duc d'Orléans ne l'avait point sollicité d'une manière qui satisfît son amour-propre : mais, si un motif aussi puéril fut capable d'agir sur lui, on doit convenir qu'il l'inspira mieux que n'auraient pu faire les réflexions les plus suivies. M. de Buffon et l'Académie firent chacun ce qu'ils devaient. M. Berthollet fut porté à l'Académie parce qu'il enrichissait la science par des recherches profondes, et Fourcroy fut nommé professeur parce que le charme inexprimable attaché à son élocution le rendait plus capable qu'aucun autre d'en inspirer le goût et d'en propager l'étude. Ce sont vraiment ses leçons continuées et multipliées pendant trente ans, suivies par des milliers d'auditeurs, qui ont rendu la chimie populaire. M. Berthollet, peu méthodique dans ses Mémoires, peu disposé à se mettre à la portée des commençants, et qui n'avait aucune facilité à parler, la servait dans son laboratoire, mais ne l'aurait jamais répandue. On en eut la preuve, en 1795, lorsqu'il fut chargé de l'enseigner à l'École normale (2) Le respect que cette grande assemblée por-

(1) Élu le 15 avril, nommé par le Roi le 21.

(2) Sa nomination est du 9 novembre 1794.

tait à la profondeur de son génie, ne put faire illusion sur l'obscurité et le peu d'ordre de ses expositions. On aurait dit que toujours maître de sa matière, pouvant la prendre à volonté par tous ses points, il supposait dans ses auditeurs la même capacité, et c'est toujours de la supposition contraire qu'un professeur doit partir.

Cependant M. Berthollet obtint l'une des places qu'occupait Macquer, celle de commissaire du gouvernement pour les teintures, et en cela encore justice entière fut faite, et un grand service fut rendu au public. Il s'occupa aussitôt d'appliquer au perfectionnement de l'art les progrès récents de la chimie, et dès son début il l'enrichit d'un procédé dont les avantages ont été incalculables. Scheele avait observé que l'acide muriatique déphlogistiqué, comme on le nommait alors, ou le chlore des chimistes d'aujourd'hui, jouit de la propriété de détruire les couleurs végétales. M. Berthollet pensa à tirer parti de cette expérience pour le blanchîment des toiles en y appliquant simplement cet acide. La toile blanchissait à la vérité, mais sa blancheur ne se conservait point. Il dut donc se livrer à des études et à des expériences plus approfondies. Réfléchissant que les procédés ordinaires du blanchîment, ces alternatives de lessives et d'exposition à l'air et à la lumière, ne pouvaient avoir pour but que de rendre solubles et d'enlever les substances qui brunissent les fils, il conçut l'idée que l'acide muriatique déphlogistiqué, qui agit à la fois comme l'air et comme la lumière, pourrait faire en peu de temps ce que ces agents naturels ne font qu'en plusieurs mois, mais que pour compléter son effet il était nécessaire de combiner son action avec celle des lessives, et c'est alors

seulement que naquit un art tout nouveau et d'un produit immense. Le chlore ne blanchit pas seulement avec plus de rapidité; il donne un plus beau blanc; exigeant moins de lessives, il ne fatigue pas tant les étoffes; il rend à l'agriculture les grandes prairies sur lesquelles on étendait les toiles; il s'applique à des toiles déja peintes et qui ont mal réussi, ou qui ont passé de mode, aussi bien qu'à des toiles écrues, et, comme tous les agents énergiques, ce n'est pas aux toiles seulement que son pouvoir s'étend. M. de Born l'a employé à blanchir la cire. M. Chaptal s'en est servi pour rendre leur fraîcheur aux vieux livres, aux estampes enfumées; il l'a mêlé à la pâte de chiffons, et a donné ainsi les moyens de faire du papier très-blanc avec les matériaux les plus communs. Aussi, en peu d'années, son emploi est-il devenu universel, et tellement populaire, qu'il a introduit de nouveaux mots dans le langage usuel. Personne n'ignore aujourd'hui ce que c'est qu'une blanchisserie berthollienne. On dit même dans les ateliers, bertholler, berthollage : on y entretient des ouvriers que l'on y appelle des bertholleurs. Rien ne met plus authentiquement le sceau au mérite d'une découverte.

C'est la seule récompense qu'en ait tirée l'auteur, et il n'en désira point d'autre. Toujours étranger à ce qui n'était pas la science elle-même, il ne prit pas seulement d'intérêt dans ces fabriques élevées sur sa découverte. Les Anglais qui la mirent les premiers en usage, voulaient lui marquer leur reconnaissance par de beaux présents. Tout ce qu'il accepta fut un morceau de toile blanchi par son procédé.

En étudiant sous toutes ses faces cet agent singulier du blanchîment, ce chlore, cet acide muriatique déphlogistiqué ou oxigéné, M. Berthollet fit encore une découverte bien

remarquable : celle d'une combinaison dans laquelle, selon la théorie que l'on s'en faisait, il entre une plus grande proportion d'oxigène, et qu'il appela en conséquence *acide muriatique suroxigéné*. C'est l'acide chlorique de nos chimistes actuels. Mêlés à un corps combustible, ses sels détonnent bien plus fortement que le nitre; bien plus aisément aussi, car il suffit de les frapper. On proposa d'en substituer au nitre dans la composition de la poudre. Cette poudre serait terrible, mais elle est trop dangereuse. La première fois que l'on voulut en faire à Essonne, le choc des pilons la fit éclater; le moulin sauta, et cinq personnes furent victimes de l'essai : on n'a pas osé le renouveler.

Il existe cependant une composition encore plus effrayante, et c'est aussi M. Berthollet qui le premier l'a observée et décrite. C'est l'argent fulminant qui s'offrit à lui pendant ses recherches sur l'alcali volatil, et qu'il a fait connaître en 1788. Depuis long-temps on possédait l'or fulminant qu'une légère chaleur fait éclater avec fracas, mais il n'approche pas de l'argent fulminant. Sur celui-ci le plus léger contact produit une détonation épouvantable. Une fois la préparation faite, on est presque condamné à n'y plus toucher; le moindre grain resté dans un vase peut tuer celui qui le frotterait, et cependant on n'a pas laissé que de tirer parti d'une composition imitée de celle là, le mercure fulminant d'Howard que l'on emploie maintenant à amorcer des fusils de chasse.

En 1790, M. Berthollet réunit toutes ses recherches sur la teinture dans un ouvrage élémentaire en deux volumes. Il y offre une théorie générale des principes de cet art. La doctrine des matières colorantes et de toutes les modifications qu'on peut leur faire subir, celle des mordants nécessaires

pour les fixer y sont exposées en détail; ce que l'on connaissait de plus avantageux alors y est expliqué; et ce qui vaut mieux encore on y trouve les idées qui peuvent conduire à découvrir des pratiques plus simples ou plus efficaces. Il y indique par exemple comment on peut appliquer le bleu de Prusse à la laine et à la soie, et de sa seule indication est né ce genre de teinture que l'on nomme le bleu raymond. Ce livre est depuis 30 ans le manuel de tous ceux qui pratiquent les arts qu'il enseigne; et pour en apprécier les effets, il suffirait de dire que l'Inde, qui seule nous envoyait autrefois des toiles bien colorées, reçoit aujourd'hui les nôtres.

Ces phénomènes singuliers, ces applications de la science à la pratique, avaient fait de M. Berthollet, lorsque la guerre de la révolution éclata, le chimiste le plus connu du public, après Lavoisier; et il était presque impossible que l'on ne recourût pas à lui au moment où la chimie devint pour la guerre un auxiliaire de première nécessité, et lorsqu'il fallut demander à notre sol le salpêtre, la potasse et jusqu'aux matières colorantes; qu'il fallut apprendre à faire en quelques jours toutes les opérations des arts. Chacun se souvient de cette prodigieuse et subite activité qui étonna l'Europe, et arracha des éloges même aux ennemis qu'elle arrêta. M. Berthollet et son ami M. Monge en furent l'ame. C'était d'après leurs instructions que cet immense mouvement était dirigé. Les chimistes que l'on chargeait des essais devenus nécessaires pour tant de procédés nouveaux, ne travaillaient que sur leurs indications; et l'on dit que s'ils avaient voulu suivre tous les secrets qui se révélèrent à eux, des moyens destructifs plus intenses qu'aucun de ceux que l'on possède seraient sortis de leurs laboratoires.

Il ne faut pas croire que l'emploi de ces sortes d'inventions soit en définitive aussi nuisible à l'humanité que leurs effets sont effrayants : c'est tout le contraire. Non-seulement la science en donnant ce genre de défense aux peuples civilisés a été l'égide la plus puissante de la civilisation; non-seulement ce n'est que depuis qu'elle est devenue un des éléments essentiels de l'art de la guerre, qu'elle peut compter sur la protection de tous les gouvernements; mais quelque paradoxale que l'assertion puisse paraître, il serait aisé de prouver que les moyens de destruction que la science fournit, en rendant les combats plus décisifs, ont rendu les guerres moins fréquentes et moins meurtrières.

Pour M. Berthollet, ce qu'il voyait surtout dans ces développements extraordinaires de l'industrie humaine excitée par les plus grands intérêts, c'étaient des expériences chimiques faites sur une grande échelle. Les phénomènes de l'extraction du salpêtre réveillèrent des idées qui déja s'étaient présentées plus d'une fois à lui, et qui embrassaient l'essence même de la force dont la chimie dispose. Il remarquait qu'à mesure que le dissolvant s'empare de plus de sel, la terre retient ce sel avec plus de succès; qu'un dissolvant pur surmonte à son tour cette résistance, et que ces alternatives se répètent à plusieurs reprises. La nécessité d'employer de nouvelle eau bien avant que la première soit saturée, ces quantités toujours moindres que donnent les lavages successifs, lui firent conclure que l'affinité qui cause les dissolutions n'est pas une force absolue; mais qu'il y a dans ces phénomènes un balancement, un antagoniste de forces contraires.

Il avançait ainsi vers sa grande théorie des affinités, qui se

développa tout-à-fait dans son esprit, lorsque l'Égypte lui offrit dans le même genre des phénomènes encore plus caractérisés.

Le général en chef de l'armée d'Italie avait connu M. Berthollet en 1796, à l'occasion d'une commission que celui-ci avait reçue du directoire pour le choix des monuments des arts au prix desquels on avait accordé la paix aux princes de ce pays, et il avait pris plaisir à une simplicité de manières qui s'alliait à tant de profondeur dans les idées. Pendant le séjour de quelques mois qu'il fit à Paris, après le traité de Campo-Formio, il voulut employer ses loisirs à recevoir de lui des leçons de chimie. Il lui fit confidence de son expédition en Égypte, et lui demanda non-seulement de l'y accompagner, mais de choisir des hommes capables de le seconder par leurs talents et leurs connaissances dans une entreprise où toutes les connaissances pouvaient trouver de l'emploi.

On conçoit aisément à quel point devait plaire à un homme tout chimiste l'idée de visiter à son aise la patrie originaire de la chimie, le pays même dont la science a emprunté son nom, celui où Hermès Trismégiste en avait, disait-on, gravé tous les secrets en caractères mystérieux sur des monuments indestructibles. Mais ces motifs qui auraient infailliblement inspiré le même enthousiasme à beaucoup de ceux qu'il devait recruter, il ne lui était pas permis de les révéler. Le lieu de la destination devait rester un secret ; et tout ce qu'il put dire à ceux qu'il engageait, était : *Je serai avec vous.* Ces paroles suffirent. De la part d'un homme d'une franchise et d'une probité aussi connues, elles ne permettaient pas l'hésitation, et c'est sur elles que se forma cette noble association à laquelle,

pour la peindre d'un mot, on doit la grande description de l'Égypte (1).

Cependant les caractères mystérieux d'Hermès demeurèrent pour lui lettres closes; et depuis que l'ingénieuse persévérance d'un de nos jeunes savants est parvenue à en déchiffrer quelques-uns, on est bien désabusé sur la profondeur des oracles qu'ils couvraient; mais dans ce pays extraordinaire la nature parle aussi un langage particulier, et M. Berthollet sut l'entendre.

Les petits lacs placés à l'entrée du désert, et célèbres déja dans l'antiquité, par le natron, ou le carbonate de soude, dont ils sont des mines inépuisables, attirèrent toute son attention (2) C'est du muriate de soude, c'est-à-dire du sel ordinaire, qui, en se décomposant sans cesse fournit continuellement autant de carbonate de soude que l'on vient en enlever; et cependant il ne se trouve à la portée du sel que du carbonate de chaux, de la pierre calcaire, qui, dans les circonstances ordinaires, ne possède point la force propre à opérer cette décomposition, mais qui la prend lorsqu'à une température donnée l'eau salée filtre au travers de ses pores. La grande quantité relative de la chaux donne donc ici plus d'intensité à son action chimique : l'acide ne demeure pas exclusivement attaché à la base pour laquelle il a le plus d'affinité, à la soude; il se partage entre elle et cette autre base que la nature lui présente en grande masse, la chaux. C'était

---

(1) Le départ eut, comme on sait, lieu, au mois de mai 1798; on arriva devant Alexandrie le 19 juin.

(2) Il les visita avec MM. Andréossi, Fourier, Redouté jeune, etc., en janvier 1799.

encore un effet de ce balancement de forces déja observé dans les dissolutions du salpêtre, un nouveau pas dans cette appréciation des causes bien plus compliquées que l'on ne croyait, qui opèrent dans les phénomènes chimiques.

C'était aussi un pas de plus dans un des arts les plus utiles à la société, art que Leblanc avait déja mis en pratique, mais qui depuis le retour d'Égypte a pris en France une extension surprenante. Je veux parler de la décomposition du sel marin pour en extraire la soude.

Le sel marin, que la nature nous donne avec tant de prodigalité, ayant la soude pour base, pouvait en fournir des quantités immenses ; mais tant que l'on n'avait point appris à l'extraire, toute celle qu'exigent nos verreries et nos savonneries nous venait à grands frais de l'étranger où on la tirait de la cendre des plantes qui croissent sur les bords de la mer, et qui décomposent le sel marin par la puissance de la végétation. Aujourd'hui des procédés analogues à ceux que la nature emploie en Égypte, ou d'autres qui produisent les mêmes effets, nous donnent à la fois, et aussi abondamment qu'on le veut, toute la soude nécessaire à nos fabriques de verre, de savon, et à nos lessives, et tout l'acide muriatique qui peut s'employer dans nos blanchisseries. On a calculé à plus de 40 millions le bénéfice que la seule extraction de la soude procure à notre commerce.

Mais M. Berthollet était accoutumé à répandre en se jouant ces sortes de bienfaits. Ce qui le préoccupait, lui, c'étaient ses vues sur les lois de l'affinité, sans cesse présentes à son esprit, et que ses dernières observations mûrirent à son gré. Soumises d'abord en esquisse à l'institut du Caire, publiées sous une forme plus étendue dans nos Mémoires de 1801,

appuyées sur un grand nombre de faits et d'expériences nouvelles, elles ont produit enfin, en 1803, la *Statique chimique,* cet ouvrage si capital, mais en même temps si abstrait et pour l'analyse duquel j'ai besoin d'implorer d'avance toute l'indulgence de mon auditoire.

Ce titre même de *Statique* en annonce l'objet: c'est ce balancement, cette espèce d'équilibre entre les forces qui maintiennent l'état d'un composé et celles qui tendent à en séparer les éléments.

Cette force de la nature en vertu de laquelle s'opèrent les dissolutions et les combinaisons, a été nommée *affinité* par les chimistes; et dès le commencement du dernier siècle, un membre de cette Académie, *Étienne-François Geoffroy,* avait eu l'heureuse pensée de dresser une table où les substances sont rangées d'après le degré d'affinité qu'elles ont l'une pour l'autre.

Un fait assez curieux et où l'on voit un singulier effet de l'esprit de système, c'est que M. de Fontenelle, dans un éloge assez long de Geoffroy, semble ne parler qu'à regret de cet ouvrage sans contredit le principal de cet académicien, et se borne à dire *qu'il fit de la peine à plusieurs, parce qu'on prit ces affinités pour des attractions déguisées.*

Une opinion assurément bien contraire a succédé à cette répugnance, car pendant long-temps on s'est attaché aux affinités, précisément parce qu'on les croyait des effets de la gravitation universelle, lorsqu'elle s'exerce entre des molécules de figures déterminées, qui s'attirent à des distances prochaines. Nous pourrions dire aussi que *plusieurs reviennent maintenant de cette supposition.* Ce qui est certain, c'est que, juste ou non, elle ne donne à la science

aucun moyen de se rendre un compte précis de ces phénomènes ni de les représenter par le calcul. On est donc réduit à les constater par l'observation, et Bergman, le plus ingénieux de ceux qui s'étaient occupés de ramener les affinités à des lois déduites de l'expérience, avait cru pouvoir les considérer encore à la manière de Geoffroy comme s'exerçant par des préférences, et de façon qu'un corps dont l'affinité pour un autre est plus grande fût capable de l'enlever à tout autre corps dont l'affinité pour lui serait moindre, et de rendre ainsi ce troisième corps entièrement libre. Que si l'on rapproche deux corps composés chacun de deux éléments, ce sera la somme des affinités simples de ces éléments pris deux à deux qui décidera s'ils conserveront leur union, ou si par une double décomposition ils contracteront de unions nouvelles.

Rien de tout cela n'est la véritable expression des faits, selon M. Berthollet. L'action chimique s'exerce en raison de l'affinité et de la quantité de chacun des corps mis en contact. L'affinité d'un corps pour un autre peut s'exprimer par la quantité qu'il doit en dissoudre pour en être saturé, ou, en d'autres termes, par sa capacité de saturation. Lorsque deux acides agissent à la fois sur une base, ils agissent chacun en raison de leur masse et de leur capacité de saturation, mais ces trois substances demeureraient unies et ne formeraient qu'un même liquide, et il en serait de même de la dissolution commune de deux composés binaires : leurs quatre substances demeureraient ensemble, s'il ne survenait pour les séparer des causes étrangères à leurs affinités mutuelles. Mais ces trois, ces quatre substances peuvent former, prises deux à deux, diverses combinaisons ; et si l'une de ces

combinaisons est de nature, dans les circonstances données, à devenir cohérente ou à se changer en un fluide élastique, il se fait alors un précipité ou il s'élève une vapeur, et le liquide ne garde que les substances que ces causes n'en ont pas séparées. Rarement encore la séparation est-elle complète. Pour qu'elle le soit, il faut que l'échange des combinaisons n'ait laissé au liquide aucune force dissolvante sur le composé qui tend à se précipiter, ou sur celui qui cherche à devenir élastique. Ce n'est donc point une affinité élective qui sépare les combinaisons nouvelles, mais leur propre nature, leur plus ou moins de tendance à changer d'état. Il en est de même des simples dissolutions. L'affinité considérée à elle seule les opérerait dans toute sorte de proportions, si telle de ces proportions, à l'instant où elle se réalise, n'amenait pas un effet qui contrarie ceux de l'affinité, comme une cristallisation ou une évaporation. C'est alors seulement qu'il se forme des composés à proportions fixes.

Pour donner en exemple un des effets les plus simples de cette tendance à la cohésion, il suffit de citer le mélange de l'eau avec l'alcohol. Il se fait en toutes proportions, tant que le froid n'est pas assez grand pour congeler l'eau; mais si cette circonstance arrive, l'eau qui tend à devenir solide est obligée de se séparer de l'acohol, qui ne peut prendre cet état que par un froid infiniment plus grand. Des phénomènes semblables dans les dissolutions sont ce qui a fait illusion aux chimites, et les a engagés à admettre des affinités électives, agissant d'elles-mêmes par proportions fixes.

Telles sont, dans leur plus simple expression, les idées fondamentales de M. Berthollet; mais le détail des applications qu'il en fait, et des expériences qu'il imagine pour en

démontrer l'exactitude, serait infini. Il est conduit à apprécier séparément toutes les circonstances qui amènent les combinaisons à se solidifier ou à prendre l'état élastique, et les variations que ces états eux-mêmes apportent aux affinités des substances ; il montre comment la chaleur, qui naturellement devrait être contraire à l'affinité, puisqu'elle écarte les molécules, la favorise néanmoins dans certains cas, parce qu'elle détruit la cohésion qui est un autre antagoniste de cette même affinité. Elle agit alors par une sorte de diversion; mais son action diffère en raison de cette atteinte plus ou moins forte qu'elle porte à la cohésion, ou du plus ou moins de solubilité qu'elle donne aux diverses substances dans ses divers degrés, et voilà pourquoi les affinités réciproques changent avec les températures. La lumière est aussi au nombre des agents qui modifient les affinités. Pour estimer la force relative des acides et des alcalis, il est obligé de déterminer la quantité réelle de ces substances qui existent dans les liquides qui portent leur nom, et par conséquent de les réduire à l'état de pureté, problème des plus difficiles à cause de la presque impossibilité de les priver entièrement d'eau; et des expériences qu'il fait à ce sujet il arrive à ce résultat que l'acidité et l'alcalinité se détruisent mutuellement, ou, en d'autres termes, se saturent dans une proportion fixe, non-seulement quand il s'agit de l'action d'un certain acide sur une certaine base, mais que cette proportion reste la même pour chaque acide par rapport à toutes les bases, et pour chaque base par rapport à tous les acides. L'alcalinité et l'acidité sont donc des propriétés de nature contraire, mais d'une nature toujours la même dans chacun des deux genres,

qui varie selon les espèces pour l'intensité, mais qui dans chacune de ces espèces conserve toujours la même intensité, en sorte que l'acide qui prend plus ou moins de telle base pour se saturer que tel autre acide, prend aussi plus ou moins de toutes les autres bases, et toujours dans la même proportion : proposition que Richter avait déja énoncée en d'autres termes, et qui conduira probablement encore à une nouvelle chimie, celle de l'électricité, à laquelle les travaux de MM. Davy et Berzelius ont donné un crédit qui s'accroît de jour en jour.

Je n'ai pas besoin de dire que ce résumé, dont j'ai peut-être déja à excuser la longueur, ne donne encore qu'une idée bien sommaire et très-légère de conceptions si profondes, et dont l'objet est si vaste et si compliqué. Ce n'est pas en quelques minutes qu'il est possible d'exposer dans son ensemble une théorie qui occupe depuis vingt ans presque tous les chimistes. Les uns la défendent, les autres la combattent ou la restreignent; mais tous l'admirent, et la chaleur même qu'ils mettent à la discuter indique assez quelle est son importance et sa grandeur.

M. Berthollet n'a cessé, même après la publication de son livre, d'envisager de ce point de vue les phénomènes chimiques. La force avec laquelle le charbon retient l'hydrogène; les combinaisons sous lesquelles cet hydrogène en est chassé par la distillation remplirent encore ses loisirs (1), et furent dans la suite d'un grand secours à ceux qui s'occupèrent de

(1) Mémoires sur le charbon et le gaz hydrogènes carbonés, dans les Mémoires de l'Institut, tome IV.

perfectionner et de rendre usuel l'art de l'éclairage par le gaz inflammable. Il semblait de sa destinée que ses recherches les plus abstraites comme les plus simples devinssent aussitôt profitables et sur une échelle immense. En s'occupant du charbon et de ses propriétés antiseptiques, il imagina un jour qu'en charbonnant l'intérieur des barils on pourrait conserver l'eau plus long-temps dans les voyages de long cours. L'amiral Krusenstern a mis cette idée en pratique avec les précautions convenables, et elle lui a parfaitement réussi.

Enfin, dans un dernier Mémoire sur l'analyse des substances végétales et animales (1), il a préludé en quelque sorte aux méthodes découvertes par MM. Gay Lussac et Thénard pour réduire à leurs éléments par la combustion, ces combinaisons compliquées.

Ainsi se sont passées les cinquante années que M. Berthollet a consacrées sans relâche à sa science favorite, voyant alternativement naître de ses recherches, ou quelque vérité neuve, ou quelque aperçu profond, ou quelque procédé d'un emploi immédiat. On pourrait marquer chacune de ces cinquante années par quelque découverte; car s'il y en eut de vides, il y en eut aussi qui en produisirent plusieurs.

Qu'il me soit permis de reprendre ici, en abrégé, les moments principaux de cette savante et glorieuse chronologie. Il en est que je ne puis présenter que dans ce tableau.

M. Berthollet a aperçu la vraie nature des combinaisons savonneuses; il a prouvé que l'acide phosphorique est tout formé dans les produits des animaux; il a indiqué les procé-

(1) Mémoires de l'Institut de 1810, p. 121.

dés dont on se sert encore aujourd'hui pour faire cristalliser les alcalis fixes, et ceux par lesquels on leur donne une causticité parfaite; il a fait voir que l'acide nitrique se décompose dans la détonation; il a découvert l'acide muriatique sur-oxigéné et ses étonnants phénomènes, l'argent fulminant et ses terribles explosions; il a décomposé l'ammoniaque et fixé la proportion de ses éléments; il a montré que l'un de ces éléments, l'azote, est le caractère essentiel des substances animales, et complété ainsi les faits fondamentaux du nouveau système chimique; il a prouvé qu'une même substance, un oxide métallique, par exemple, peut jouer alternativement, dans les cambinaisons, le rôle d'un acide, ou celui d'un alcali; il a soutenu et démontré, malgré l'erreur devenue générale, que l'oxigène n'est point la cause unique et essentielle de l'acidité, mais que le gaz hydrogène sulfuré remplit toutes les fonctions d'un véritable acide, bien qu'il n'entre point d'oxigène dans sa composition, et que l'acide prussique, reconnu pour acide par tous les chimistes, ne contient pas non plus d'oxigène, et par là il a préparé à la chimie un âge qui ne sera ni moins riche ni moins brillant que celui dont il a été témoin: enfin il a présenté des idées plus précises que l'on n'en avait jamais eues, de la force principale qui produit toutes les actions chimiques, de cette affinité que depuis si long-temps les chimistes employaient sans la bien connaître, et à côté de cette longue série de vérités théoriques, il a donné à la société l'art du blanchîment par le chlore; il a aidé à perfectionner ceux de la teinture par le bleu de prusse, du monnayage, de l'extraction de la soude, de l'éclairage par le gaz.

Ce n'est là qu'une table de matières et incomplète encore:

le temps qui m'est accordé ne me permet rien de plus. Mais combien d'hommes célèbres pourraient-ils en fournir une aussi longue, et quel est celui que l'on puisse offrir avec une plus belle liste aux hommages de la postérité ?

Lorsqu'on est entouré d'un tel cortége, et que l'on a une place aussi assurée dans l'opinion et dans la reconnaissance publique, il n'est pas difficile de conserver le calme de l'esprit, et de n'être point troublé par les choses du dehors. C'est une tranquillité dont M. Berthollet a joui peut-être plus qu'aucun homme dans sa position. Toujours prêt à remplir ses devoirs, toujours courageux, mais toujours désintéressé, ce qui lui arriva d'heureux ne fut point provoqué par ses sollicitations, et son propre avantage ne le retint jamais quand il lui fut possible d'empêcher le mal d'autrui. Dans le temps où la terreur régnait seule en France, il ne craignit point de dire la vérité à ceux dont un mot donnait la mort ; et l'affection qu'à une autre époque lui montra l'homme qui distribuait des couronnes, ne l'engagea point à lui faire sa cour.

Peu de temps avant le 9 thermidor, lorsque des hommes de sang en étaient venus à supposer à chaque instant des conspirations, même sans intérêt, et comme pour s'entretenir dans l'habitude du crime, un dépôt sableux, trouvé dans des barriques d'eau-de-vie destinées à l'armée, fit avancer qu'on avait voulu faire périr les soldats, et déja nombre d'individus étaient dans les fers et attendaient leur sentence. M. Berthollet, chargé d'analyser cette eau-de-vie, prouva, dans un rapport raisonné, qu'elle ne contenait rien de nuisible. Le comité de salut public, dont ce rapport dérangeait les plans, fait venir l'auteur : « Comment oses-tu soutenir, lui dit Ro-

bespierre, que cette eau-de-vie que tu vois si trouble ne contient pas de poison ? » Pour toute réponse il en avala un verre, en disant : « Je n'en ai jamais tant bu. » — « Tu as bien du courage ! » s'écrie le féroce dictateur. — Il répliqua : « J'en ai eu davantage quand j'ai écrit mon rapport : » et la conversation finit là : peut-être ne se serait-elle terminée qu'au tribunal révolutionnaire, si l'on avait eu moins de besoin de ses services.

Il ne manquait en effet de courage d'aucune sorte. Momentanément chargé, après le 9 thermidor, de la direction de l'agriculture (1), il affronta, pour conserver les parcs de Sceaux et de Versailles, tout ce qui subsistait dans la convention de la fureur révolutionnaire ; et celui de Sceaux n'a été détruit que pendant son absence. En Égypte, Monge et lui ne s'exposaient pas moins que les militaires de profession : ils se montraient partout. Leurs noms étaient devenus célèbres dans l'armée, et l'on était si accoutumé à les prononcer ensemble, que bien des soldats croyaient qu'ils n'en faisaient qu'un, et ne désignaient qu'un seul homme ; un homme que, même en le respectant, ils n'aimaient pas trop, parce que c'était lui, disaient-ils, qui avait donné au général l'idée de venir dans ce maudit pays. Remontant le Nil dans une barque que des Mameloucks fusillaient de la rive, on vit M. Berthollet ramasser tranquillement des pierres et en remplir ses poches. « Que faites-vous là ? » lui dit quelqu'un. — « Si je suis tué, je veux aller au fond, et que ces barbares ne maltraitent pas mon corps. »

(1) Le 22 septembre 1799.

La peste, dont il était plus permis de s'effrayer que des Mameloucks, ne l'émut pas davantage, et il n'eut pas seulement le courage de la braver; il eut celui de ne pas vouloir la méconnaître, lorsque, pendant l'expédition de Syrie, le général cherchait à se dissimuler à lui-même et à cacher à ses troupes ce funeste secret. Sa franchise lui attira, dans un conseil, les plus violents reproches. Il répondit avec son sang-froid ordinaire : « Dans huit jours je ne serai malheureusement que trop vengé. » En effet, l'entreprise sur Acre ayant échoué, la contagion faisant chaque jour de nouvelles victimes, une prompte retraite put seule sauver ce qui restait de l'armée (1). Ce fut une nouvelle épreuve pour M. Berthollet. Obligé de céder à des généraux blessés le carrosse dans lequel il était venu, et de traverser à pied vingt lieues de désert, il fit ce chemin comme il aurait fait une promenade.

Rien ne plaît davantage que cette résignation dans la souffrance, à un chef d'un caractère absolu, et qui ne voit que des instruments dans les autres hommes. Et combien surtout n'était-elle pas précieuse de la part d'un personnage qu'il pouvait à tant de titres donner en exemple! Devenu inséparable de M. Berthollet, il le prit avec lui, et l'embarqua à l'improviste (2) pour ce retour qui devait produire en France une si prompte et si grande révolution. Dans cette immense puissance où il fut bientôt porté, au milieu de ce tourbillon qui ne lui permettait de prendre de rien une connaissance approfondie, son chimiste d'Egypte était devenu pour lui

---

(1) On se retira le 20 mai 1799.

(2) 23 août 1799.

une sorte de savant officiel ; et si quelqu'un ne lui faisait pas sur un objet scientifique une réponse assez précise à son gré, il avait coutume de dire, et quelquefois avec humeur : *Je le demanderai à Berthollet.* Il s'était habitué à placer toutes les découvertes chimiques sur sa tête ; et il a fallu plus d'une fois que M. Berthollet, qui ne voulait point se parer du bien d'autrui, lui répétât les noms des véritables auteurs.

En de telles circonstances, un peu d'assiduité l'aurait conduit à une aussi haute fortune qu'aucun des amis du nouveau maître. Ce fut le moment qu'il prit pour se confiner à la campagne. Nous avons tous été témoins de sa répugnance pour le métier de courtisan, et comment on lui fit, presque malgré lui, sa part dans les magnifiques récompenses du temps. Nommé successivement administrateur des monnaies, sénateur (1), grand-officier de la Légion-d'Honneur (2), titulaire de la sénatorerie de Montpellier (3), grand-croix de l'ordre de la réunion (4), il conserva toujours et les mêmes manières et les mêmes amis. Sa vanité ne fut pas mise en jeu plus que son ambition. Lorsque ceux qui se trouvaient dans une position élevée reçurent des titres et des insignes héréditaires, et que chacun s'efforçait de faire placer dans ses armoiries quelque emblême des faits dont il tirait le plus de gloire, il ne voulut mettre dans les siennes que son chien, que l'emblême de l'amitié et de la fidélité.

Aussi était-ce au milieu de l'amitié qu'il vivait dans sa retraite, mais d'une amitié encore toute chimique : il y avait

---

(1) Décembre 1799. — (2) 14 juin 1804. — (3) 14 mai 1806.

(4) 3 avril 1813. Il a été nommé pair de France le 4 juin 1814.

construit un laboratoire; il y formait à la science des jeunes gens dont il avait pressenti le mérite, et plus d'un chimiste aujourd'hui renommé lui a dû la première direction de son génie. Il y exerçait une noble hospitalité envers les chimistes étrangers, et même envers ceux d'entre eux qui avaient le plus combattu ses idées; car il possédait par-dessus tout cette qualité plus rare encore que le courage et que la modération dans les désirs, de ne point repousser la vérité, quand elle lui venait d'autrui. On a vu un homme célèbre qui avait été de ses antagonistes, et qui ne l'abordait pas sans quelque embarras, surpris et pénétré jusqu'aux larmes de l'accueil que lui fit ce vieillard respectacle.

Le monde savant doit à ces réunions les trois excellents volumes connus sous le titre de *Mémoires de la société d'Arcueil.* M. Berthollet fut le promoteur et le président de cette société. Il y trouvait dit-il dans sa préface, la douce satisfaction de contribuer encore à la fin de sa carrière aux progrès des sciences auxquelles il s'était dévoué, plus efficacement qu'il n'aurait pu le faire par ses propres travaux; dernier trait de modestie, car les mémoires qu'il a insérés dans ces volumes ne sont inférieurs ni à ceux qui les avaient précédés, ni même à ceux de ses jeunes émules.

Il ne fallait rien moins qu'un grand chagrin domestique pour altérer le bonheur d'un tel homme; et comme s'il ne devait point y avoir d'existence exempte de revers, il en éprouva un et des plus cruels, la mort de son fils unique arrivée avec des circonstances déchirantes. Dès-lors toute gaieté fut perdue pour lui. Pendant le peu d'années qu'il survécut, son air morne et silencieux contrastait péniblement avec ses habitudes antérieures; on ne le vit plus sourire;

quelquefois une larme s'échappait malgré lui ; une discussion importante de physique ou de chimie, quelque expérience neuve et riche en conséquences pouvait seule fixer assez ses idées, pour le distraire de sa douleur.

Sa dernière maladie a été de celles qui surprennent et désespèrent toujours la médecine. Un ulcère charbonneux venu à la suite d'une fièvre légère l'a dévoré lentement pendant plusieurs mois, mais sans lui arracher un mouvement d'impatience. Cette mort qui arrivait à lui par le chemin de la douleur, dont, comme médecin, il pouvait calculer les pas et prévoir le moment, il l'a envisagée avec autant de constance que les souffrances du désert ou les menaces des barbares.

Il est décédé le 6 novembre 1822, âgé de 74 ans.

Sa place parmi nous a été donnée à M. Darcet, héritier d'un nom célèbre en chimie dont le souvenir est particulièrement cher à l'Académie, et qui s'est montré digne de le porter, par ses travaux utiles autant qu'ingénieux.

ÉLOGE HISTORIQUE

DE

M. LE COMTE DE LACÉPÈDE,

Lu à la séance publique de l'Académie royale des sciences, le 5 juin 1826.

PAR M. LE BARON CUVIER, SECRÉTAIRE PERPÉTUEL.

CHARGÉS de consigner dans les annales des sciences les principaux traits de la vie de nos confrères, et les services que leurs travaux ont rendus à l'esprit humain, nous nous acquittons d'un devoir si honorable avec le zèle d'amis et de disciples pleins de respect pour leur mémoire; mais le temps qui nous est départi dans ces solennités littéraires, ne nous permet ni de présenter tous ces hommes utiles à la reconnaissance du public, ni même de lire en entier des biographies déja si courtes pour tout ce qu'elles devraient faire connaître. C'est en tête de l'éloge d'un savant et d'un homme d'État, dont la vie a été si longue et si pleine, et qui se recommande par tant de bonnes actions et tant de beaux ouvrages, qu'il nous a surtout paru nécessaire de rappeler ces circonstances. Heureusement c'est aussi dans un pareil éloge

qu'il y a le moins d'inconvénient à se restreindre : le souvenir d'un homme tel que M. de Lacépède est dans tous les cœurs, et il n'est aucun de mes auditeurs qui ne puisse suppléer à ce que la brièveté du temps me permettra d'omettre.

Bernard-Germain-Étienne de LAVILLE, si connu dans le monde et dans les sciences sous le titre de Comte de LACÉPÈDE, naquit à Agen le 26 décembre 1756, de Jean-Joseph-Médard de LAVILLE, lieutenant-général de la Sénéchaussée, et de Marie de LAFOND.

Sa famille était considérée dans sa province et y avait contracté des alliances distinguées; mais M. de Lacépède trouva dans les papiers qu'elle conservait des traces d'une origine beaucoup plus illustre qu'on ne pouvait la lui supposer. Il crut y découvrir que c'était une branche d'une maison connue en Lorraine dès le onzième siècle, et qui prenait son nom du bourg de *Ville-sur-Ilon*, dans le diocèse de Verdun, maison qui a fourni un régent à la Lorraine, et qui s'est alliée aux princes de Bourgogne, de Lorraine et de Bade, ainsi qu'à beaucoup de familles de notre première noblesse. M. de Lacépède s'y rattachait par Arnaud de Ville, seigneur de Domp-Julien, que le roi Charles VIII, pendant sa possession éphémère du royaume de Naples, avait fait duc de Monte-San-Giovanni, et qui, étant devenu gouverneur de Montélimar, se rendit célèbre en histoire naturelle, pour avoir escaladé le premier le mont Aiguille, ce rocher inaccessible qui passait pour l'une des sept merveilles du Dauphiné (1). Nous avons même vu un arbre généalogique dressé en Allemagne

(1) Voyez les Mémoires de l'Académie des Belles-Lettres, t. VI, p. 76.

où notre académicien prenait le titre de duc de Mont-Saint-Jean, et où il écartelait les armes de *Ville* de celles de Lorraine et de Bourgogne ancien. Mais, quoi qu'il en soit d'une filiation qui ne paraît pas avoir été constatée dans les formes reçues en France, nous pouvons dire que cette recherche ne fut pour M. de Lacépède qu'une affaire de curiosité, et que loin de s'en prévaloir, même comme le disait un homme d'une haute extraction, contre la vanité des autres, il entra dans le monde bien résolu à ne marquer sa naissance que par une politesse exquise. Chacun peut se souvenir que c'est une résolution à laquelle il n'a jamais manqué; quelques-uns ont pu trouver même qu'il mettait à la remplir une sorte de superstition; et il est très-vrai qu'il ne passait pas volontairement le premier à une porte, qu'il rendait toujours le dernier salut, et qu'il n'y avait point d'auteur, si vain qu'il fût, qui, lui présentant un ouvrage, ne s'étonnât lui-même des éloges qu'il en recevait. Mais ce qui n'est pas moins vrai, c'est que ces démonstrations n'avaient rien de calculé ni de factice, et qu'elles prenaient leur source dans un sentiment profond de bienveillance et de bonne opinion des autres : aussi tout le monde rendait-il à M. de Lacépède la justice de reconnaître qu'il était encore plus obligeant que poli ; et qu'il rendait plus de services, qu'il répandait plus de bienfaits qu'il ne donnait d'éloges.

Ces dispositions affectueuses qui l'ont animé si long-temps, et qu'il a portées plus loin peut-être qu'aucun autre homme, avaient été profondément imprimées dans son cœur par sa première éducation. M. de Laville, son père, veuf de bonne heure, l'élevait sous ses yeux avec une tendresse d'autant plus vive qu'il retrouvait en lui l'image d'une épouse qu'il avait fort aimée. Il exigeait des maîtres qu'il

lui donnait autant de douceur que de lumières, et ne lui laissait voir que des enfants dont les sentiments répondissent à ceux qu'il désirait lui inspirer. M. de Chabannes, évêque d'Agen, et ami de M. de Laville, le secondait dans ces attentions recherchées: il recevait le jeune Lacépède, l'encourageait dans ses études, et lui permettait de se servir de sa bibliothèque. Mais tout en ayant l'air de ne pas le gêner dans le choix de ses lectures, M. de Chabannes et M. de Laville s'arrangeaient pour qu'il ne mît la main que sur des livres excellents. C'est ainsi que pendant toute sa jeunesse il n'avait eu occasion de se faire l'idée ni d'un méchant homme, ni d'un mauvais auteur. A douze et à treize ans, selon ce qu'il dit lui-même dans des Mémoires que nous avons sous les yeux, il se figurait encore que tous les poètes ressemblaient à Corneille ou à Racine, tous les historiens à Bossuet, tous les moralistes à Fénélon; et sans doute il imaginait aussi que l'ambition et le désir de la gloire ne produisent pas sur les hommes d'autres effets que ceux que l'émulation avait fait naître parmi ses jeunes camarades.

Les occasions de se désabuser ne lui manquèrent probablement pas pendant sa longue vie et dans ses diverses carrières; mais elles ne parvinrent point à effacer tout-à-fait les douces illusions de son enfance. Son premier mouvement a toujours été celui d'un optimiste qui ne pouvait croire ni à de mauvais sentiments ni à de mauvaises intentions; à peine se permettait-il de supposer que l'on pût se tromper; et ces préventions d'un genre si rare l'ont dirigé dans ses actions et dans ses écrits non moins que dans ses habitudes de société. Plus d'une fois, dans ses ouvrages, il lui est échappé quelque erreur pour n'avoir pas voulu révoquer en doute le témoi-

gnage d'un autre écrivain ; et dans les affaires il était toujours le premier à chercher des excuses pour ceux qui le contrariaient. Un homme d'esprit a dit de lui qu'il ne savait pas trouver de tort à un autre, et cela était vrai même de ses ennemis ou de ses détracteurs.

Buffon était du nombre des auteurs que de bonne heure on lui avait laissé lire : il le portait avec lui dans ses promenades ; c'était au milieu du plus beau pays du monde, sur les bords de cette vallée si féconde de la Garonne, en face de ses collines si riches, de cette vue que les cimes des Pyrénées terminent si majestueusement, qu'il se pénétrait des tableaux éloquents de ce grand écrivain; sa passion pour les beautés de la nature naquit donc en même temps que son admiration pour le grand peintre à qui il devait d'en avoir plus vivement éprouvé les jouissances, et ces deux sentiments demeurèrent toujours unis dans son ame. Il prit Buffon pour maître et pour modèle; il le lut et le relut au point de le savoir par cœur, et dans la suite il en porta l'imitation jusqu'à calquer la coupe et la disposition générale de ses écrits sur celle de l'Histoire naturelle.

Cependant les circonstances avaient encore éveillé en lui un autre goût qui ne convenait pas moins à une imagination jeune et méridionale: celui de la musique. Son père, son précepteur, presque tous ses parents étaient musiciens; ils se réunissaient souvent pour exécuter des concerts. Le jeune Lacépède les écoutait avec un plaisir inexprimable, et bientôt la musique devint pour lui une seconde langue, qu'il écrivit et qu'il parla avec une égale facilité. On aimait à chanter ses airs, à l'entendre toucher du piano ou de l'orgue. La ville entière d'Agen applaudit à un motet qu'on l'avait

prié de composer pour une cérémonie ecclésiastique, et de succès en succès il avait été conduit jusqu'au projet hardi de remettre Armide en musique, lorsqu'il apprit par les journaux que Gluck travaillait aussi à cet opéra. Cette nouvelle le fit renoncer à son entreprise; mais il ne put résister à la tentation de communiquer ses essais à ce grand compositeur, et il en reçut le compliment qui pouvait le toucher le plus: Gluck trouva que le jeune amateur s'était plus d'une fois rencontré avec lui dans ses idées.

Pendant le même temps, M. de Lacépède s'adonnait avec ardeur à la physique. Dès l'âge de douze ou treize ans, et sous les auspices de M. de Chabannes, il avait formé avec les jeunes camarades que la prévoyante sagesse de son père lui avait choisis, une espèce d'académie dont plusieurs membres sont devenus ensuite membres ou correspondants de l'Institut. Leurs occupations d'abord conformes à leur âge devinrent par degrés plus sérieuses : ils faisaient ensemble des expériences sur l'électricité, sur l'aimant, et sur les autres sujets qui occupaient le plus alors les physiciens; et M. de Lacépède ayant tiré de ces expériences quelques conclusions qui lui semblèrent nouvelles, le choix de celui à qui il devait les soumettre ne fut pas douteux : il les adressa dans un Mémoire au grand naturaliste dont il admirait tant le génie, et il en reçut une réponse non moint flatteuse que celle du grand musicien. Buffon le cita même en termes honorables dans quelques endroits de ses Suppléments.

C'était, on le croira volontiers, plus d'encouragement qu'il n'en fallait pour exalter un homme de vingt ans. Plein d'espérance et de feu, il accourt à Paris avec ses partitions et ses registres d'expériences; il y arrive dans la nuit, et le matin

de bonne heure il est au Jardin du Roi. Buffon, le voyant si jeune, fait semblant de croire qu'il est le fils de celui qui lui avait écrit; il le comble d'éloges. Une heure après, chez Gluck, il en est embrassé avec tendresse; il s'entend dire qu'il a mieux réussi que Gluck lui-même dans le récitatif: *Il est enfin dans ma puissance*, que Jean-Jacques Rousseau a rendu si célèbre. Le même jour M. de Montazet, archevêque de Lyon, son parent, membre de l'Académie française, le garde à un dîner où se devait trouver l'élite des académiciens. On y lit des morceaux de poésie et d'éloquence: il y prend part à une de ces conversations vives et nourries si rares ailleurs que dans une grande capitale. Enfin il passe le soir dans la loge de Gluck à entendre une représentation d'Alceste. Cette journée ressembla à un enchantement continuel; il était transporté, et ce fut au milieu de ce bonheur qu'il fit le vœu de se consacrer désormais à la double carrière de la science et de l'art musical.

Ses plans étaient bien ceux d'un jeune homme qui ne connaît encore de la vie que ses douceurs, et du monde que ce qu'il a d'attrayant. Rendre à l'art musical, par une expression plus vive et plus variée, ce pouvoir qu'il exerçait sur les anciens et dont les récits nous étonnent encore; porter dans la physique cette élévation de vues et ces tableaux éloquents par lesquels l'Histoire Naturelle de Buffon avait acquis tant de célébrité: voilà ce qu'il se proposait, ce que déja dans son idée il se représentait comme à moitié obtenu.

On conçoit que ni l'un ni l'autre de ces projets ne pouvait se présenter sous le même jour à de graves magistrats ou à de vieux officiers tels qu'étaient presque tous ses parents. Non pas qu'ils pensassent comme ce frère de Descartes, con-

seiller dans un parlement de province, qui croyait sa famille déshonorée parce qu'elle avait produit un auteur; les esprits étaient plus éclairés à Agen vers la fin du dix-huitième siècle qu'en Bretagne dans le commencement du dix-septième: mais des personnages âgés et pleins d'expérience pouvaient craindre qu'un jeune homme ne présumât trop de ses forces, et qu'un vain espoir de gloire n'eût pour lui d'autre effet que de lui faire manquer sa fortune. D'après ses liaisons et ses alliances il pouvait espérer un sort également honorable dans la robe, dans l'armée ou dans la diplomatie: on lui laissait le choix d'un état, mais on le pressait d'en prendre un; et sa tendresse pour ses parents l'aurait peut-être emporté sur ses projets, s'il ne se fût présenté à lui un moyen inattendu de sortir d'embarras. Un prince allemand dont il avait fait la connaissance à Paris se chargea de lui procurer un brevet de colonel au service des Cercles, service peu pénible comme on sait, ou plutôt qui n'en était pas un; car nous apprenons de M. de Lacépède, dans ses Mémoires, que bien qu'il ait fait vers ce temps-là deux voyages en Allemagne, il n'a jamais vu son régiment; mais enfin, tel qu'il était, ce service donnait un titre, un uniforme et des épaulettes; la famille s'en contenta, et le jeune colonel eut désormais la permission de se livrer à ses goûts. Ce qu'il y eut de plus plaisant, c'est que bien autrement persuasif que Descartes, il détermina son père lui-même à quitter la robe, à accepter le titre de conseiller d'épée du Landgrave de Hesse-Hombourg, et à paraître dans le monde vêtu en cavalier. Ce bon vieillard se proposait de venir s'établir à Paris avec son fils, lorsque la mort l'enleva après une maladie douloureuse en 1783.

Dans le double plan de vie que M. de Lacépède s'était tracé,

il y avait une moitié, celle de la science, où le succès ne dépendait que de lui-même ; mais il en était un autre où il ne pouvait l'espérer que du concours d'une multitude de volontés, que l'on sait assez ne pas se mettre aisément d'accord.

Sur une invitation de Gluck, et en partie avec les avis de ce grand maître, il avait composé la musique d'un opéra (1). Après deux ou trois ans de travail et de sollicitations, il en avait obtenu une première répétition ; deux ans encore après on en fit la répétition générale; les acteurs, l'orchestre et les assistants lui présageaient un grand succès, lorsque l'humeur subite d'une actrice fit tout suspendre. M. de Lacépède supporta cette contrariété conformément à son caractère, avec douceur et politesse; mais il jura à part lui qu'on ne l'y prendrait plus, et il se décida à ne faire désormais de la musique que pour ses amis.

On aurait regret à cette résolution, si de la théorie que se fait un artiste on pouvait conclure quelque chose touchant le mérite de ses œuvres. La poétique de la musique que M. de Lacépède publia en 1785 (2) annonce un homme rempli du sentiment de son art, et peut-être un homme qui accorde trop à sa puissance ; elle se fonde essentiellement sur le principe de l'imitation : la musique, selon l'auteur, n'est que le langage ordinaire dont on a ôté toutes les articulations, et dont on a soutenu tous les tons en les élevant aussi haut ou en les portant aussi bas que l'ont souffert les voix qui devaient les former et l'oreille qui devait les saisir, et en leur

(1) C'était l'opéra d'*Omphale*. Il avait aussi commencé à travailler sur celui d'*Alcione*.

(2) Deux vol. in-8°.

donnant par ces deux moyens une expression plus forte, puisqu'elle est à la fois plus durable, plue étendue et plus variée. Elle exprime plus vivement nos passions et le désordre de nos agitations intérieures, en franchissant de plus grands intervalles de l'échelle musicale et en les franchissant plus rapidement; elle recueille les cris que la passion arrache, ceux de la douleur, ceux de la joie, tous les tons enfin que la nature a destinés à accompagner et par conséquent à caractériser les effets que la musique veut peindre. De l'identité du langage, de celle des sentiments qu'ils ont à exprimer, résultent, pour le musicien, les mêmes devoirs que pour le poète. Toute pièce de musique, qu'elle soit ou non jointe à des paroles, est un poëme: mêmes précautions dans l'exposition, mêmes règles dans la marche, même succession dans les passions; tous les mouvements en doivent être semblables; il n'est point de caractère, point de situation que le musicien ne doive et ne puisse rendre par les signes qui lui sont propres. L'auteur jugeait même possible de rappeler à l'esprit les choses inanimées, par l'imitation des sons qui les accompagnent d'ordinaire, ou par des combinaisons de sons propres à réveiller des idées analogues.

Cet ouvrage écrit avec feu, et plein de cette éloquence naturelle à un jeune homme passionné pour son sujet, fut accueilli avec faveur, surtout par l'un des deux partis qui divisaient alors les amateurs de musique, celui des gluckistes, qui y reconnurent les principes de leur chef exprimés avec plus de netteté et d'élégance que ce chef ne l'aurait pu faire. Le grand roi de Prusse Frédéric II, lui-même comme on sait musicien et poète, et dont les compliments n'étaient pas du style de chancellerie, lui écrivit une lettre flatteuse; et ce

qui lui fit peut-être encore plus de plaisir, le célèbre Sacchini lui marqua sa satisfaction dans les termes les plus vifs.

M. de Lacépède, nous devons l'avouer, ne fut pas aussi heureux dans ses ouvrages de physique, son Essai sur l'Electricité (1) et sa Physique générale et particulière (2). Buffon qui, sur les sens, sur l'instinct, sur la génération des animaux, sur l'origine des mondes, n'avait à traiter que de phénomènes qui échappent encore à l'intelligence, pouvait, en se bornant à les peindre, mériter le titre qui lui est si légitimement acquis de l'un de nos plus éloquents écrivains; il le pouvait encore lorsqu'il n'avait à offrir que les grandes scènes de la nature ou les rapports multipliés de ses productions, ou les variétés infinies du spectacle qu'elles nous présentent; mais aussitôt qu'il veut remonter aux causes et les découvrir par les simples combinaisons de l'esprit ou plutôt par les efforts de l'imagination, sans démonstration et sans analyse, le vice de sa méthode se fait sentir aux plus prévenus. Chacun voit que ce n'est qu'en se faisant illusion par l'emploi d'un langage figuré qu'il a pu attribuer à des molécules organiques la formation des cristaux; trouver quelque chose d'intelligible dans ce moule intérieur, cause efficiente, selon lui, de la reproduction des êtres organisés; croire expliquer les mouvements volontaires des animaux, et tout ce qui chez eux approche de notre intelligence, par une simple réaction mécanique de la sensibilité; semer, en un mot, un ouvrage, dont presque partout le fonds et la

(1) Deux vol. in-12, Paris, 1781.
(2) 2 vol. in-12, Paris, 1783.

forme sont également admirables, d'une foule de ces hypothèses vagues, de ces systèmes fantastiques qui ne servent qu'à le déparer... A plus forte raison un pareil langage ne pouvait-il être reçu avec approbation dans des matières telles que la physique, où déja le calcul et l'expérience étaient depuis long-temps reconnus comme les seules pierres de touche de la vérité. Ce n'est pas lorsqu'un esprit juste a été éclairé de ces vives lumières qu'il préférera une période compassée à une observation positive, ou une métaphore à des nombres précis. Ainsi, avec quelque talent que M. de Lacépède ait soutenu ses hypothèses, les physiciens se refusèrent à les admettre, et il ne put faire prévaloir ni son opinion que l'électricité est une combinaison du feu avec l'humidité de l'intérieur de la terre, ni celle que la rotation des corps célestes n'est qu'une modification de l'attraction, ni d'autres systèmes que rien n'appuyait et que rien n'a confirmés. Mais, si la vérité nous oblige de rappeler ces erreurs de sa jeunesse, elle nous oblige de déclarer aussi qu'il se garda d'y persister. Il n'acheva point sa Physique, et dans la suite il retira autant qu'il le put les exemplaires de ces deux ouvrages, qui en conséquence sont devenus aujourd'hui assez rares.

Heureusement pour sa gloire, Buffon, qui ne pouvait avoir sur cette méthode les mêmes idées que son siècle, et qui peut-être, avec cette faiblesse trop naturelle aux vieillards, trouvait dans les aberrations mêmes que nous venons de signaler un motif de plus de s'attacher à son jeune disciple, lui rendit le service de lui ouvrir une voie où il pourrait exercer son talent sans contrevenir aux lois impérieuses de la science.

Il lui proposa de continuer la partie de son Histoire natu-

relle qui traite des animaux ; et pour qu'il pût se livrer plus constamment aux études qu'exigeait un pareil travail, il lui offrit la place de garde et sous-démonstrateur du Cabinet du Roi, dont Daubenton le jeune venait de se démettre (1). L'héritage était trop beau pour que M. de Lacépède ne l'acceptât pas avec une vive reconnaissance, et avec toutes ses charges, car cette place en était une et une grande. Fort assujétissante et un peu subalterne, elle correspondait mal à sa fortune et au rang qu'il s'était donné dans le monde; et toutefois il lui suffit de l'avoir acceptée pour en remplir les devoirs avec autant de ponctualité qu'aurait pu le faire le moindre gagiste. Tout le temps qu'elle resta sur le même pied, il se tenait les jours publics dans les galeries, prêt à répondre avec sa politesse accoutumée à toutes les questions des curieux, et ne montrant pas moins d'égards aux plus pauvres personnes du peuple, qu'aux hommes les plus considérables ou aux savants les plus distingués. C'était ce que bien peu d'hommes dans sa position auraient voulu faire ; mais il le faisait pour plaire à un maître chéri, pour se rendre digne de lui succéder, et cette idée ennoblissait tout à ses yeux.

Dès 1788, quelques mois encore avant la mort de Buffon, il publia le premier volume de son Histoire des reptiles, qui comprend les quadrupèdes ovipares, et l'année suivante il donna le second, qui traite des serpents (1).

Cet ouvrage, par l'élégance du style, par l'intérêt des faits qui y sont recueillis, fut jugé digne du livre immortel auquel

(1) En 1785.

(2) Histoire naturelle générale et particulière des quadrupèdes ovipares; 1 vol. in-4°, 1788. — Des Serpents ; 1 vol. in-4°, 1789.

il faisait suite, et on lui trouva même, relativement à la science, des avantages incontestables. Il marque les progrès qu'avaient faits les idées, depuis quarante ans que l'Histoire naturelle avait commencé à paraître, progrès qui avaient été préparés par les travaux même de l'homme qui s'était le plus efforcé de les combattre; et en le considérant sous un autre point de vue, il peut servir aussi de témoin des progrès que la science a faits pendant les quarante ans écoulés depuis qu'il a paru.

On n'y voit plus rien de cette antipathie pour les méthodes et pour une nomenclature précise à laquelle Buffon s'est laissé aller en tant d'endroits. M. de Lacépède établit des classes, des ordres, des genres; il caractérise nettement ces subdivisions; il énumère et nomme avec soin les espèces qui doivent se ranger sous chacune d'elles; mais s'il est aussi méthodique que Linnæus, il ne l'est pas plus philosophiquement. Ses ordres, ses genres, ses divisions de genres, sont les mêmes, fondés sur des caractères très-apparents, mais souvent peu d'accord avec les rapports naturels. Il s'inquiète peu de l'organisation intérieure. Les grenouilles, par exemple, y demeurent dans le même ordre que les lézards et que les tortues, parce qu'elles ont quatre pieds; les reptiles bipèdes en sont séparés, parce qu'ils n'en ont que deux; les salamandres ne sont pas même distinguées des autres lézards par le genre. Quant au nombre des espèces, cet ouvrage rend l'augmentation actuelle de nos richesses encore plus sensible que les perfectionnements de nos méthodes. M. de Lacépède, quoique peut-être le plus favorisé des naturalistes de son temps, puisqu'il avait à sa disposition le cabinet que l'on regardait généralement comme le plus considérable, n'en compta que 288, dont au moins 80 n'étaient pas alors au Muséum et

avaient été prises dans d'autres auteurs; et le même cabinet, sans avoir à beaucoup près encore tout ce qui est connu, en possède maintenant plus de 900. Remarquons cependant que M. de Lacépède, à l'exemple de Buffon et de Linnæus, était trop enclin à réunir beaucoup d'espèces, comme si elles n'en eussent formé qu'une seule, et que c'est ainsi qu'il n'a admis qu'un crocodile et qu'un monitor, au lieu de dix ou de quinze de ces reptiles qui existent réellement; d'où il est arrivé qu'il a placé le même animal dans les deux continents, lorsque souvent on ne le trouverait que dans un canton assez borné de l'un ou de l'autre: mais ces erreurs étaient inévitables à une époque où l'on n'avait pas comme aujourd'hui des individus authentiques apportés de chaque contrée par des voyageurs connus et instruits.

Buffon venait de mourir. Ce deuxième volume est terminé par un éloge de ce grand homme, ou plutôt par un hymne à sa mémoire, par un dithyrambe éloquent, que l'auteur suppose chanté dans la réunion des naturalistes, « en l'honneur « de celui qui a plané au-dessus du globe et de ses âges, qui « a vu la terre sortant des eaux, et les abîmes de la mer peu- « plés d'êtres dont les débris formeront un jour de nouvelles « terres; de celui qui a gravé sur un monument plus durable « que le bronze les traits augustes du roi de la création, et « qui a assigné aux divers animaux leur forme, leur phy- « sionomie, leur caractère, leur pays et leur nom. » Telles sont les expressions pompeuses et magnifiques dans lesquelles s'exhalent les sentiments qui remplissent le cœur de M. de Lacépède. Ils y sont portés jusqu'à l'enthousiasme le plus vif; mais c'est un Buffon qui l'inspire, et il l'inspire à son ami, à son jeune élève, à celui qu'il a voulu faire héritier de son nom

et de sa gloire. Sans doute le bonheur est grand des hommes qui après eux peuvent laisser de telles impressions; mais c'en est un aussi, et peut-être un plus grand, de les éprouver à ce degré.

A cette époque un changement se préparait dans l'existence jusque-là si douce de notre jeune naturaliste. Des événements aussi grands que peu prévus venaient de tout déplacer en France. Le pouvoir n'était plus que le produit journalier de la faveur populaire, et chaque mois voyait tomber à l'essai quelque grande réputation, ou s'élever du sein de l'obscurité quelque personnage jusque-là inaperçu. Tout ce que la France avait d'hommes de quelque célébrité furent successivement invités ou entraînés à prendre part à cette grande et dangereuse loterie; et M. de Lacépède, que son existence, sa réputation littéraire, et une popularité acquise également par l'aménité et par la bienfaisance, désignaient à toutes les sortes de suffrages, eut moins de facilité qu'un autre à se soustraire au torrent. On le vit successivement président de sa section, commandant de garde nationale, député extraordinaire de la ville d'Agen près de l'Assemblée Constituante, membre du conseil général du département de Paris, président des électeurs, député à la première législature (1), et président de cette assemblée (2). Plus d'une fois placé dans les positions les plus délicates, il y porta ces sentiments bienveillants qui faisaient le fonds de son caractère, et ces formes agréables qui en embellissaient l'expression; mais à une pareille époque ce n'était pas ces qualités qui pouvaient donner de la prépon-

(1) En septembre 1791.

(2) Le 30 novembre de la même année.

dérance; elles ne touchaient guère ni les furieux qui assaillaient autour de l'assemblée ceux qui ne votaient pas à leur gré, ni les lâches qui les insultaient dans les journaux; ou plutôt ces attaques, ces injures, n'étaient plus qu'un mouvement imprimé et machinal qui emportait tout le monde; elles ne conservaient de signification ni pour ceux qui croyaient diriger, ni pour ceux dont ils faisaient leurs victimes. Un jour M. de Lacépède vit dans un journal son nom en tête d'un article intitulé: *Liste des scélérats qui votent contre le peuple,* et le journaliste était un homme qui venait souvent dîner chez lui : il y vint après sa liste comme auparavant. « Vous m'avez traité bien durement, lui dit avec douceur son « hôte. — Et comment cela, monsieur? — Vous m'avez ap- « pelé scélérat! — Oh! ce n'est rien : *scélérat* est seulement « un terme pour dire qu'on ne pense pas comme nous. »

Cependant ce langage produisit à la fin son effet sur une multitude qui n'avait pas encore su se faire un double dictionnaire, et ceux qui ne le parlaient pas se virent obligés de céder la place. M. de Lacépède fut un des derniers à croire à cette nécessité. La bonne opinion qu'il avait des hommes était trop enracinée pour qu'il ne se persuadât pas que bientôt la vérité et la justice l'emporteraient; mais en attendant leur victoire, ses amis qui ne la croyaient pas si prochaine l'emmenèrent à la campagne, et presque de force. Il voulait même de temps en temps revenir dans ce cabinet où le rappelaient ses études, et dans sa bonne foi rien ne lui sembla plus simple que d'en faire demander la permission à Robespierre. Heureusement le monstre eut ce jour-là un instant d'humanité. « *Il est à la campagne? dites-lui qu'il y reste.* » Telle fut sa réponse, et elle fut prononcée d'un ton à ne pas

se faire répéter la demande. Il est certain qu'une heure de séjour dans la capitale eût été l'arrêt de mort de M. de Lacépède. Des hommes qui souvent avaient reçu ses bienfaits à sa porte, et qui ne pouvaient juger de ses sentiments que parce qu'ils avaient entendu dire à ses domestiques, étaient devenus les arbitres du sort de leurs concitoyens : ils en avaient assez appris pour connaître sa modération, et à leurs yeux elle était un crime; sa bienfaisance en était encore un plus grand, parce que le souvenir en blessait leur orgueil. Déja plus d'une fois ils avaient cherché à connaître sa retraite, et il se crut enfin obligé, pour ne laisser aucun prétexte aux persécutions, de donner sa démission de sa place au Muséum. Ce ne fut qu'après le 9 thermidor qu'il put rentrer à Paris.

Il revint avec un titre singulier pour un homme de quarante ans, déja connu par tant d'ouvrages : celui d'élève de l'école Normale.

La convention, abjurant enfin ses fureurs, avait cru pouvoir créer aussi rapidement qu'elle avait détruit; et pour rétablir l'instruction publique, elle avait imaginé de former des professeurs en faisant assister des hommes déja munis de quelque instruction aux leçons de savants célèbres qui n'auraient à leur montrer que les meilleures méthodes d'enseigner.

Quinze cents individus furent envoyés à cet effet à Paris, choisis dans tous les départements, mais comme on pouvait choisir alors : quelques-uns à peine dignes de présider à une école primaire; d'autres égaux pour le moins à leurs maîtres par l'âge et la célébrité. M. de Lacépède s'y trouvait sur les bancs avec M. de Bougainville, septuagénaire, officier-général de terre et de mer, écrivain et géomètre également fameux;

avec le grammairien de Wailly, non moins âgé, et auteur devenu classique depuis quarante ans; avec notre savant collègue M. Fourrier. M. de La Place lui même, et c'est tout dire, y parut d'abord comme élève, et aux côtés de pareils hommes siégeaient des villageois qui à peine savaient lire correctement. Enfin, pour compléter l'idée que l'on doit se faire de cette réunion hétérogène, l'art d'enseigner y devait être montré par des hommes très-illustres sans doute, mais qui ne l'avaient jamais pratiqué : les Volney, les Berthollet, les Bernardin de Saint-Pierre. Cependant, qui le croirait? cette conception informe produisit un grand bien, mais tout différent de celui qu'on avait eu en vue. Les hommes éclairés que la terreur avait dispersés et isolés se retrouvèrent; ils reformèrent une masse respectable, et s'enhardirent à exprimer leurs sentiments, bien opposés à ceux qui dirigeaient la multitude et ses chefs. Ceux d'entre eux qui s'étaient cachés dans les provinces étaient accueillis comme des hommes qui viendraient d'échapper à un naufrage : la considération, les prévenances les entouraient, et M. de Lacépède, outre sa part dans l'intérêt commun, avait encore celle qui lui était due comme savant distingué, comme écrivain habile, et comme ami et familier de ce que le régime précédent avait eu de plus respectable.

Depuis sa démission, il n'était plus légalement membre de l'établissement du Jardin du Roi, et il n'avait pas été compris dans l'organisation que l'on en avait faite pendant son absence; mais à peine fut-il permis de prononcer son nom sans danger pour lui, que ses collègues s'empressèrent de l'y faire rentrer. On créa à cet effet une chaire nouvelle affectée à l'histoire des reptiles et des poissons, en sorte qu'on lui fit

un devoir spécial précisément de l'étude que depuis si long-temps il avait choisie par goût. Ses leçons obtinrent le plus grand succès; on y voyait accourir en foule une jeunesse privée depuis trois ou quatre ans de tout enseignement, et qui en était, pour ainsi dire, affamée. La politesse du professeur, l'élégance de son langage, la variété des idées et des connaissances qu'il exposait, tout, après cet intervalle de barbarie qui avait paru si long, rappelait pour ainsi dire un autre siècle. Ce fut alors, surtout, qu'il prit dans l'opinion le rang du véritable successeur de Buffon : et en effet on en retrouvait en lui les manières distinguées; il montrait le même art d'intéresser aux détails les plus arides; et de plus, à cette époque où Daubenton touchait au terme de sa carrière, M. de Lacépède restait seul de cette grande association qui avait travaillé à l'Histoire Naturelle. C'est à ce titre qu'il fut hautement appelé à faire partie du noyau de l'Institut, et qu'il se trouva ainsi l'un de ceux qui furent chargés de renouveler l'Académie des Sciences, cette académie dont, quelques années auparavant, le souvenir de ses ouvrages de physique lui aurait peut-être rendu l'entrée assez difficile. Il s'agissait d'y rappeler plusieurs de ceux qui l'avaient repoussé, et pour tout autre cette position aurait pu être délicate; mais, nous l'avons déja vu, il était incapable de se souvenir d'un tort, et les hommes dont nous parlons ne furent pas ceux dont il s'empressa le moins d'accueillir les sollicitations. Il a été l'un de nos premiers secrétaires (1), et son bel éloge historique de Dolomieu fera toujours regretter qu'il ait été enlevé par de

(1) En 1797 et 98.

hautes dignités à un poste qu'il aurait rempli mieux que personne. Déja dans sa première jeunesse il avait célébré avec la chaleur de son âge le dévouement du prince Léopold de Brunswick, mort en essayant de sauver des malheureux victimes d'une grande inondation (1).

Il paraît cependant qu'au milieu de ces causes nombreuses de célébrité, son nom n'arriva pas à tous les membres de l'administration du temps; et l'on n'a pas oublié le conte de ce ministre du Directoire, qui revenant de faire sa visite officielle au Muséum, et interrogé par quelqu'un s'il avait vu Lacépède, répondit qu'on ne lui avait montré que la girafe, et se fâcha beaucoup de ce qu'on ne lui eût pas fait tout voir. Nous rappelons cette aventure burlesque, parce qu'elle peint l'époque.

De toutes les occupations auxquelles M. de Lacépède avait été contraint de se livrer, les sciences seules, comme c'est leur ordinaire, lui avaient été fidèles à l'époque du malheur, et c'était avec elles qu'il s'était consolé dans sa retraite. Reprenant les habitudes de sa jeunesse, passant les journées au milieu des bois ou au bord des eaux, il avait tracé le plan de son Histoire des Poissons, le plus important de ses ouvrages. Aussitôt après son retour, il s'occupa de la rédiger, et au bout de deux ans, en 1798, il se vit en état d'en faire paraître le premier volume : il y en a eu successivement cinq, dont le dernier est de 1803.

Cette classe nombreuse d'animaux, peut-être la plus utile

---

(1) En 1786. Il a aussi publié un éloge de Daubenton, et un de Vandermonde. Ce dernier est imprimé dans le premier volume de la classe des sciences de l'Institut.

pour l'homme après les quadrupèdes domestiques, est la moins connue de toutes : c'est aussi celle qui se prête le moins à des développements intéressants. Froids et muets, passant une grande partie de leur vie dans des abîmes inaccessibles, exempts de ces mouvements passionnés qui rapprochent tant les quadrupèdes de nous, ne montrant rien de cette tendresse conjugale, de cette sollicitude paternelle qu'on admire dans les oiseaux, ni de ces industries si variées, si ingénieuses, qui rendent l'étude des insectes aussi importante pour la philosophie générale que pour l'histoire naturelle, les poissons n'ont presque à offrir à la curiosité que des configurations et des couleurs dont les descriptions rentrent nécessairement dans les mêmes formes, et impriment aux ouvrages qui en traitent une monotonie inévitable. M. de Lacépède a fait de grands efforts pour vaincre cette difficulté, et il y est souvent parvenu : tout ce qu'il a pu recueillir sur l'organisation de ces animaux, sur leurs habitudes, sur les guerres que les hommes leur livrent, sur le parti qu'ils en tirent, il l'a exposé dans un style élégant et pur ; il a su même répandre du charme dans leurs descriptions toutes les fois que les beautés qui leur ont aussi été départies dans un si haut degré permettaient de les offrir à l'admiration des naturalistes. Et n'est-ce pas en effet un grand sujet d'admiration que ces couleurs brillantes, cet éclat de l'or, de l'acier, du rubis, de l'émeraude versés à profusion sur des êtres que naturellement l'homme ne doit presque pas rencontrer, qui se voient à peine entre eux dans les sombres profondeurs où ils sont retenus ! mais encore les paroles ne peuvent avoir ni la même variété, ni le même éclat ; la peinture même serait impuissante pour en reproduire la magnificence.

Toutefois les difficultés dont nous parlons ne sont relatives qu'à la forme et ne naissent que du désir si naturel à un auteur qui succède à Buffon de se faire lire par les gens du monde. Il en est qui tiennent de plus près au fond du sujet, et dont les hommes du métier peuvent seuls se faire une idée. Avant d'écrire sa première page sur une classe quelconque d'êtres, le naturaliste, qui veut mériter ce nom, doit avoir recueilli autant d'espèces qu'il lui est possible, les avoir comparées à l'intérieur et à l'extérieur, les avoir groupées d'après l'ensemble de leurs caractères, avoir démêlé dans les articles confus, incomplets, souvent contradictoires de ses prédécesseurs, ce qui concerne chacune d'elles, y avoir rapporté les observations souvent encore plus confuses, plus obscures, de voyageurs la plupart ignorants ou superstitieux, et cependant les seuls témoins qui aient vu ces êtres dans leur climat natal, et qui aient pu parler de leurs habitudes, des avantages qu'ils procurent, des dommages qu'ils occasionnent. Pour apprécier ces témoignages, il faut qu'il connaisse toutes les circonstances où les auteurs qu'il consulte se sont trouvés, leur caractère moral, leur degré d'instruction ; il devrait presque lire toutes les langues : l'historien de la nature, en un mot, ne peut se passer d'aucune des ressources de la critique, de cet art de reconnaître la vérité, si nécessaire à l'historien des hommes, et il doit y joindre encore une multitude d'autres talents.

M. de Lacépède, lorsqu'il composa son ouvrage sur les poissons, ne se trouvait pas dans des circonstances où les ressources dont nous parlons fussent toutes à sa disposition. L'anatomie des poissons n'était pas assez avancée pour lui fournir les bases d'une distribution naturelle. Une guerre générale avait

établi une barrière presque infranchissable entre la France et les autres pays; elle nous fermait les mers et nous séparait de nos colonies. Ainsi les livres étrangers ne nous parvenaient point; les voyageurs ne nous apportaient point ces collections si nombreuses et si riches, qui nous sont arrivées aussitôt que la mer a été libre; Péron même, qui avait voyagé pendant la guerre, n'arriva que lorsque l'ouvrage fut terminé. L'auteur ne put donc prendre pour sujets de ses observations que les individus recueillis au cabinet du Roi avant la guerre, et ceux que lui offrit le cabinet du Stathouder qui avait été apporté à Paris lors de la conquête de la Hollande. Parmi les naturalistes qui l'avaient précédé, il choisit Gmelin et Bloch pour ses principaux guides, et peut-être les suivit-il trop fidèlement, constant comme il était à observer avec les écrivains la même politesse que dans la société. Les dessins et les descriptions manuscrites de Commerson, et des peintures faites autrefois par Aubriet sur des dessins de plumier, furent à peu près les seules sources inédites où il fut possible de puiser; et néanmoins, avec des matériaux si peu abondants, il réussit à porter à plus de 1500 les poissons dont il traça l'histoire; et en estimant au plus haut le nombre des doubles emplois, presque inévitables dans un écrit pareil, et qu'en effet il n'a pas toujours évités, il lui restera de 12 à 1300 espèces certaines et distinctes. Gmelin n'en avait alors qu'environ 800, et Bloch, dans son grand ouvrage, ne passe pas 450; il n'en a pas plus de 1400 dans son *Systema*, qui a paru après les premiers volumes de M. de Lacépède, et qui a été rédigé dans des circonstances bien plus favorables.

Ces nombres paraîtront encore assez faibles à ceux qui sauront qu'aujourd'hui le seul cabinet du Roi possède plus

de 4000 espèces de poissons; mais telle a été dans le monde entier, depuis la paix maritime, l'activité scientifique, que toutes les collections ont doublé et triplé, et qu'une ère entièrement nouvelle a commencé pour l'histoire de la nature. Cette circonstance n'ôte rien au mérite de l'écrivain qui a fait tout ce qui était possible à l'époque où il travaillait; et tel a été M. de Lacépède. Encore aujourd'hui il n'existe sur l'histoire des poissons aucun ouvrage supérieur au sien : c'est lui que lon cite dans tous les écrits particuliers sur cette matière. Celui du naturaliste anglais George Shaw n'en est guère qu'un extrait rangé d'après le système de Linnæus. Lors même qu'on aura réuni dans un autre ouvrage les immenses matériaux qui ont été accumulés dans ces dernières années, on ne fera point oublier les morceaux brillants de coloris et pleins de sensibilité, et d'une haute philosophie, dont M. de Lacépède a enrichi le sien. La science, par sa nature, fait des progrès chaque jour; il n'est point d'observateur qui ne puisse renchérir sur ses prédécesseurs pour les faits, ni de naturaliste qui ne puisse perfectionner leurs méthodes; mais les grands écrivains n'en demeurent pas moins immortels.

L'Histoire naturelle des Poissons fut suivie, en 1804, de celle des Cétacées (1), qui termine le grand ensemble des animaux vertébrés. M. de Lacépède la regardait comme le plus achevé de ses ouvrages; et en effet il y a mieux fondu que dans aucun autre la partie descriptive et historique, celle de l'organisation, et les caractères méthodiques. Son style s'y est

---

(1) Histoire naturelle générale et particulière des Cétacées, 1 vol. in-4° ou vol. in-12, Paris, 1804.

élevé en quelque sorte à proportion de la grandeur des objets : il augmente à peu près d'un tiers le nombre des espèces enregistrées avant lui dans le grand catalogue des êtres ; mais dès-lors cette partie de la science a fait aussi ses progrès. L'ouvrage posthume de Pierre Camper, et ceux de quelques autres naturalistes, en ont beaucoup éclairé l'ostéologie. Quant à l'histoire des espèces, elle présentera toujours de grandes difficultés, parce que leur taille ne permet pas de les rassembler en grand nombre dans les collections, ni d'en faire une comparaison immédiate, et on ne peut trop le redire, sans la comparaison immédiate, il n'est point de certitude en histoire naturelle.

C'était peut-être pour soustraire enfin le sort de ses travaux à cette influence de l'augmentation progressive et inévitable des connaissances, que M. de Lacépède, dans les derniers temps, les avait dirigés sur des sujets plus philosophiques, plus susceptibles de prendre une forme arrêtée, ou du moins de ne pas vieillir à chaque agrandissement de nos collections. Il méditait une histoire des âges de la nature, dans laquelle il comprenait celle de l'homme considéré dans ses développements individuels et dans ceux de son espèce. L'article de l'*homme*, dans le Dictionnaire des Sciences naturelles, est une sorte de programme, un tableau raccourci et élégant de ce qu'il avait en vue pour l'histoire physique du genre humain ; les romans (1) qu'il a publiés à la même époque n'étaient à ses yeux que des études sur notre histoire

---

(1) Le premier est intitulé *Ellival et Caroline*, 2 vol. in-12, 1816 ; et le second *Charles d'Ellival et Alphonsine de Florentino*, 3 vol. in-12, 1817.

morale; mais au milieu de ses méditations sur l'humanité en général, les développements graduels de l'organisation sociale eurent pour lui un attrait plus particulier. Le naturaliste se changea par degrés en historien, et il se trouva insensiblement avoir travaillé, seulement sur la dernière période de ses âges de la nature, sur celle qui embrasse les établissements politiques et religieux des siècles écoulés depuis la chute de l'empire d'Occident. On en a trouvé l'histoire complète dans ses papiers, et il en a déja été publié quelques volumes.

Les lecteurs de cet ouvrage ont dû être frappés de la grandeur du plan, et de la hardiesse avec laquelle il présente de front les événements arrivés à chaque époque sur le vaste théâtre de l'Europe. Ils ont dû y reconnaître aussi le caractère constant de l'auteur : l'étonnement mêlé d'horreur que lui causent les crimes; la disposition à croire à la pureté des intentions; l'espérance de voir enfin améliorer l'état général de l'espèce humaine. Si cette histoire n'a pas l'intérêt dramatique de celles qui se restreignent à un pays particulier et qui peuvent faire ressortir d'une manière plus saillante leurs personnages de prédilection, elle n'en est pas moins remarquable par l'élégance continue du style et par la clarté avec laquelle s'y développent des événements si nombreux et si compliqués; mais on ne pourra en porter un jugement définitif que lorsque le public la possédera dans son entier (1).

---

(1) Aux grands ouvrages de M. de Lacépède, dont il a été parlé dans son éloge, on doit ajouter de nombreux Mémoires imprimés dans divers recueils, tels que :

M. de Lacépède était destiné à une perpétuelle alternative d'activité littéraire et d'activité politique. Un gouverne-

---

Dans les Mémoires de l'Institut.

1796. — Notice sur la vie et les ouvrages de Vandermonde, 1 vol.

1797. — Mémoire sur l'organe de la vue d'un poisson, auquel on a donné le nom de *Cobite anableps*, vol. 2.

1798. — Mémoire sur une nouvelle table méthodique de la classe des oiseaux, vol 3.

1798. — Mémoire sur une nouvelle classification méthodique des animaux mammifères, vol. 3.

1800. — Mémoire sur le genre des myrmecophages, vol. 6.

Dans les Annales du Muséum.

1803. — Observations sur un genre de Serpent qui n'a pas encore été décrit, Ann. tom. II, p. 280-284.

Ibid. — Mémoire sur deux espèces de quadrupèdes ovipares qu'on n'a pas encore décrites; Ann. tom. II, p. 351-359.

1804. — Mémoire sur plusieurs animaux de la Nouvelle-Hollande, dont la description n'a pas encore été publiée; Ann. tome IV, p. 184-211.

1805. — Mémoire sur le grand plateau de l'intérieur de l'Afrique; Ann. t. VI, p. 284-297.

1807. — Des hauteurs et des positions correspondantes des principales montagnes du globe, et de l'influence de ces hauteurs et de ces positions sur les habitations des animaux; Ann. t. IX, p. 303-318.

Ibid. — Sur une espèce de quadrupède ovipare non encore décrite; Ann. t. X, p. 230-233.

Ibid. — Sur un poisson fossile trouvé dans une couche de gypse à Montmartre, près de Paris; Ann. t. X, p. 234-235.

1818. — Notes sur les cétacées des mers voisines du Japon. Mém. du Mus.; t. IV, p. 467-475.

ment nouveau, qui avait besoin d'appui dans l'opinion, s'empressa de rechercher un homme également aimé et estimé des gens de lettres et des hommes du monde. On le revit donc, bientôt après le 18 brumaire, dans les places émi-

---

Dans le Magasin encyclopédique.

1795. — De l'Industrie et de la sensibilité des oiseaux, 1re année, t. I, pag. 448.

1798. — Considérations sur les parties du globe dans lesquelles on n'a pas encore pénétré; 4e ann., tom. I, p. 420, et tom. II, p. 408.

1799. — Sur une nouvelle Carte zoologique, 5e année, tom. IV, p. 222.

1799. — Mémoire sur quelques phénomènes du vol et de la vue des oiseaux, 5e année, tom. VI, p. 525.

1801. — Sur les conséquences que l'on peut tirer, relativement à la théorie de la terre, de la distribution actuelle des différentes espèces d'animaux sur le globe; 6e année, tome VI, p. 368.

1808. — Rapport sur les os fossiles envoyés à l'Institut par M. Jefferson; 13e année, t. VI, p. 176.

Imprimés à part, in-4°, chez Plassan.

1798. — Discours d'ouverture et de clôture du cours d'histoire naturelle donné dans le Muséum, l'an 6.

1799. — Discours d'ouverture et de clôture du cours d'histoire naturelle donné dans le Muséum, l'an 7; et Tableau méthodique des mammifères et des oiseaux.

1800. — Discours d'ouverture et de clôture du cours d'histoire naturelle donné dans le Muséum, l'an 8.

1801. — Discours d'ouverture et de clôture du cours de zoologie donné au Muséum, l'an 9.

M. de Lacépède a donné en 1799 une nouvelle édition de l'Histoire naturelle de Buffon, en 52 vol. in-12. Il a fait aussi la préface de la Ménagerie du Muséum, imprimée in-fol. en 1801.

nentes : sénateur en 1799; président du sénat en 1801 ; grand-chancelier de la Légion-d'Honneur en 1803; titulaire de la sénatorerie de Paris en 1804; ministre d'État la même année; et rien ne prouve mieux à quel point le gouvernement avait été bien inspiré, que ce qui fut avoué par plusieurs des émigrés rentrés à cette époque; c'est qu'à la vue du nom de Lacépède sur la liste du sénat, ils s'étaient crus rassurés contre le retour des violences et des crimes.

C'était aussi dans cette persuasion qu'il acceptait ces honneurs, et sans doute il ne prévoyait alors ni les événements sans exemple qui succédèrent, ni la part qu'il se vit obligé d'y prendre. On s'en souvient trop pour que nous ayons besoin d'en parler en détail; mais nous ne croyons pas avoir non plus besoin de l'en justifier. Déja l'on n'est pas soi-même quand on parle au nom d'un corps qui vous dicte les sentiments que vous devez exprimer et les termes dont vous devez vous servir; et lorsque ce corps n'est libre dans le choix ni des uns ni des autres, tout vestige de personnalité a disparu. Mais ceux qui, en de telles circonstances, ont eu le bonheur de conserver leur obscurité, devraient penser qu'il y a quelque chose d'injuste à reprocher à l'organe d'une compagnie les paroles et les actes que la compagnie lui impose; et peut-être même à vouloir qu'une compagne ait conservé quelque liberté devant celui qui n'en laissait à aucun souverain. Si elle répétait ces paroles de l'Evangile : *Que celui qui est sans péché jette la première pierre,* quels seraient, dans l'Europe continentale, les princes ou les hommes en pouvoir qui oseraient se lever?

Toutefois encore, dans ces discours obligés, avec quelle énergie l'amour de la paix, le besoin de la paix se montrent

à chaque phrase! et combien, au milieu de ce qui peut paraître flatterie, on essaie de donner des leçons! C'est qu'en effet c'était la seule forme sous laquelle des leçons pussent être écoutées; mais elles furent inutiles: elles ne pouvaient arrêter le cours des destinées.

Pour juger l'homme public dans M. de Lacépède, c'est dans l'administration de la Légion-d'Honneur qu'il faut le voir. Cette institution lui avait apparu sous l'aspect le plus grand et le plus noble, destinée (ce sont ses termes) à rétablir le culte du véritable honneur, et à faire revivre sous de nouveaux emblêmes l'ancienne chevalerie, épurée des taches que lui avaient imprimées les siècles d'ignorance, et embellie de tout ce qu'elle pouvait tenir des siècles de lumière. Il travaillait avec une constance infatigable à l'établir sur la base solide de la propriété. Déja les revenus de ses domaines s'étaient accrus à un très-haut degré; de savants agronomes s'occupaient d'en faire des modèles de culture, et ils pouvaient devenir aussi utiles à l'industrie, que l'institution même au développement moral de la nation, lorsque le fondateur, effrayé comme il le fut toujours de ses propres créations, les fit vendre et remplacer par des rentes sur le trésor. D'autres plans alors furent conçus. Une forte somme devait être employée chaque année à mettre en valeur les terrains incultes que le domaine possédait dans toute la France: l'emploi devait en être dirigé par les hommes les plus expérimentés. L'Etat pouvait s'enrichir ainsi, sans conquêtes, de propriétés productives égales en étendue à plus d'un département. Les événements arrêtèrent ces nouvelles vues; mais rien n'empêchera de les reprendre, aujourd'hui que tant d'expériences ont montré ce que peuvent des

avances faites avec jugement et des projets suivis avec persévérance.

Chacun se souvient avec quelle affabilité M. de Lacépède recevait les légionnaires; comment il savait renvoyer contents ceux-là même qu'il était contraint de refuser : mais ce que peut-être on sait moins, c'est le zèle avec lequel il prenait leurs intérêts et les défendait dans l'occasion. Je n'en citerai qu'un exemple. Des croix avaient été accordées après une campagne; le maître apprend que le major-général en a fait donner par faveur à quelques officiers qui n'avaient pas le temps nécessaire : il commande au grand-chancelier de les leur faire reprendre. En vain celui-ci représente la douleur qu'éprouveront des hommes déja salués comme légionnaires. Rien ne touchait un chef irrité. « *Eh bien!* dit M. de Lacépède, *je vous demande pour eux ce que je voudrais obtenir si j'étais à leur place, c'est d'envoyer aussi l'ordre de les fusiller.* » Les croix leur restèrent.

Ce qu'il avait le plus à cœur, c'étaient les établissements d'éducation destinés aux orphelines de la Légion. Il avait aussi conçu le plan de ces asiles du malheur avec grandeur et générosité : 1,400 places y furent fondées ou projetées; de grands monuments furent restaurés et embellis. Écouen, l'un des restes les plus magnifiques du XVIe siècle, échappa ainsi à la destruction; plus de 300 élèves y ont été réunis. A Saint-Denis on en a vu plus de 500. On a applaudi également à la beauté des dispositions matérielles, à la sagesse des réglements, à l'excellent choix des dames chargées de la direction et de l'enseignement. Son aménité, les soins attentifs qu'il se donnait pour le bien-être de toutes ces jeunes personnes, l'en faisaient chérir comme un père; et beaucoup

d'entre elles, établies et mères de famille, lui ont donné jusqu'à ses derniers moments des marques de leur reconnaissance. On en cite une qui, mourante, lui fit demander pour dernière grace de le voir encore un instant afin de lui exprimer ce sentiment.

M. de Lacépède conduisait des affaires si multipliées avec une facilité qui étonnait les plus habiles. Une ou deux heures par jour lui suffisaient pour tout décider, et en pleine connaissance de cause. Cette rapidité surprenait le chef du gouvernement, lui-même cependant assez célèbre aussi dans ce genre. Un jour il lui demanda son secret. M. de Lacépède répondit en riant : « C'est que j'emploie la méthode des naturalistes : » mot qui, sous l'apparence d'une plaisanterie, a plus de vérité qu'on ne le croirait. Des matières bien classées sont bien près d'être approfondies ; et la méthode des naturalistes n'est autre chose que l'habitude de distribuer dès le premier coup d'œil toutes les parties d'un sujet, jusqu'aux plus petits détails, selon leurs rapports essentiels.

Une chose qui devait encore plus frapper un maître que l'on n'y avait pas accoutumé, c'était l'extrême désintéressement de M. de Lacépède. Il n'avait voulu d'abord accepter aucun salaire ; mais comme sa bienfaisance allait de pair avec son désintéressement, il vit bientôt son patrimoine se fondre et une masse de dettes se former, qui aurait pu excéder ses facultés ; et ce fut alors que le chef du gouvernement le contraignit de recevoir un traitement, et même l'arriéré. Le seul avantage qui en résulta pour lui fut de pouvoir étendre ses libéralités. Il se croyait comptable envers le public de tout ce qu'il en recevait, et dans ce compte c'était toujours contre lui-même que portaient les erreurs de calcul. Chaque jour

il avait occasion de voir des légionnaires pauvres, des veuves laissées sans moyens d'existence. Son ingénieuse charité les devinait même avant toute demande. Souvent il leur laissait croire que ses bienfaits venaient de fonds publics qui avaient cette destination. Lorsque l'erreur n'eût pas été possible, il trouvait moyen de cacher la main qui donnait. Un fonctionnaire d'un ordre supérieur, placé à sa recommandation, ayant été ruiné par de fausses spéculations, et obligé d'abandonner sa famille, M. de Lacépède fit tenir régulièrement à sa femme 500 fr. par mois, jusqu'à ce que son fils fût assez âgé pour obtenir une place, et cette dame a toujours cru qu'elle recevait cet argent de son mari. Ce n'est que par l'homme de confiance employé à cette bonne œuvre que l'on en a appris le secret.

Un de ses employés dépérissait à vue d'œil; il soupçonne que le mal vient de quelque chagrin, et il charge son médecin d'en découvrir le sujet : il apprend que ce jeune homme éprouve un embarras d'argent insurmontable, et aussitôt il lui envoie 10,000 fr. L'employé accourt les larmes aux yeux, et le prie de lui fixer les termes du remboursement. « *Mon ami, je ne prête jamais* » fut la seule réponse qu'il put obtenir.

Je n'ai pas besoin de dire qu'avec de tels sentiments il n'était accessible à rien d'étranger à ses devoirs. Le chef du gouvernement l'avait chargé à Paris d'une négociation importante, à laquelle le favori trop fameux d'un roi voisin prenait un grand intérêt. Cet homme, pour l'essayer en quelque sorte, lui envoya en présent de riches productions minérales, et entre autres une pépite d'or venue récemment

du Pérou et de la plus grande beauté. M. de Lacépède s'empressa de le remercier, mais au nom du Muséum d'histoire naturelle où il avait pensé, disait-il, que s'adressaient ces marques de la générosité du donateur. On ne fit point de seconde tentative.

Ce qui rendait ce désintétessement conciliable avec sa grande libéralité, c'est qu'il n'avait aucun besoin personnel. Hors ce que la représentation de ses places exigeait, il ne faisait aucune dépense. Il ne possédait qu'un habit à la fois, et on le taillait dans la même pièce de drap tant qu'elle durait. Il mettait cet habit en se levant, et ne faisait jamais deux toilettes. Dans sa dernière maladie même, il n'a pas eu d'autre vêtement. Sa nourriture n'était pas moins simple que sa mise. Depuis l'âge de dix-sept ans, il n'avait pas bu de vin; un seul repas et assez léger lui suffisait. Mais ce qu'il avait de plus surprenant, c'était son peu de sommeil: il ne dormait que deux ou trois heures: le reste de la nuit était employé à composer. Sa mémoire retenait fidèlement toutes les phrases, tous les mots; ils étaient comme écrits dans son cerveau, et vers le matin il les dictait à un secrétaire. Il nous a assuré qu'il pouvait retenir des volumes entiers; y changer dans sa tête ce qu'il jugeait à propos, et se souvenir du texte corrigé, tout aussi exactement que du texte primitif. C'est ainsi que le jour il était libre pour les affaires et pour les devoirs de ses places ou de la société, et surtout pour se livrer à ses affections de famille, car une vie extérieure si éclatante n'était rien pour lui auprès du bonheur domestique. C'est dans son intérieur qu'il cherchait le dédommagement de toutes ses fatigues, mais c'est là aussi qu'il trouva les

peines les plus cruelles. Sa femme (1) qu'il adorait, passa les dix-huit derniers mois de sa vie dans des souffrances non interrompues; il ne quitta pas le côté de son lit, la consolant, la soignant jusqu'au dernier moment; il a écrit auprès d'elle une partie de son Histoire des Poissons, et sa douleur s'exhale en plusieurs endroits de cet ouvrage dans les termes les plus touchants. Un fils qu'elle avait d'un premier mariage, et que M. de Lacépède avait adopté, une belle-fille pleine de talents et de graces, formaient encore pour lui une société douce; cette jeune femme périt d'une mort subite. Au milieu de ces nouvelles douleurs M. de Lacépède fut frappé de la petite-vérole, dont une longue expérience lui avait fait croire qu'il était exempt. Dans cette dernière maladie, presque la seule qu'il ait eue pendant une vie de soixante-dix ans, il a montré mieux que jamais combien cette douceur, cette politesse inaltérable qui le caractérisaient, tenaient essentiellement à sa nature. Rien ne changea dans ses habitudes; ni ses vêtements, ni l'heure de son lever ou de son coucher; pas un mot ne lui échappa qui pût laisser apercevoir à ceux qui l'entouraient un danger qu'il connut cependant dès le premier moment. « Je vais rejoindre Buffon, » dit-il; mais il ne le dit qu'à son médecin. C'est à ses funérailles surtout, dans ce concours de malheureux qui venaient pleurer sur sa tombe, que l'on put apprendre à quel degré il portait sa bienfaisance; on l'apprendra encore mieux lorsqu'on saura qu'après avoir occupé des places si éminentes, après avoir joui pendant dix ans de la faveur de l'arbitre de l'Europe, il

---

(1) Anne-Caroline Jubé, veuve en première noce de M. Gauthier, homme de lettres estimable, et sœur de deux officiers généraux distingués.

ne laisse pas à beaucoup près une fortune aussi considérable que celle qu'il avait héritée de ses pères.

M. de Lacépède est mort le 6 octobre 1825. Il a été remplacé à l'Académie des Sciences par M. de Blainville, et sa chaire du Muséum a été remplie par M. Duméril, qui l'y suppléait depuis plus de vingt ans.

MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES

DE L'INSTITUT DE FRANCE.

MÉMOIRE

SUR

LA FIGURE DE LA TERRE.

Par M. BIOT.

Lu à l'Académie des Sciences, le 5 décembre 1827.

La détermination de la figure de la terre a été, depuis un siècle et demi, l'un des plus constants objets des travaux de l'Académie des Sciences. A partir de la première mesure du degré de Picard, qui servit à Newton pour constater l'existence de la gravitation universelle, les efforts de l'astronomie la plus délicate, de la physique la plus scrupuleuse, de la

géométrie la plus profonde, ont été mis en œuvre pour fixer tous les éléments de ce grand phénomène, et développer les conséquences qu'ils pouvaient fournir non-seulement sur la forme, mais encore sur la constitution intérieure du sphéroïde terrestre. Trois méthodes, ou plutôt trois sortes d'épreuves distinctes, ont été appliquées à cette recherche. La première, toute directe et purement graphique, consiste à mesurer des arcs de méridiens et de parallèles sur divers points de la surface, c'est-à-dire à déterminer par l'observation les longueurs de ces arcs, leurs amplitudes astronomiques, leurs inflexions et les angles sous lesquels ils se coupent; puis, à construire géométriquement la configuration du sphéroïde sur lequel ils doivent se placer. Cette construction, appliquée aux résultats de toutes les opérations modernes, donne indubitablement à la terre une forme aplatie aux pôles, renflée à l'équateur, conformément à ce que l'analogie indique pour l'équilibre d'une masse fluide tournant autour d'un axe et dont toutes les parties s'attirent mutuellement. Mais lorsque l'on veut aller au-delà de ce premier aperçu, et assimiler le sphéroïde à quelque forme simple, par exemple à l'ellipsoïde, on y découvre des irrégularités très-sensibles qui l'en écartent, et dont la réalité est incontestable, puisqu'elles excèdent de beaucoup les erreurs que l'on pourrait attribuer aux observations. Lorsque l'on examine de cette manière l'arc du méridien qui s'étend de Greenwich à Formentera, les portions successives de cet arc, considérées en allant du nord au sud, donnent des décroissements de degrés qui sont absolument sans aucune loi, et vers le 46ᵉ degré en particulier ils offrent une anomalie énorme (1). Or,

---

(1) Delambre, IIIᵉ volume de la méridienne, page 548.

si le méridien terrestre était elliptique, la latitude moyenne de ce même arc est telle que, dans toute son étendue, le décroissement successif des degrés devrait être sensiblement constant. L'arc de parallèle, récemment mesuré entre Bordeaux et Padoue (1), présente des phénomènes analogues; car ses diverses parties, réduites à une même latitude, offrent dans la longueur des degrés consécutifs des différences considérables pareillement dépourvues de toute loi. Des irrégularités semblables, non moins fortes comme non moins certaines, se montrent aussi sur les diverses parties de l'arc du méridien mesuré par les Anglais dans l'Inde ; et MM. Plana et Carlini en ont trouvé de plus considérables encore dans le Piémont. Ces exemples montrent que la figure de la terre est beaucoup plus compliquée qu'on ne l'avait cru d'abord. C'est pourquoi on a cherché à affaiblir l'influence de ses irrégularités, en combinant les valeurs moyennes des degrés mesurés à des latitudes très-distantes, et les assujétissant seules aux relations elliptiques, afin d'en déduire l'aplatissement du sphéroïde, que l'on a trouvé ainsi peu différent de $\frac{1}{309}$. Mais, d'après ce que nous venons de dire, il est évident que ce résultat n'est qu'une approximation dont il serait difficile d'apprécier l'exactitude, et qu'en tout cas il ne saurait avoir une application physique rigoureuse.

Une autre méthode de déterminer l'aplatissement du sphéroïde, que je considérerai comme la seconde dans l'ordre logique, quoiqu'elle ne soit pas telle dans l'ordre historique, c'est celle qui le conclut de l'influence qu'il exerce sur les

---

(1) Mémoire sur la mesure d'un arc de parallèle moyen entre l'équateur et le pôle. Connaissance des temps pour 1829, page 290.

mouvements de la lune. Cette méthode est due à M. Laplace. Elle suppose que le sphéroïde est très-peu différent d'une sphère, ce qui, pour la terre, est un fait incontestable. Quelle que soit la constitution intérieure d'un tel sphéroïde, son attraction sur un point extérieur peut être exprimée par une série dont les termes sont ordonnés suivant les puissances inverses de la distance. Le premier de ces termes représente l'attraction d'une sphère égale en masse au sphéroïde; le second représente ce qui s'ajouterait à cette attraction si le sphéroïde était elliptique; enfin, les suivants expriment de même ce qu'il faut ajouter aux premiers pour compléter les effets de la véritable figure. Or ces premiers termes, se trouvant divisés par de moindres puissances de la distance, demeurent seuls sensibles lorsque l'on calcule l'action de la terre à une distance aussi grande que celle où la lune est placée; et, en conséquence, lorsque l'on parvient à démêler dans les mouvements de ce satellite les inégalités dont ils sont la cause, on peut, d'après ces effets, apprécier la valeur propre des termes qui les ont produits. On obtiendrait donc ainsi la valeur réelle de l'aplatissement si le sphéroïde était exactement elliptique; et, lorsqu'il ne l'est pas, on obtient ce que l'on pourrait appeler la partie elliptique de l'aplatissement. Pour la terre, M. Laplace trouve ainsi $\frac{1}{304}$ d'après les observations de Burg; et ce résultat diffère à peine de $\frac{1}{309}$ que donne la comparaison des degrés mesurés à des latitudes très-distantes. Un tel accord, s'il était fondé sur des relations rigoureuses, prouverait que le sphéroïde terrestre est purement elliptique; mais il perd beaucoup de sa force lorsque l'on considère l'étendue des irrégularités qu'il faut négliger dans les arcs partiels du même méridien,

ainsi que les suppositions auxquelles il faut les soumettre, pour en déduire $\frac{1}{309}$ d'aplatissement (1).

La troisième et dernière méthode que l'on ait pour déterminer la figure de la terre est due à Newton, et elle repose sur une analogie encore plus éloignée que la précédente. Concevons un sphéroïde fluide, peu différent de la sphère, et composé d'un nombre quelconque de couches de densités diverses, dont toutes les particules s'attirent mutuellement en raison directe de leurs masses et inverse du carré de leurs distances. Donnons à ce corps un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe sur sa surface, et cherchons la figure que cette surface, ainsi que les couches intérieures, devront prendre, pour rester en équilibre relatif entre elles, sous la double influence des attractions moléculaires et de la force centrifuge née du mouvement de rotation. Il est clair que, dans ce cas, la forme extérieure de la masse fluide et la loi de la pesanteur à la surface se trouveront liées l'une à l'autre par une mutuelle dépendance. L'état actuel de l'analyse ne permet pas de déterminer cette relation dans la généralité d'énoncé que nous venons de donner au problème. Mais Newton avait réussi à la découvrir dans le cas de l'homogénéité; et, après lui, Clairault est parvenu à la calculer également dans le cas, beaucoup plus général, où le sphéroïde est composé d'un nombre quelconque de couches elliptiques

---

(1) Je n'ai pas cité ici les phénomènes de la nutation, et de la précession des équinoxes, parce qu'ils n'assignent point la valeur absolue de la fraction qui exprime la partie elliptique de l'aplatissement de la terre; ils déterminent seulement deux limites entre lesquelles cette fraction est nécessairement comprise, limites qui sont $\frac{1}{304}$ et $\frac{1}{578}$.

de densités arbitrairement variables. Alors l'intensité de la pesanteur et les longueurs des degrés du méridien vont en croissant, depuis l'équateur jusqu'au pôle, proportionnellement au carré du sinus de la latitude; tandis que les rayons menés du centre décroissent, au contraire, suivant la même loi; et il existe entre la variation totale de la pesanteur et celle des rayons ce rapport remarquable : l'excès de la pesanteur au pôle sur la pesanteur à l'équateur étant divisé par cette dernière, et l'excès de l'axe de l'équateur sur l'axe du pôle étant divisé par ce dernier, forment deux fractions dont la somme est constante et toujours égale au double de l'aplatissement que le sphéroïde aurait dû prendre dans le cas de l'homogénéité, la durée de sa rotation restant la même. Maintenant, si l'on suppose que cet état primitif de fluidité et cette distribution régulière des couches fluides ont été l'état primitif des corps planétaires; si l'on suppose en outre que, parmi toutes les figures d'équilibre possible peu différentes de la sphère, ces couches ont pris l'elliptique, et l'ont conservée en se solidifiant; enfin si l'on admet que la pesanteur à la surface du sphéroïde ait aussi conservé précisément l'intensité qu'elle avait lors de la solidification, sans qu'aucune révolution intérieure étrangère à la formation de cette surface l'ait postérieurement modifiée, il est clair qu'alors les relations indiquées par la théorie de l'attraction pour les sphéroïdes elliptiques deviennent complètement applicables, et que l'aplatissement de l'ellipse peut être également déterminé et doit conduire à une valeur pareille, soit par les longueurs du pendule, soit par les mesures des méridiens et des parallèles, soit enfin par l'évaluation de l'influence que l'aplatissement exerce dans les mouvements des

corps éloignés sur lesquels le sphéroïde agit par attraction. Mais ces suppositions sont toutes nécessaires pour que les relations propres à l'ellipse existent entre les mesures du pendule et les mesures des degrés, ou même dans chacun de ces phénomènes séparément. Ainsi, la première chose à faire n'est pas de les supposer existantes, mais de chercher par l'expérience à voir si elles ont réellement lieu dans toutes leurs particularités.

Nous avons fait remarquer plus haut que les degrés du méridien, mesurés en diverses parties de la terre, s'écartent très-notablement des rapports que leur assignerait une figure elliptique régulière et générale. La théorie de l'attraction fait voir que cet écart doit être moins sensible dans les variations du pendule que dans les variations des degrés, parce que, dans celles-ci, les termes qui écartent l'expression du rayon terrestre de l'état elliptique se trouvent affectés de coefficients plus considérables. C'est là sans doute ce qui a porté les géomètres à appliquer immédiatement aux mesures du pendule une formule de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude, conformément à l'hypothèse elliptique rigoureuse; et, par une conséquence naturelle, les observateurs ont toujours cherché à représenter leurs expériences par une semblable loi de variation, dont ils introduisaient les résultats dans le théorème de Clairault pour en conclure l'aplatissement; et, comme les valeurs ainsi obtenues se sont trouvées généralement différentes de celles que donnent les inégalités lunaires, ainsi que les longueurs des degrés du méridien comparées entre elles à de grandes distances, il a paru en résulter une contradiction formelle, et difficilement explicable, entre ces conséquences diverses, éga-

lement déduites de la théorie de l'attraction. Mais avant d'en venir à cette conclusion, il est évident qu'il aurait fallu discuter d'abord les longueurs observées du pendule en elles-mêmes, indépendamment de toute hypothèse sur la constitution primitive du sphéroïde, et sur les rapports de la pesanteur actuelle avec la forme que la surface a pu contracter au moment de la solidification : car, si la loi générale de variation, proportionnelle au carré du sinus, se montre dans ces longueurs, modifiée d'une manière assez suivie et assez sensible pour qu'on ne puisse pas attribuer ses écarts aux erreurs des expériences, il en faudra conclure que l'aplatissement, qui serait hypothétiquement déduit de ces données dans la supposition d'une figure elliptique régulière, n'a pas une application physique réelle et rigoureuse ; et qu'ainsi il n'y a aucune nécessité qu'une pareille combinaison de nombres coïncide, soit avec la partie elliptique de l'aplatissement mesurée par la théorie de la lune, soit avec l'aplatissement idéal qui se conclurait hypothétiquement de la mesure des degrés. Mon but aujourd'hui est de prouver que de telles inégalités existent en effet dans les longueurs observées du pendule, et qu'elles s'y montrent avec trop de continuité et dans une proportion trop énergique pour qu'on puisse les attribuer à des attractions purement locales et accidentelles, ou pour qu'on doive les confondre avec les erreurs des observations. Voilà ce que l'exactitude des expériences actuellement faites dans les diverses contrées de la terre me semble établir avec évidence, lorsqu'elles sont judicieusement choisies et discutées philosophiquement.

Ce fut dans le dessein de réunir quelques nouvelles données de ce grand problème que je partis, vers la fin de 1824, avec

mon fils, pour l'Italie et l'Espagne. Nous avions d'abord pour but principal de compléter les mesures du pendule sur le grand arc de parallèle qui s'étend aujourd'hui de Bordeaux à Fiume, et que l'on peut espérer de voir, dans quelques années, se prolonger jusqu'à la mer Noire. Nous nous proposions ensuite d'aller faire les mêmes expériences à Lipari au milieu des volcans les plus actifs de l'Italie. Puis nous devions repasser par l'Espagne pour aller les répéter à Formentera, extrémité australe de notre méridienne, afin d'assurer aux résultats de cette station toute la certitude que sa situation exige, et que les premiers essais faits en 1808 ne suffisaient pas pour lui donner. Enfin nous devions compléter notre voyage par la mesure du pendule à Barcelone, afin d'obtenir ainsi des résultats intermédiaires entre Formentera et le 45e parallèle. Le ministère du Roi ayant accueilli ce projet avec la plus grande faveur, tous les moyens de l'accomplir nous furent libéralement accordés : la goëlette *la Torche* fut mise pour cet objet à notre disposition, et nous n'avons eu qu'à nous louer constamment des soins obligeants qui nous ont été prodigués par M. le capitaine de frégate Le Goarant, qui la commandait, ainsi que par les officiers qui servaient sous ses ordres. L'un d'eux même, M. Denans, aujourd'hui lieutenant de vaisseau, voulut bien partager avec nous notre désert de Formentera, et s'y dévouer, ainsi qu'à Barcelone, à nous assister de toutes les manières possibles dans nos observations. Toutes les facilités imaginables nous furent d'ailleurs accordées de la part des gouvernements étrangers chez lesquels nos expériences nous appelaient, et auxquels le gouvernement du Roi avait, long-temps d'avance, recommandé notre mission. Cette bienveillance s'est même mani-

festée au-delà du terme de notre voyage; car, M. le maréchal de camp Fallon, directeur du bureau topographique de Vienne, a bien voulu faire rattacher à la triangulation générale du parallèle le point où nous avions observé à Fiume, ce que les rigueurs de l'hiver ne nous avaient pas permis d'effectuer; et il nous a libéralement communiqué tous les éléments de cette jonction. Il est satisfaisant pour les amis des sciences d'éprouver cette facilité de relations que le progrès des lumières a maintenant établie entre eux dans toutes les parties du monde civilisé. Mais cet avantage leur est assez essentiel pour qu'ils le remarquent partout où il existe, et pour qu'ils se fassent un devoir d'en manifester leur reconnaissance.

Les résultats de ce voyage d'une année sont consignés dans le tableau suivant, où on les a réunis avec ceux qui avaient été précédemment obtenus par le même procédé sur divers points de l'arc de France: ils sont tous rapportés au pendule sexagésimal. On y a exprimé d'abord les longueurs immédiatement obtenues dans chaque station, telles que l'expérience les a données, et l'on y a joint ensuite les valeurs définitives qui s'en déduisent quand on y applique la correction de hauteur. Celle-ci, comme on sait, offre toujours quelque incertitude théorique : nous l'avons constamment prise proportionnelle au carré de la distance au centre de la terre. Mais les éléments séparés que notre tableau renferme permettront de la modifier dans tel rapport qu'on voudra; d'ailleurs, dans la discussion qui va suivre, nous avons eu soin d'établir nos résultats les plus saillants d'après des observations faites à de si petites élévations au-dessus de la

mer, que la correction de hauteur y devînt presque insensible, et ne pût nullement les altérer.

LIEUX des OBSERVATIONS.	LATITUDES boréales : L.	LONGUEUR du pendule simple observée à la station : λ.	HAUTEUR de la station au-dessus du niveau de la mer : *h*.	CORRECTION de hauteur additive : $\frac{2h\lambda}{r}$.	LONGUEUR conclue du pendule à secondes, dans le vide et au niveau de la mer : *l*.	NOMS des OBSERVATEURS.
		mm	mm	mm	mm	
Unst	60°.45'.25"	994,943083	8,50	0,002659	994,945742	Biot.
Fort de Leith	55 58 37	994,524453	21,00	0,006565	994,531018	Biot.
Dunkerque	51 2 10	994,079137	4,00	0,001245	994,080382	Biot, Mathieu.
Paris à l'Observatoire (salle de la méridienne).	48 50 14	993,844842	70,25	0,021938	993,866780	Biot, Mathieu, Bouvard.
Paris à l'Observatoire (salle du mural)	48 50 14	993,826473	63,00	0,019674	993,846147	Borda, Cassini.
Clermont-Ferrand	45 46 48	993,455560	406,00	0,126717	993,582277	Biot; Mathieu.
Milan	45 28 1	993,500800	150,08	0,046842	993,547642	Biot; E. Biot.
Padoue	45 24 3	993,597710	30,67	0,009584	993,607294	Biot, E. Biot.
Fiume	45 19 0	993,563844	64,80	0,020227	993,584075	Biot, E. Biot.
Bordeaux	44 50 26	993,447586	17,14	0,005349	993,452935	Biot; Mathieu.
Figeac	44 36 45	993,388214	223,00	0,069591	993,457805	Biot; Mathieu.
Barcelone	41 23 15	993,230852	4,10	0,001279	993,2321312	Biot, E. Biot.
Formentera	38 39 56	993,006385	202,90	0,063275	993,0696597	Biot; E. Biot.
Lipari	38 28 37	993,076357	9,00	0,002807	993,0791638	Biot, E. Biot.

Pour compléter les éléments relatifs à la variation de la pesanteur sur le méridien qui s'étend d'Unst à Formentera, nous rapporterons ici les observations faites sur cet arc par le capitaine Kater, à l'aide d'un pendule de comparaison, dont les résultats ont été transformés en longueurs absolues, d'après la mesure du pendule absolu effectuée par le même observateur à Londres. Nous y joignons la longueur absolue du pendule à Paris, dans la salle de la Méridienne, telle qu'elle se conclut du pendule de Londres, d'après les oscillations d'un pendule de comparaison observé par le capitaine Sabine dans ces deux stations : ce qui achève de

lier les résultats des deux méthodes que l'on y a employées pour la détermination des longueurs absolues. Nous avons pareillement appliqué à ces données la correction de hauteur calculée d'après le carré de la distance, comme nous l'avions fait dans le tableau précédent.

LIEUX des OBSERVATIONS.	LATITUDES boréales : L.	LONGUEUR du pendule simple observée à la station : λ.	HAUTEUR de la station au-dessus du niveau de la mer : h.	CORRECTION de hauteur additive : $\frac{2h\lambda}{r}$.	LONGUEUR conclue du pendule à secondes dans le vide et au niveau de la mer : l.	NOMS des OBSERVATEURS.
		mm	mm	mm	mm	
Unst	60°.45'.25"	994,935840	8,50	0,002659	994,938499	Kater.
Portsoy	57 40 59	994,681591	28,67	0,008962	994,690553	Kater.
Fort de Leith	55 58 37	994,528685	21,00	0,006565	994,535250	Kater.
Clifton	53 27 43	994,269356	103,33	0,032286	994,301642	Kater.
Arbury-Hill	52 16 55	994,152520	239,87	0,074943	994,227463	Kater.
Londres	51 31 8	994,114673	28,20	0,008748	994,123421	Kater.
Shanklin-Farm	50 37 24	994,024000	73,76	0,023040	994,047040	Kater.
Paris à l'Observatoire (salle de la méridienne)	48 50 14	993,838644	70,25	0,021938	993,860582	Kater, Sabine.

En comparant ce tableau au précédent, on voit que les longueurs absolues relatives aux stations d'Unst, Leith et Paris, s'accordent entre elles de la manière la plus parfaite, soit qu'on les prenne dans les mesures directes obtenues par la méthode de Borda, ou qu'on les conclue du pendule absolu du capitaine Kater, à Londres, d'après le transport des oscillations : un accord aussi précis est une sûre confirmation des deux méthodes.

Graces à l'amour des sciences qui anime aujourd'hui non-seulement les savants de profession, mais encore les marins et les officiers de toutes armes à qui leur état donne de fréquentes occasions de voyage, les expériences du pendule

ont été fort multipliées depuis un petit nombre d'années. On connaissait jusqu'ici, sur la surface du globe, trente-quatre points où les rapports d'intensité de la pesanteur terrestre ont été déterminés d'une manière extrêmement précise. Ce serait peu d'ajouter à ces résultats, comme nous venons de le faire, un sixième de leur nombre, c'est-à-dire de donner la longueur du pendule dans six nouvelles stations : mais la situation relative des lieux dans lesquels nous avons opéré donne à ces longueurs une utilité toute particulière. En effet, les mesures du pendule que la navigation a permis de faire sont en général disséminées sur les diverses parties du globe, de sorte qu'un petit nombre d'entre elles présentent des relations spécialement propres à éclairer la question de la figure de la terre : au lieu que l'ensemble de nos expériences offre maintenant la mesure absolue de la pesanteur sur six points d'un même parallèle terrestre de quinze degrés d'étendue, et sur neuf points d'un arc de méridien de plus de vingt-deux degrés qui traverse cet arc de parallèle. A quoi nous pouvons joindre encore les sept autres expériences analogues, également faites sur ce méridien par le capitaine Kater, à l'aide de procédés dont la concordance avec les nôtres a été constatée par la parfaite coïncidence des résultats obtenus à Unst, à Leith et à Paris. Or cette distribution géométrique des observations sur les diverses parties d'un même méridien et d'un même parallèle qui se coupent, les rend particulièrement propres à faire bien connaître les variations de la pesanteur sur cette portion du sphéroïde terrestre; et même une telle distribution est absolument indispensable pour que l'on puisse déterminer les lois de ces variations avec certitude, en démêlant, dans la

continuité des résultats, ce qui dépend des causes générales, et ce qui peut être attribué à des anomalies accidentelles ou aux erreurs des expériences. Les observateurs qui ont jusqu'ici présenté leurs propres mesures du pendule, ou qui les ont réunies en général avec les expériences déja connues, les ont traitées comme des résultats qui seraient également probables et uniquement susceptibles d'erreurs fortuites; car ils les ont fondues ensemble par la méthode des moindres carrés, en les assujétissant à la loi de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude, dans la vue d'obtenir, avec les moindres écarts possibles, les deux constantes propres à cette loi, et d'en conclure ensuite l'aplatissement elliptique par le théorème de Clairault. Mais ce mode général de fusion et d'agglomération me semble ici l'inverse de la marche que l'on aurait dû suivre ; car, au lieu d'atténuer les écarts de la loi du carré du sinus, écarts qui pouvaient être l'expression de phénomènes réels, il fallait au contraire les mettre le plus possible en évidence, pour éprouver la loi elle-même, et reconnaître, dans la succession des résultats, les altérations qui pouvaient déceler des causes puissantes et étendues d'attraction. Or, que de telles causes existent en effet et modifient considérablement les relations qui devraient avoir lieu dans l'état elliptique, c'est, je crois, ce dont on ne pourra douter après la discussion suivante.

Je commence par considérer les expériences faites sur l'arc, ou très-près de l'arc méridien qui s'étend de Formentera jusqu'à Unst. Il existe sur cet arc plusieurs stations, telles que Unst, Leith et Paris, où les expériences ont été répétées deux fois par des observateurs différents qui se sont trouvés très-sensiblement d'accord entre eux. On peut, je crois, ac-

corder une égale probabilité aux mesures de Formentera et de Barcelone, qui ont été faites dans mon dernier voyage avec deux boules de différent diamètre, et par le concours de deux observateurs dont chacun a exécuté plusieurs fois toutes les parties de l'opération. Pour avoir un poids moral égal sur d'autres points, j'ai réuni les observations du capitaine Kater, à Londres, avec celles que nous avons faites, M. Mathieu et moi, à Dunkerque : ce qui peut s'effectuer d'une manière rigoureuse et indépendante de toute hypothèse par un procédé que j'expliquerai plus bas. Je réunis de même, par ce procédé, les expériences de Clermont et de Figeac, qui répondent à des latitudes très-peu différentes, laissant celles de Barcelone et de Formentera séparées. J'obtiens ainsi six longueurs du pendule bien certaines, réparties à peu près de cinq en cinq degrés de latitude sur un arc de plus de vingt-deux degrés de longueur. Mais avant d'aller plus loin, il est nécessaire d'expliquer comment ces combinaisons partielles ont été faites, afin de montrer qu'elles ont pu seulement l'être, sans aucune hypothèse préalable, sur les coefficients de la loi que l'on voulait vérifier, mais seulement en supposant l'existence sensiblement approchée de cette loi sur les trois petits intervalles de latitude qu'embrassent les observations ainsi combinées. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse de réunir les opérations du capitaine Kater, à Londres, avec celles que nous avons faites, M. Mathieu et moi, à Dunkerque. La différence de nos stations est de 29′ en latitude; or, d'après la comparaison générale des observations déja faites, on peut admettre que la loi de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude, existe, en général, d'une manière sen-

siblement exacte sur un si petit arc, sauf à ne rien prononcer sur la valeur particulière du coefficient de la proportion entre ces deux points si voisins du globe. Mais, par cela seul que la proportion sera admise, on pourra calculer la latitude intermédiaire qui correspondrait à la moyenne arithmétique entre les deux pendules observés, et il est facile de voir que le carré du sinus de cette latitude sera précisément la demi-somme des carrés du sinus des latitudes. Cette règle peut être employée pour réduire à une même latitude la moyenne arithmétique d'un nombre quelconque de longueurs, observées dans autant de stations diverses. Le carré du sinus de la latitude moyenne sera toujours égal à la moyenne arithmétique prise entre les carrés des sinus de toutes les stations.

En effet, soient l_1, l_2, l_3... les longueurs du pendule observées aux stations dont les latitudes sont L_1, L_2, L_3...., etc. Si ces stations sont assez voisines pour qu'une même loi de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude puisse leur être appliquée, en nommant a et b les deux constantes de cette loi pour la portion du sphéroïde que les observations embrassent, on aura

$$l_1 = a + b \sin.^2 L_1$$
$$l_2 = a + b \sin.^2 L_2$$
$$l_3 = a + b \sin.^2 L_3$$
etc.

Désignons maintenant par L, la latitude intermédiaire qui répondrait à une longueur du pendule égale à la moyenne arithmétique de toutes ces longueurs. En représentant cette moyenne par l, on aura les deux équations

$$l = \frac{1}{n} \Sigma . l_1, \quad l = a + b \sin.^2 L$$

Mais les premières équations, étant ajoutées ensemble et divisées par leur nombre n, donnent

$$\frac{1}{n}\Sigma l_1 = a + \frac{b}{n}\Sigma.\sin.^2 L_1;$$

conséquemment on aura

$$\sin.^2 L = \frac{1}{n}\Sigma.\sin.^2 L_1:$$

ce qui est précisément la propriété que nous avons énoncée plus haut. À l'aide de cette propriété, nous avons aisément déduit des observations isolées les combinaisons moyennes qui devaient naturellement offrir plus de certitude que chacune d'elles.

Dans la loi de variation proportionnelle au carré du sinus de la latitude, deux longueurs absolues du pendule, mesurées à deux latitudes connues, suffisent pour déterminer le coefficient de cette proportion, ainsi que la constante qui complète les valeurs absolues et représente le pendule équatorial. En effectuant successivement ce calcul pour les quatre intervalles consécutifs qui nous sont donnés par les cinq moyennes réparties entre Formentera et Unst, nous obtenons autant de valeurs particulières de ces deux quantités, et nous pourrons ainsi reconnaître si elles sont constantes ou variables : les résultats de ce calcul sont rassemblés dans le tableau qui suit :

OBSERVATIONS COMBINÉES.	LONGUEURS moyennes du pendule : l.	LATITUDES correspondantes aux longueurs moyennes : L.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus conclu : log. b.	LONGUEUR du pendule équatorial conclue : a
	mm		mm	mm
Unst : Kater, Biot......	994,942120	60°.45′.25″	0,7400049	990,758130
Leith : Kater, Biot......	994,533134	55 58 37	0,7411971	990,747728
Londres et Dunkerque..	994,101902	51 16 38	0,7425517	990,737225
Clermont et Figeac......	993,520041	45 11 46	0,6377051	991,334103
Barcelone.............	993,232131	41 23 15	0,5407604	991,713829
Formentera...........	993,069660	38 39 56		

Le coefficient de la proportion reste à peu près le même dans les trois premiers intervalles, c'est-à-dire depuis Unst jusqu'au parallèle moyen de Clermont et de Figeac (1). Depuis ce parallèle jusqu'à Barcelone, il commence à décroître d'une manière fort sensible; et il décroît plus encore dans le dernier intervalle, de Barcelone à Formentera. Cette progression d'affaiblissement est tellement marquée, qu'il faudrait supposer dans les observations des erreurs de 8 et 9 centièmes de millimètre, pour pouvoir conserver au coefficient du carré du sinus la valeur qu'il a dans les intervalles plus voisins du nord. Or c'est ce qu'il paraît impossible d'admettre, avec l'habitude que l'on a aujourd'hui de ces sortes d'expériences, et d'après l'accord des résultats partiels donnés par les deux boules dans les deux dernières stations. Les lon-

(1) Cette régularité, d'accord avec celle du pendule équatorial dans les trois premiers intervalles, semble montrer que la correction de hauteur à Clermont et à Figeac, quoique assez considérable, n'apporte dans les résultats de ces stations aucune anomalie sensible, et paraît en conséquence devoir peu différer de la vérité.

gueurs du pendule équatorial, conclues de chaque intervalle, présentent une progression non moins frappante. Les trois premières sont sensiblement constantes et d'accord entre elles; mais elles donnent toutes un pendule équatorial beaucoup trop faible, car on verra plus bas que la longueur réelle de ce pendule, telle que la donnent les mesures faites à l'équateur même, ou à de très-petites latitudes, est 991,005776, sans que l'on puisse admettre, dans la moyenne, un écart notable de ce nombre. Ici les valeurs conclues des latitudes supérieures à 45° donnent des longueurs beaucoup plus faibles; tandis que les latitudes inférieures en donnent de trop fortes, et de part et d'autre avec une constance qu'il paraît impossible d'attribuer à des erreurs d'observation.

Il faut remarquer que ces irrégularités sont en harmonie avec celles que les degrés du méridien présentent sur le même arc. D'après les tableaux donnés par M. Delambre, dans le 3e volume de la Méridienne, page 548, la plus grande anomalie des degrés de France se montre entre les parallèles de 44°.41'.48" et 47°.30'.46", et leur variation successive offre un ralentissement considérable entre Formentera et Barcelone (1), où nous trouvons aussi que la variation du pendule éprouve un affaiblissement marqué.

Nous pouvons d'ailleurs donner une confirmation frappante de ces résultats, d'après des observations qui n'ont pas con-

---

(1) A Formentera les résultats obtenus par les deux boules s'écartent de 0m,002140 autour de leur moyenne. A Barcelone ils s'écartent de 0m,018141. Nous verrons bientôt que les observations du capitaine Duperrey fournissent une confirmation directe des résultats moyens de cette dernière station.

couru à les produire. M. le capitaine Duperrey a transporté, avec tous les soins qui le caractérisent, deux pendules de comparaison de Paris à Toulon et de Toulon à Paris. La longueur du pendule simple étant connue dans la première de ces stations, on peut calculer sa longueur dans l'autre d'après les carrés des nombres d'oscillations infiniment petites que le pendule de comparaison réduit à une même température, et au vide, a faites dans chacune d'elles en un jour moyen : en effet, si ce nombre est N pour Paris, où la longueur absolue observée est λ, et qu'il soit $N + n$ pour tout autre lieu où la longueur observée serait λ_1, on aura

$$\lambda_1 = \lambda + \frac{2n}{N}\lambda + \frac{n^2}{N^2}.\lambda.$$

Alors, en réduisant respectivement λ, λ_1 au niveau de la mer, et comparant les longueurs réduites l, l_1 aux latitudes correspondantes, on en déduira la valeur moyenne du coefficient du carré du sinus pour les deux stations. On peut même remarquer que cette valeur, dépendant surtout de la différence $\lambda_1 - \lambda$, ne serait pas sensiblement affectée par de petites erreurs de 1 ou 2 centièmes de millimètre, qui pourraient se trouver dans l'évaluation absolue de λ; car n étant toujours très-petit par rapport à N, ces erreurs, supposées déja très-petites par elles-mêmes, se trouveraient atténuées par le facteur $\frac{n}{N}$, de manière à n'avoir aucune influence observable dans les résultats.

Les éléments de ce calcul et ses conséquences pour les observations du capitaine Duperrey sont réunis dans le tableau suivant. On a pris pour longueur du pendule simple à Paris la moyenne entre les deux qu'on y a obtenues par le pro-

cédé de Borda, et l'on a pris de même pour Toulon la moyenne des longueurs données par les deux pendules du capitaine Duperrey. Celles-ci, comme les précédentes, ne différaient d'ailleurs entre elles que de 1 ou 2 centièmes de millimètre.

LIEUX D'OBSERVATION.	LATITUDES boréales L.	NOMBRE d'oscillations infiniment petites du pendule de comparaison réduit au vide et au niveau de la mer.	LONGUEUR du pendule simple l.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus conclu : log. b.	LONGUEUR du pendule équatorial conclue : a
Paris...........	48°.50'.14"	N° 1...90336,6668 N° 3...90168,4978	mm 993,856463	mm 0,6933747	mm 991,058378
Toulon.........	43 7 20	N° 1...90314,6060 N° 3...90145,9556	993,365222		

Le coefficient du carré du sinus se trouve ici plus faible qu'il ne l'était de Dunkerque au 45ᵉ degré, et plus fort que du 45ᵉ degré à Barcelone, conformément à l'existence d'un décroissement progressif; et, ce qui offre une confirmation plus précise encore, la valeur 0,6933747, qui lui est assignée par ces expériences faites du 49ᵉ degré au 43ᵉ, est presque exactement la moyenne entre les valeurs 0,7425517 et 0,6377051 trouvées par nos premières expériences pour l'intervalle du 51ᵉ au 40ᵉ degré. Rien de tout cela ne peut se concilier avec la valeur du même coefficient, obtenue pour les latitudes plus boréales.

Cette valeur 0,6933747 devant convenir, à fort peu près, aux diverses parties de l'arc que les latitudes de Paris et de Toulon embrassent, elle doit suffire pour déduire avec une grande approximation, de ces deux stations extrêmes, les lon-

gueurs absolues du pendule aux latitudes intermédiaires comprises dans leurs intervalles. En l'appliquant ainsi à la recherche des longueurs du pendule, sur les parallèles de Clermont, Figeac et Barcelone, on trouve les résultats suivants :

NOMS DES LIEUX.	LATITUDES boréales L.	LONGUEURS du pendule simple au niveau de la mer conclues des observations de Paris et Toulon.	LONGUEURS du pendule simple mesurées aux stations mêmes, réduites au vide et au niveau de la mer.	EXCÈS de l'observation immédiate sur les longueurs conclues de Paris et Toulon.
		mm	mm	mm
Clermont-Ferrand.......	45°.46'.48"	993,594064	993,582277	— 0,011787
Figeac...............	44 36 45	993,493494	993,457805	+ 0,035689
Barcelone............	41 23 15	993,216485	993,232131	— 0,015646

Les écarts exprimés dans la dernière colonne sont dans les limites d'erreurs que les observations embrassent, même sans y faire intervenir les effets possibles des circonstances locales. Un pareil accord entre des résultats déduits d'éléments tout-à-fait indépendants les uns des autres, puisque le pendule de Paris n'était entré pour rien dans nos premiers calculs, semble mettre individuellement les résultats hors de doute, et achève par conséquent de donner une entière certitude aux conséquences numériques déduites plus haut de leurs rapports.

Nous pouvons répéter les mêmes épreuves sur un autre méridien également situé en Europe, en réunissant les observations faites par le capitaine Sabine, au Spitzberg et à Drontheim en Norwége, avec les expériences que nous avons faites nous-mêmes à Padoue et à Lipari. Nos résultats se

lient avec ceux du capitaine Sabine, au moyen du pendule absolu observé à Londres par le capitaine Kater, pendule qui s'est trouvé identiquement conforme avec le nôtre à Unst, à Leith et à Paris. Nous avons ainsi quatre longueurs absolues du pendule, réparties sur un même arc méridien de 41° $\frac{1}{2}$ de longueur (1). En calculant le coefficient du carré du sinus par les trois intervalles successifs que ces stations embrassent, on trouve les résultats suivants :

NOMS DES LIEUX D'OBSERVATION.	LONGUEURS observées du pendule simple réduites au vide et au niveau de la mer *l*.	LATITUDES boréales L.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus conclu : log. *b*.	LONGUEUR du pendule équatorial conclue : a
	mm		mm	mm
Spitzberg	996,035870	79°.49'.58"	0,7821340	990,169277
Drontheim	995,013219	63 25 54	0,6811560	991,174193
Padoue	993,607295	45 24 3	0,6440549	991,373420
Lipari	993,079164	38 28 37		

Ici la marche générale des résultats est la même que sur le méridien de Formentera et d'Unst. Le coefficient du carré du sinus s'affaiblit à mesure que la latitude diminue. Le pendule équatorial, donné d'abord beaucoup trop faible par

(1) Les longueurs tirées des expériences du capitaine Sabine sont ici réduites au niveau de la mer, comme les nôtres, d'après la simple proportion du carré de la distance au centre de la terre. Cela les rend un peu différentes de celles qu'il a obtenues avec un autre mode de réduction plus arbitraire : nous avons agi ainsi pour toutes celles de ses expériences que nous avons employées.

l'extrémité la plus boréale de l'arc, devient ensuite trop fort quand on le conclut de la partie australe, précisément comme sur le méridien d'Unst et de Formentera; seulement les valeurs absolues ne sont pas les mêmes, elles sont en général plus faibles. Ces résultats uniquement déduits des observations semblent prouver avec évidence que, sur le continent d'Europe, les intensités de la pesanteur s'écartent très-fortement des lois de l'ellipticité.

Pour compléter ces épreuves, il faudrait les prolonger jusqu'à l'équateur; mais les observations manquent pour cet objet sur le dernier méridien que nous venons de considérer. Nous sommes plus heureux pour celui d'Unst. Très-près de son point d'intersection avec l'équateur, nous trouvons Saint-Thomas où le pendule a été observé par le capitaine Sabine. Si l'on compare la longueur absolue qui en résulte avec la mesure de Formentera, ce qui comprend un intervalle de 38 degrés, on trouve les résultats suivants :

LIEUX d'observation.	LONGUEURS observées du pendule simple dans le vide et au niveau de la mer.	LATITUDES boréales.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus conclu : log. *b*.	LONGUEUR du pendule équatorial conclue : a
Formentera............	mm 993,069660	38°.39'.56"	mm 0,7005968	mm 991,110622
Jamaïque............	991,110881	0 24 41		

Ici le coefficient du carré du sinus se relève de manière à se rapprocher des valeurs que les latitudes plus boréales lui donnent.

Ce résultat paraît n'être point particulier au méridien de Formentera et d'Unst. Nous le retrouvons entre New-Yorck et la Jamaïque, deux stations du capitaine Sabine qui sont à peu près à la même longitude entre elles, et dont la première se trouve presque exactement sur le parallèle de Barcelone. En effet, ces deux stations fournissent les résultats suivants :

LIEUX D'OBSERVATION.	LONGUEURS observées du pendule simple dans le vide et au niveau de la mer : *l*.	LATITUDES boréales L.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus conclu : log. *b*.	LONGUEUR du pendule équatorial conclue : a
New-York............	mm 993,158649	40°.42'.43"	mm 0,7075788	mm 990,988870
Jamaïque.............	991,472505	17 56 7		

On voit que le coefficient du carré du sinus se relève ici comme entre Formentera et Saint-Thomas, et même il devient un peu plus fort; mais le pendule équatorial conclu se trouve plus faible de 0^{mm},121752, quantité fort considérable.

Pour développer ce phénomène, nous n'avons qu'à calculer les longueurs absolues du pendule aux latitudes de New-York et de la Jamaïque, d'après les mesures de Barcelone et de Saint-Thomas, en employant pour la réduction les valeurs du coefficient propres à ces dernières : nous aurons ainsi le tableau suivant :

Latitude de la station de New-York..................	40°.42′. 3″
Latitude de la station de Barcelone..................	41 .43 .15
Log. *b* à cette latitude............................	0,5407604
	mm
Réduction à la latitude de New-York : conclue........	0,041306
Longueur observée du pendule à Barcelone.......	993,232131
Longueur du pendule à New-York : conclue........	—993,190825
Observée.........	993,158649
Excès d'intensité sur le méridien d'Unst et de Barcelone.	+0,032176

Latitude de la la station de la Jamaïque.............	17°.56′. 7″
Latitude de la station de St.-Thomas................	0 .24 .41
Log. *b* à cette station..............................	0,7005968
	mm
Réduction à la latitude de la Jamaïque : conclue......	+0,475663
Longueur observée du pendule à St-Thomas.........	991,110881
Longueur du pendule à la Jamaïque : conclue........	991,586544
Observée...........	991,472505
Excès d'intensité sur le méridien d'Unst et de St-Thomas.	+0,114039

On voit que l'intensité de la pesanteur à New-York se trouve un peu moindre qu'à Barcelone; mais à la Jamaïque elle est beaucoup plus faible qu'à Saint-Thomas : c'est ce qui raccourcit comparativement le pendule équatorial sur le méridien de New-York et de la Jamaïque. En général, la discussion des expériences voisines de l'équateur nous prouvera bientôt qu'il existe à Saint-Thomas une anomalie locale qui y donne un pendule trop long.

Les expériences actuelles n'offrent plus que deux autres stations qui soient situées sensiblement à une même longitude : ce sont celles du Groenland et de Sierra-Leone, où le ca-

pitaine Sabine a observé. Ses expériences donnent les résultats suivants :

LIEUX D'OBSERVATION.	LONGUEURS observées du pendule réduites au vide et au niveau de la mer : l.	LATITUDES boréales.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus conclu : log. b.	PENDULE équatorial : conclu : a
	mm		mm	mm
Groenland............	995,746455	74°.32'.19"	0,7087658	990,995850
Sierra-Leone..........	991,107348	8 .29 28		

Pour comparer ces résultats avec ceux du méridien de France et d'Écosse, réduisez l'observation d'Unst à la latitude du Groenland au moyen du coefficient propre à la latitude d'Unst. Réduisez de même le pendule de Saint-Thomas à la latitude de Sierra-Leone au moyen du coefficient propre à Formentera : vous aurez ainsi les valeurs suivantes :

DÉSIGNATION DES LIEUX.	LONGUEURS conclues du pendule simple dans le vide et au niveau de la mer.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus : conclu log. b.	PENDULE équatorial conclu : a
	mm	mm	mm
Groenland conclu d'Unst........	995,863039	0,7091298	991,108451
Sierra-Leone conclu de St-Thomas.	991,220043		

Le coefficient du carré du sinus est à très-peu près le même sur les deux méridiens ; ainsi le décroissement total de la pesanteur y est pareil entre les latitudes ainsi comparées. Mais

les valeurs absolues sont toutes deux plus fortes de près de $\frac{12}{100}$ de millimètre sur le méridien de Formentera et d'Unst; une telle différence excède de beaucoup les erreurs dont les expériences sont susceptibles. Il en faut donc conclure qu'il existe aussi dans la pesanteur à Unst un excès relatif d'intensité du même ordre que celui que Saint-Thomas présente.

Cet excès se manifeste encore avec plus d'évidence lorsque l'on compare Unst à Drontheim, station du capitaine Sabine qui diffère peu d'Unst en latitude. Si l'on prend les pendules observés dans ces deux lieux, et qu'on fasse subir à chacun d'eux la petite réduction nécessaire pour le ramener au parallèle intermédiaire, en employant pour cet objet la valeur du coefficient propre à chaque station, on trouve les résultats suivants:

NOMS des LIEUX.	LATITUDES boréales.	LONGUEUR du pendule simple observée, réduite au vide et au niveau de la mer.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction au parallèle moyen.	RÉDUCTION au parallèle moyen dont la latitude est 62°.5'.40".	LONGUEUR conclue du pendule réduite au parallèle moyen.
		mm	mm	mm	mm
Drontheim	63°.25'.54"	995,013219	0,7821340	—0,115006	994,898213
Unst	60 45 25	994,942121	0,7400049	+0,107760	995,049888
Excès d'intensité à Unst					+0,151668

Ainsi l'excès d'intensité relatif à Unst est indubitable. Il répond à une différence de 6,585 oscillations dans la marche diurne d'une horloge, qui serait transportée du méridien d'Unst sous celui de Drontheim, en suivant le parallèle moyen

dont la latitude est 62°.5'.40". Il est présumable qu'une si grande inégalité se manifestera puissamment dans les degrés d'Écosse, lorsque l'arc du méridien qui doit s'étendre jusqu'à Unst aura été complètement mesuré.

Ceci nous conduit à comparer entre elles les longueurs du pendule observées sur les mêmes parallèles géographiques, ou très-près d'un même parallèle; car lorsque la différence de latitude des stations est fort petite, on peut généralement admettre entre elles la loi du carré du sinus, et s'en servir pour les réduire toutes à un même parallèle moyen. A la vérité, pour effectuer cette réduction avec une entière rigueur, il faudrait avoir déterminé les valeurs du coefficient du carré du sinus pour le méridien de chaque station à la latitude où elle se trouve, puisque nous venons de reconnaître qu'il existe entre ces valeurs de très-grandes inégalités. Mais, si les différences en latitude sont fort petites, et par conséquent les réductions très-faibles, l'incertitude qui pourra souvent exister sous ce rapport aura très-peu d'influence sur le résultat définitif; et, dans tous les cas, on devra se borner aux comparaisons où elle sera sans importance.

Nous commencerons par le parallèle qui s'étend de Bordeaux à Fiume, et nous emploierons pour coefficient de réduction celui que les expériences du capitaine Duperrey donnent entre Toulon et Paris. On a vu plus haut que ce coefficient s'accorde exactement avec la valeur que l'on déduirait par interpolation des expériences faites entre Dunkerque et Barcelone. Avec ce mode de réduction, les observations faites depuis Bordeaux jusqu'à Fiume présentent le tableau suivant, où les stations sont rangées par ordre en allant de l'ouest vers l'est.

NOMS des lieux D'OBSERVAT.	LATITUDES boréales.	LONGUEURS du pendule simple observées, réduites au vide et au niveau de la mer.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction.	RÉDUCTION au 45ᵉ degré.	LONGUEUR conclue du pendule dans le vide et au niveau de la mer sur le 45ᵉ parallèle.	ÉCARTS des résultats partiels autour de la moyenne.
		mm	mm	mm	mm	mm
Bordeaux....	44°.50′.26″	993,452935	0,6933747	+0,012365	993,465300	−0,055051
Figeac......	44 .36 .45	993,457805		+0,030051	487856	−0,032495
Clermont....	45 .46 .48	993,582277		−0,060483	521794	+0,001443
Milan.......	45 .28 . 1	993,547642		−0,036211	511431	−0,008920
Padoue......	45 .24 . 3	993,607294		−0,031085	576209	+0,055858
Fiume......	45 .19 . 0	993,584075		−0,024558	559517	+0,039166

Longueur moyenne du pendule en Europe sur le parallèle de 45° nord. 993,520351.

Toutes les longueurs observées dans les six stations étant ainsi rendues comparables entre elles, si l'on examine leur succession en allant de l'est vers l'ouest, on trouve que la plus petite intensité de la pesanteur a lieu à Bordeaux, station la plus occidentale du parallèle. Cette intensité devient plus grande à Figeac, plus grande encore à Clermont-Ferrand, où elle est sensiblement égale à la moyenne. A Milan, de l'autre côté des Alpes, on lui retrouve à très-peu de chose près la même valeur qu'à Clermont. Mais elle s'accroît fortement à Padoue, où les astronomes italiens ont trouvé une discordance locale de 13″,5 entre la latitude observée et la latitude qui se déduirait de Milan par les opérations géodésiques. Padoue est, de toutes nos stations, sur ce parallèle, celle où la pesanteur acquiert la plus grande intensité relative; elle s'y écarte de la moyenne exactement autant qu'à Bordeaux en sens contraire; et sa variation totale entre ces deux stations fait sur les longueurs du pendule une différence de $0^{mm},110809$:

ce qui répondrait à une variation de $4'',818$ dans la marche diurne d'une horloge qui suivrait le temps moyen. A l'est de Padoue, à Fiume, l'excès d'intensité de la pesanteur se soutient encore d'une manière marquée, quoiqu'il y soit pourtant moindre : la conclusion générale de ces phénomènes, c'est qu'il existe sur ce parallèle une cause physique très-étendue, qui y rend l'intensité de la pesanteur comparativement plus forte à l'occident des Alpes qu'à l'orient. Serait-ce l'état volcanique de l'Italie qui aurait cette influence ! On serait peu porté à le croire en voyant que le pendule de Lipari, mesuré au milieu des volcans les plus actuellement actifs de cette contrée, et sur le penchant même d'un ancien cratère, indique une intensité de la pesanteur relativement un peu plus forte à la vérité, mais de très-peu plus forte que celle qui s'observe à Formentera presque sur le même parallèle géographique, où l'action des volcans ne peut être soupçonnée. La mesure géodésique du parallèle compris entre Bordeaux et Padoue semblerait devoir donner sur ce point plus de lumière; mais l'excessive difficulté qu'offre la mesure des amplitudes astronomiques, et peut-être aussi cette espèce de nécessité de revenir plusieurs fois sur des opérations de ce genre, avant de parvenir à leur donner une suffisante exactitude, tout cela fait que l'on ne peut pas en employer les résultats partiels comme numériquement rigoureux. Cependant on peut remarquer que la plus grande inégalité des degrés successifs de cet arc a lieu à son origine occidentale où l'intensité de la pesanteur se montre la plus faible; et cette inégalité, qui s'élève à 187 mètres, est d'un ordre tel qu'elle paraît ne pas pouvoir être au moins tout entière attribuée aux observations.

Nous considérerons maintenant un autre parallèle beaucoup plus boréal, celui de 75°, qui est exactement intermédiaire entre les stations du capitaine Sabine au Groenland, au Spitzberg, et à Hammerfest en Norwège. La différence extrême de ces stations en longitude est de 42°.35′.45″, d'où l'on voit qu'elles appartiennent à des méridiens très-différents. Dans le calcul des petites réductions qui doivent les ramener à une même latitude, nous donnerons au carré du sinus la valeur que les expériences mêmes lui assignent entre le Spitzberg et Drontheim; nous aurons ainsi le tableau suivant, où les stations sont rangées par ordre en allant de l'ouest vers l'est.

NOMS des lieux D'OBSERVAT.	LATITUDES boréales.	LONGUEUR du pendule simple observée, et réduite au niveau de la mer.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction.	RÉDUCTION au 75ᵉ degré de latitude.	LONGUEURS du pendule conclues pour le parallèle de 75° nord.	ÉCARTS des résultats partiels autour de la moyenne.
		mm	mm	mm	mm	mm
Groenland...	74°.32′.19″	995,746455	0,7821340	+0,024720	995,771175	—0,021868
Spitzberg....	79 .49 .18	996,035870		—0,216945	995,818925	+0,025882
Hammerfest..	70 .40 . 5	995,531153		+0,257876	995,789029	—0,004014
Longueur moyenne du pendule à 75° de latitude nord.... 995,793043.						

Ici les expériences n'indiquent plus dans l'intensité de la pesanteur des variations à beaucoup près aussi considérables que sur les parallèles de 60° et 45° : même on peut dire que les différences de nos trois pendules réduits à la même latitude tombent dans les limites d'erreurs que les observations comportent; et cet accord atteste que le coefficient du carré

du sinus employé pour les réduire ne s'écarte pas beaucoup de la valeur qui convient à ces hautes latitudes en Europe. En conséquence nous en ferons usage, pour conclure de ces trois observations si bien concordantes la longueur du pendule polaire. Mais, afin de limiter la réduction à ce qu'elle a de strictement nécessaire, nous ne l'appliquerons pas aux trois longueurs que nous venons d'obtenir pour le parallèle de 75° : nous commencerons par ramener nos trois pendules à un seul en prenant leur moyenne, que nous appliquerons à la latitude de 74°.35'.25",6, trouvée par la règle de la page 6, relative aux carrés des sinus ; et ce sera à cette moyenne, ainsi déduite purement des expériences, que nous ferons subir la faible réduction nécessaire pour la ramener au pendule polaire. Nous aurons ainsi le tableau suivant :

NOMS DES LIEUX dont on a combiné les OBSERVATIONS.	LATITUDE moyenne du pendule qui y correspond.	LONGUEUR moyenne du pendule propre à cette latitude.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction.	RÉDUCTION au pôle.	PENDULE polaire conclu
Groenland, Spitzberg, Hammerfest.	74°.35'.25",6	mm 995,771159	mm 0,7821340	mm 0,417804	mm 996,188963

Pour apprécier la certitude de cette réduction, il suffit de dire qu'on n'y trouverait qu'une différence de $\frac{3}{100}$ de millimètre, si, au lieu de la calculer, comme nous l'avons fait, avec le coefficient propre à ces hautes latitudes, tel qu'il résulte de l'expérience, on eût employé le coefficient beaucoup trop faible qui appartient aux latitudes d'Édimbourg et de Leith;

mais ce mode d'opération eût été évidemment moins exact, et contraire à toutes les analogies que présente l'accroissement progressif du coefficient vers les hautes latitudes.

Nous discuterons maintenant les expériences faites près de l'équateur ou à l'équateur même, pour en déduire la valeur réelle du pendule équatorial. Comme, jusqu'à 20° de latitude, les réductions à l'équateur sont très-peu sensibles, nous les étendrons jusque-là; mais, pour mieux apprécier l'accord ou la discordance des observations avant de les combiner, nous commencerons par réduire individuellement à un parallèle commun toutes celles qui se rapprochent par la latitude, et ce sera à leur moyenne que nous appliquerons la réduction à l'équateur, réduction que nous calculerons avec le coefficient du carré du sinus trouvé par New-York et la Jamaïque, parce qu'il paraît plus exempt d'irrégularités locales que celui de Saint-Thomas et Formentera. Et cependant telle est la petitesse des réductions dont nous aurons besoin, que l'emploi même de ce dernier coefficient ne produirait dans aucun des pendules réduits une différence appréciable à l'observation.

LIEUX d'observation.	LATITUDES.	LONGUEURS du pendule observées, réduites au vide et au niveau de la mer.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus, employé pour les réductions.	RÉDUCTION au 20e degré nord.	LONGUEURS conclues du pendule sur le parallèle de 20° nord.	Réduction au pendule équatorial calculé.	Pendule équatorial conclu.	Écarts des résultats partiels autour de la moyenne.
		mm	mm	mm	mm			
Ile Mowi....	20°.52'. 7" N.	991,774588	0,7075788	— 0,0505898	991,723999			
Jamaïque....	17 .56 . 0 N.	991,472505		+ 0,113064	991,585569			
			Moyenne sur le parallèle de 20° nord....		991,654779	mm —0,596598	mm 991,058181	mm +0,031166
				Réduction au 20° degré sud.	Longueurs conclues du pendule sur le parallèle de 20° sud.			
				mm	mm			
Rio-Janeiro..	22 .55 .13 S.	991,695571		— 0,177348	991,518223			
Ile de France.	20 9 .40 S.	991,770680		— 0,009249	991,761431			
			Moyenne sur le parallèle de 20° sud.....		991,639828	—0,596598	991,043230	+0,016215
				Réduction au parallèle de 10°.50' nord.	Longueurs conclues du pendule sur le parallèle de 10°.50' nord.			
				mm	mm			
Ile Guam....	13 .27 .51 N.	991,454976		— 0,096325	991,358651			
Trinité......	10 .38 .56 N.	991,063639		+ 0,006013	991,069639			
Sierra-Leone..	8 .29 .28 N.	991,107348		+ 0,068974	991,176322			
			Moyenne sur le parallèle de 10°.50' nord.		991,201541	—0,180167	991,021374	—0,005641
				Réduction au parallèle de 10°.50' sud.	Longueurs conclues du pendule sur le parallèle de 10°.50' sud.			
				mm	mm			
Bahia.......	12 .59 .21 S.	991,220270		— 0,077490	991,142780			
L'Ascension..	7 .55 .48 S.	991,195850		+ 0,083092	991,278943			
			Moyenne sur le parallèle de 10°.50' sud..		991,210861	—0,180167	991,030694	+0,003679
				Réduction à l'équateur.	Longueurs conclues du pendule à l'équateur.			
				mm	mm			
St-Thomas...	0 .24 .41 N.	991,110881		— 0,000263	991,110618			
Rawak......	0 . 1 .34 S.	990,946598		— 0,000001	990,946597			
Maranham...	2 .31 .43 S.	990,897503		— 0,009927	990,887576			
			Moyenne à l'équateur même..........		990,981597	0,000000	991,981597	—0,045418
		Longueur moyenne du pendule équatorial déduite de toutes ces combinaisons..........					991,027015	

Les résultats individuels des stations, comparés immédiatement les uns aux autres, offrent ici des différences généralement plus fortes et plus nombreuses qu'on n'en trouve à de plus hautes latitudes, sur un même parallèle. Toutefois les longueurs moyennes du pendule équatorial, déduites des divers parallèles, soit nord, soit sud, s'accordent entre elles dans les limites de l'ordre des erreurs que les observations comportent; ce qui est tout ce que l'on peut espérer. Il est remarquable que le plus grand écart, entre ces moyennes, porte sur les observations faites à l'équateur même, quoique, vu la petitesse des réductions que les autres exigent, l'exactitude du coefficient que nous avons employé pour le carré du sinus doive certainement suffire pour les ramener fidèlement à la valeur équatoriale. Mais aussi l'on doit remarquer que, si l'on excepte l'Ile de France, c'est à l'équateur même que se trouvent les plus grandes discordances individuelles entre les longueurs observées quand on les compare à l'ensemble des résultats.

Si nous réunissons cette longueur moyenne du pendule équatorial avec celles que nous avons obtenues plus haut pour le pôle et pour le 45e degré de latitude, elles offriront la progression suivante, que nous pouvons considérer comme le résultat le plus immédiat des observations.

	LONGUEURS du pendule simple réduites au vide et au niveau de la mer.	Différences successives.	Doubles différences.	Différences secondes.
	mm	mm	mm	mm
Au pôle............	996,188963	2,668612	5,337224	0,350552
A la latitude de 45°...	993,520351	2,493336	4,986672	
A l'équateur.........	991,027015			

On voit que les différences successives sont sensiblement inégales; elles le sont beaucoup plus que les observations individuelles ne le sont entre elles, quelque part qu'on les choisisse. Ce phénomène ne peut donc être révoqué en doute, ni attribué à quelque accident de localité. Or il est tout-à-fait contraire à l'hypothèse elliptique; car, dans celle-ci, la variation de longueur du pendule étant proportionnelle au carré du sinus de la latitude, si l'on représente son expression générale par

$$l = a + b \sin.^2 L ;$$

a et b étant deux constantes, dont la première représente le pendule équatorial lui-même, on aura évidemment

	Longueurs du pendule.	Différences successives.	Différences secondes.
Au pôle L = 90°...	$l = a + b$		
		$\frac{1}{2} b$	
Sur le 45ᵉ parallèle L = 45°...	$l = a + \frac{1}{2} b$		0
		$\frac{1}{2} b$	
A l'équateur L = 0....	$l = a$		

De sorte que les différences premières des trois longueurs ainsi choisies doivent être constantes, et égales à la moitié du coefficient du carré du sinus. Ici, en tirant ces différences de l'ensemble des observations mêmes, nous les trouvons sensiblement inégales, et plus fortes du 45ᵉ degré au pôle que du 45ᵉ degré à l'équateur. C'est précisément le même résultat que nous avions déja individuellement reconnu, par la discussion des observations faites en Europe de part et

d'autre du 45° parallèle; nous ne faisons donc ici que retrouver ce résultat sous une autre forme, mais avec une nouvelle augmentation de probabilités, puisqu'il se trouve déduit d'observations plus nombreuses, et toutes différentes de celles par lesquelles nous l'avions constaté d'abord.

Il suit de là qu'un observateur qui veut calculer l'aplatissement de la terre d'après les mesures du pendule, dans l'hypothèse elliptique, à l'aide du théorème de Clairault, doit trouver des résultats fort différents les uns des autres, selon la portion d'hémisphère où dominent les observations qu'il emploie. Car, par exemple, s'il combine le pendule équatorial donné immédiatement par les expériences avec la valeur de la constante donnée par des observations intermédiaires entre le 45e degré et le pôle, ou entre le 45e degré et l'équateur, ou enfin dans toute l'étendue de l'hémisphère boréal, il obtiendra les trois valeurs rassemblées dans le tableau suivant, où la lettre a représente le pendule équatorial $991^{mm},027015$, tel que nous l'avons trouvé plus haut.

	Valeur du coefficient du carré du sinus b.	Aplatissement elliptique conclu du théorème de Clairault $0{,}00865 - \frac{b}{a}$
	mm	
De 90° à 45°	5,337224	$0{,}00865 - 0{,}00538555 = \frac{1}{306{,}33}$
De 45° à 0°	4,986672	$0{,}00865 - 0{,}00503182 = \frac{1}{276{,}38}$
De 90° à 0°	5,161948	$0{,}00865 - 0{,}00520869 = \frac{1}{290{,}59}$

Le premier de ces aplatissements est presque exactement celui que donnent les inégalités lunaires; le second s'accorde presque identiquement avec celui que M. le capitaine Frey-

cinet a déduit de l'ensemble de ses observations, qui étaient faites principalement depuis le 45e degré jusqu'à l'équateur. Le dernier enfin diffère à peine de $\frac{1}{289}$, que le capitaine Sabine a déduit de toutes ses expériences qui s'étendaient depuis l'équateur jusqu'au Spitzberg, et auxquelles il a associé celles qui avaient été faites en Angleterre et en France. Mais, en général, lorsque l'on sait que le coefficient du carré du sinus est très-sensiblement différent dans les parties du globe situées à diverses latitudes, on conçoit que la valeur qu'on lui attribue, et par conséquent l'aplatissement elliptique qui en résulte par le théorème de Clairault, doivent être considérablement modifiés par la distribution géographique des stations. On pourrait même, d'après la discussion précédente, assigner d'avance le choix de stations qu'il faudrait faire pour obtenir telle ou telle valeur de l'aplatissement comprise entre les limites extrêmes que nous avons tout à l'heure indiquées. Mais de pareilles combinaisons de nombres n'auraient, d'après ce qui précède, aucune application physique véritable, et ne se lieraient par aucun rapport réellement théorique avec la forme du sphéroïde que nous habitons.

En abandonnant ainsi ces rapports illusoires, on peut encore chercher à découvrir par les seules expériences si l'intensité absolue de la pesanteur et les lois de ses variations générales sont les mêmes dans l'hémisphère austral que dans l'hémisphère boréal; ce qui n'empêcherait pas que les aplatissements de ces deux hémisphères pussent être inégaux. A la vérité ayant montré plus haut, comme nous l'avons fait, que les longueurs absolues du pendule sont influencées dans l'hémisphère boréal par des causes très-puissantes et très-

étendues, il devient difficile de fixer bien précisément comment la comparaison des deux pesanteurs doit être faite pour être exacte, et quelles parties des deux hémisphères seront les plus convenables pour cette épreuve. A plus forte raison ne pourrait-on pas se fier à des observations isolées, dans lesquelles on pourrait toujours suspecter que l'égalité ou l'inégalité des longueurs serait produite par des causes purement locales. Malheureusement l'hémisphère austral, beaucoup moins civilisé que le nôtre, est bien loin d'avoir été aussi exploré; et la navigation seule a pu y recueillir quelques résultats qui se lient les uns aux autres. Sous ce rapport, on ne trouve rien de préférable au parallèle du port Jackson et du cap de Bonne-Espérance, sur lequel MM. les capitaines Freycinet, Duperrey et le général Brisbane ont observé le pendule en quatre points qui embrassent un arc de 132°.45′ en longitude. Pour ne former aucune hypothèse sur la valeur du coefficient du carré du sinus, qu'il convient d'appliquer à ces observations, nous les avons réduites au parallèle qui répond à la moyenne des longueurs observées, et nous avons obtenu les résultats suivants :

NOMS des lieux d'observation et des OBSERVATEURS.	LATITUDES australes.	LONGUEURS du pendule observées, réduites au vide et au niveau de la mer.	Moyenne de toutes les longueurs observées dans les quatre stations.	LATITUDE correspondante à la moyenne des pendules : calculée.
Le Cap (Freycinet)	33°.55′.15″	mm 992,577798	mm 992,571514	33°.51′.48″ S.
Port Jackson (Freycinet)	33 51 34	992,614696		
Port Jackson (Duperrey)	33 51 40	992,578448		
Paramata (Brisbane)	33 48 42	992,535135		

Nous n'avons en Europe, dans l'hémisphère boréal, aucune série d'observations faites sur un parallèle aussi voisin de l'équateur; mais nous pouvons calculer la longueur correspondante du pendule, d'après les observations de New-Yorck et de Barcelone, en leur appliquant les valeurs du coefficient du carré du sinus propres aux intervalles qui les séparent de l'équateur. On obtient ainsi les résultats suivants :

NOMS DES LIEUX D'OBSERVATION.	LATITUDES boréales.	LONGUEURS du pendule observées, réduites au vide et au niveau de la mer.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction.	RÉDUCTION à la latitude de 33°.51'.48" nord.	LONGUEUR conclue du pendule sur le parallèle de 33°.51'.48" nord.
Barcelone	41°.23'.15"	mm 993,232131	mm 0,7008794	mm — 0,635936	mm 992,596195
New-Yorck	40 42 43	993,158649	0,7075788	— 0,586262	992,572387
Longueur moyenne du pendule sur le parallèle de 33°.51'.48" nord.					992,584291
Longueur moyenne observée sur le même parallèle au sud de l'équateur.					992,571514
Excès de la pesanteur boréale.					+0,012777

La différence des deux résultats étant de l'ordre des erreurs que les observations et les réductions comportent, on peut regarder les intensités de la pesanteur sur ces deux parallèles comme sensiblement égales entre elles.

On peut faire un rapprochement analogue, en comparant les observations des capitaines Freycinet et Duperrey aux îles Malouines, avec celles de Londres et de Dunkerque : en effet, on a

LIEUX D'OBSERVATION et noms des OBSERVATEURS.	LATITUDES australes.	LONGUEURS du pendule observées, réduites au vide et au niveau de la mer.	MOYENNE des longueurs observées dans les deux stations.	LATITUDE correspondante à la moyenne des longueurs.
Malouines (Freycinet)....	51°.35'.18" S.	mm 994,055282	mm 994,084925	51°.33'.31" S.
Malouines (Duperrey)....	51 31 44	994,114567		

Maintenant, la moyenne des observations de Londres et Dunkerque étant réduite au même parallèle, on aura

LIEUX D'OBSERVATION.	LATITUDES boréales.	LONGUEUR du pendule observée réduite au vide et au niveau de la mer.	LOGARITHME du coefficient du carré du sinus employé pour la réduction.	RÉDUCTION à la latitude de 51°.33'.31" nord.	LONGUEUR conclue du pendule à la latitude de 51°.33'.31" nord.
Londres, Dunkerque.	51°.16'.38"	mm 994,101902	0,7411971	mm + 0,026387	mm 994,128289
Longueur moyenne observée sur le même parallèle au sud de l'équateur...					994,084925
Excès de la pesanteur boréale.............					+ 0,043364

On voit que, par cet exemple comme par le précédent, la pesanteur boréale se trouverait plus forte que l'australe, à pareille latitude, d'une très-petite quantité. Mais, par cela même que la différence est si petite, et conclue d'observations si peu nombreuses, il n'est guère possible de rien prononcer à cet égard, et il faut attendre que de nouvelles expédi-

tions, faites vers de hautes latitudes australes, nous fournissent d'autres points de comparaison.

La discussion précédente n'est pas limitée à montrer les seules conséquences certaines que nous puissions maintenant déduire des expériences du pendule; elle nous apprend encore comment ces expériences doivent être dirigées à l'avenir pour pouvoir être réellement utiles à la théorie de la terre. Puisque des causes très-étendues et très-puissantes paraissent affecter considérablement l'intensité de la pesanteur sur les diverses parties des méridiens et des parallèles, il faut diriger nos expériences de manière à suivre les effets de ces grandes modifications, afin de parvenir à découvrir leurs lois, si toutefois elles ne sont pas absolument irrégulières. Ainsi, désormais il serait peu utile de tenter des expériences isolées, à moins que le hasard ne conduisît à les faire en quelque point remarquable par l'intensité des anomalies; et il faudra, au contraire, s'attacher davantage à les étendre sur le prolongement des arcs déja observés. Ces réflexions s'appliquent évidemment aussi aux mesures mêmes des arcs de méridiens et de parallèles. On a vu plus haut quel intérêt la grande intensité relative de la pesanteur à Unst jettera sur les opérations qui s'exécutent, depuis plusieurs années, en Écosse, pour prolonger l'arc de France et d'Espagne jusque dans cette île. Rien ne serait plus utile pour compléter ce grand arc européen, qu'une opération faite en Afrique dans l'établissement anglais de Cape Coast, situé à la fois très-près de l'équateur et du méridien des îles Shetland. N'y mesurât-on que la longueur du pendule, ce qui n'exige que la possession actuelle du sol, on ajouterait un élément très-im-

portant aux mesures d'Europe. C'est ici que nous devons bien déplorer la perte du courageux et infortuné Bowdich, qui connaissait si parfaitement ces contrées, qui s'était fait aimer, respecter de ces mêmes Ashanties, devenus depuis les plus acharnés ennemis des Anglais sur cette plage, et qui, peut-être, aurait détourné ces malheurs de ses compatriotes si, pour le bien des sciences, il y eût été renvoyé une seconde fois, comme il en avait un si ardent désir. Son zèle, qui s'élançait impétueusement vers tout ce qui pouvait être utile, avait embrassé avec ardeur l'idée de se livrer à ces importantes déterminations, lorsque le malheur et la mort l'arrêtèrent. Le prolongement du parallèle de Bordeaux et Fiume jusqu'à la mer Noire est aussi une opération que nous devons appeler de tous nos vœux. Mais, pour qu'elle soit tout-à-fait utile à la théorie de la terre, ainsi que toute autre mesure de parallèle, il faut indispensablement donner à la mesure des azimuths toute la perfection qu'y peut apporter la lunette méridienne, et les lier successivement les uns aux autres sur toute la ligne, non par des successions de triangles dont la somme d'erreurs est toujours croissante, mais par des observations de relèvements immédiatement réciproques, entre les stations où les azimuths seront successivement observés. Les mêmes remarques s'appliquent au parallèle de Brest à Strasbourg, que l'on mesure actuellement; car il faut bien se persuader que, dans l'état actuel de la théorie du globe, des opérations de ce genre ne peuvent avoir absolument aucune utilité scientifique, si elles ne sont pas exécutées avec toutes les recherches de la plus minutieuse précision.

Une autre conséquence, qui résulte de la discussion dans laquelle nous venons d'entrer sur les mesures du pendule, est relative au choix de sa longueur pour étalon de mesure, ainsi que l'ont fait récemment les Anglais.

Le but que l'on se propose, lorsqu'on cherche dans les phénomènes naturels un étalon de mesure, c'est qu'il puisse être défini rigoureusement, et à perpétuité, par certaines conditions abstraites qui donnent toujours la possibilité de le retrouver avec exactitude. Le pendule remplirait évidemment ces conditions, si sa longueur sur les diverses parties du globe suivait des lois régulières exactement définissables. Mais, lorsque nous voyons cette longueur différer notablement d'un méridien à un autre pour la même latitude, et varier sur le même méridien d'une manière trop irrégulière pour pouvoir être généralement définie, il s'ensuit que, si l'on veut caractériser l'étalon qu'on en dérive, il faudra fixer non seulement le méridien géographique, mais la latitude et jusqu'au choix même de la place particulière où on l'aura observé. Or, indépendamment de l'incertitude qu'entraîne essentiellement un tel mode de fixation, qui peut dire si, dans le même lieu, l'intensité de la pesanteur, et par suite la longueur du pendule, sera dans deux mille ans, ou même dans quelques siècles, exactement égale à ce qu'elle est aujourd'hui? C'est de quoi nous ne pouvons nullement répondre; on peut même concevoir que de simples changements, opérés par la main des hommes, modifient assez le sol pour changer cette intensité d'une manière appréciable. Que devons-nous penser des catastrophes locales que peut produire la nature? Le seul travail continuel des volcans, et les variations perpétuelles

du magnétisme à la surface du sphéroïde terrestre, n'annoncent-ils pas des modifications intérieures dont l'intensité relative de la pesanteur doit vraisemblablement se ressentir? De tout cela, il faut nécessairement conclure que la longueur du pendule n'a pas les caractères de généralité et d'invariabilité que l'on doit chercher dans un étalon de mesure que l'on prépare pour la postérité.

La grandeur de la terre, base de notre système métrique, offre-t-elle des conditions préférables? A la vérité les inégalites des méridiens, attestées par les mesures des parallèles, doivent y porter leur incertitude; et, sur le même méridien, les inégalités des degrés successifs ne permettent pas non plus d'y appliquer, avec rigueur, les lois de l'ellipse auxquelles notre mètre a été cependant assujetti. Mais d'abord, l'influence de ces inégalités s'affaiblit beaucoup lorsque l'on combine ensemble de grands arcs mesurés à des latitudes très-distantes, puisque les arcs de Suède, de France, du Pérou et de l'Inde étant combinés ensemble dans l'hypothèse elliptique, donnent toujours pour le mètre des valeurs qui diffèrent seulement dans les centièmes de millimètres. En outre, il faut remarquer qu'un accord complet de ces diverses évaluations, quoique désirable, mais vraisemblablement impossible, n'est point du tout nécessaire pour définir le mètre d'une manière durable; car, pour obtenir ce seul et principal avantage, il suffirait d'avoir, sous des méridiens physiquement définis du globe, des arcs dont les amplitudes astronomiques et les amplitudes géodésiques fussent déterminées avec assez d'exactitude pour que leur rapport fixât la longueur du mètre avec une suffisante précision. En effet, on retrouverait toujours

ce même rapport, et par conséquent la même longueur du mètre, si l'on mesurait de nouveau, sur ces méridiens, des amplitudes égales aux premières ou peu différentes, comprises entre des stations extrêmes qui seraient ou les mêmes ou peu différentes de celles-là. Or cette fixité de rapport entre les amplitudes géodésiques et les amplitudes célestes, est un point dont nous nous approchons tous les jours, par le perfectionnement continuel des observations astronomiques joint au concours général d'opérations géodésiques qui s'effectuent maintenant sur toutes les parties du continent européen. Les résultats de ces travaux étant tous actuellement expressibles en mètres, en deviendront autant de représentations physiques tracées sur le globe même, et donneront ainsi à l'étalon de France toute la permanence que l'on peut espérer d'atteindre sur cette terre soumise à l'action continuellement changeante du temps.

ADDITION AU PRÉCÉDENT MÉMOIRE.

Dans les mesures définitives du pendule absolu dont nous venons de rapporter l'ensemble, nous avons employé la méthode de Borda, modifiée par deux circonstances principales : la première, c'est de faire le pendule assez peu différent du mètre, pour que les barres qui le mesurent puissent être directement rapportées à l'étalon métrique des archives de France, au moyen du comparateur; la seconde modification consiste à déterminer les excursions variables des languettes des barres, non par un simple vernier, mais par la coincidence moyenne d'une multitude de divisions sensiblement égales, comme nous l'avons expliqué pages 459-461 du IVe volume de la Méridienne; et cette méthode admet également l'emploi du comparateur. Il suit de là, que la longueur totale des barres et de leur languette sortie, représentant la distance du plan de suspension au bas de la boule de platine, s'obtient avec toute la précision de cet in-

strument; c'est-à-dire, pour le nôtre, jusques aux millièmes de millimètres, les écarts des évaluations partielles entre elles n'étant que dans ces millièmes et ne s'élevant jamais aux centièmes. Mais, dans le calcul du pendule, cette distance ne s'emploie pas avec sa valeur totale; il faut d'abord en retrancher le rayon de la boule de platine, c'est-à-dire, un autre élément de longueur. Or, la manière dont Borda s'y est pris pour déterminer ce rayon est bien loin d'offrir une exactitude du même ordre que le comparateur : car ayant d'abord suspendu sa règle pendule au-dessus du plan inférieur de contact amené à l'horizontalité, il laissait *tomber* la languette de cette règle, tantôt immédiatement sur le plan, tantôt sur le sommet de la boule posée sur sa surface; et le diamètre de la boule était donné par la différence des excursions lue sur un vernier latéral. Mais, pour que la languette pût ainsi *tomber* librement par son seul poids, il fallait qu'elle fût libre dans sa rainure; et alors les deux divisions, fixe et mobile du vernier latéral, étant nécessairement aussi distantes l'une de l'autre, comment pouvait-on répondre du centième de millimètre dans la lecture du Vernier? Frappé de cette difficulté dès nos premières observations, M. Arago avait cherché de son côté à y remédier, par un appareil de contact formé de deux plans parallèles, l'un fixe, l'autre mobile à l'aide d'une vis dont un vernier latéral, donnant le centième de millimètre, mesurait les mouvements. M'ayant confié cet appareil lors de mon voyage aux îles Shetland, en 1817, je m'en servis pour mesurer tant le diamètre absolu d'une nouvelle boule de platine dont je fis alors usage, que sa différence avec la boule de Borda et la dimension absolue de celle-ci elle-même. Cette mesure s'étant accordée à très-peu près avec la valeur donnée par Borda, je dus continuer d'employer celle-ci; mais non pas toutefois sans regretter que le nouveau procédé fût encore bien loin de la certitude du comparateur, d'abord par son vernier, ne pouvant accuser que des centièmes de millimètres, et ensuite par l'inégalité des pressions opérées avec la vis dans les différents contacts du plan mobile, soit sur les boules, soit sur le plan fixe contre lequel il s'appliquait pour point de départ.

J'ai enfin imaginé un appareil exempt de ces difficultés, et propre à donner les mesures des corps, soit cylindriques, soit sphériques, avec toute l'exactitude du comparateur, ou plutôt à l'aide du comparateur

même. Il est représenté dans la fig. 1[re]. MMHH est une plaque en métal dont la portion HH, que nous supposerons horizontale, est destinée à porter le comparateur CV, qui s'y attache par ses vis latérales de pression. La portion MM porte un parallélepipède métallique d'acier poli T, dont la face, située du côté du comparateur, sert de plan de contact fixe. L'autre contact se fait sur le petit disque métallique PP, extrémité de la pièce mobile du comparateur, dont les excursions en avant ou en arrière font mouvoir le grand bras CV, au bout duquel est l'index des divisions circulaires ayant l'axe AA pour centre. L'appareil a été réglé de manière que, dans les excursions de la pièce mobile PPP′P′, le petit disque plan PP, reste toujours parallèle à la face opposée de T : ce qui se vérifie par un procédé de retournement qui sera expliqué tout à l'heure. Enfin, une vis verticale O, terminée par un plan perpendiculaire à sa longueur, et placée entre le comparateur et le parallélepipède T, sert à élever à une hauteur convenable les corps que l'on veut interposer entre eux. Maintenant, si B est une boule, dont il s'agit de mesurer le diamètre et de vérifier la sphéricité, on la pose sur le bout de la vis O et on l'élève jusqu'à ce que son centre soit d'abord *à peu près* à la hauteur du comparateur; puis on approche celui-ci jusqu'à ce que son index réponde à peu près au milieu de sa division; et après l'avoir fixé à cette place, on achève d'élever la boule jusqu'à ce que le contact de la pièce PP sur sa surface soit exactement tangentiel : ce que l'on juge par le passage de la lumière autour du point de contact qui doit être alors au centre du disque; ou encore, parce que l'index du comparateur accuse alors le maximum d'écartement que la boule puisse produire entre le comparateur et le plan T. Cet effet, obtenu de l'une ou de l'autre manière, on peut aisément vérifier la sphéricité de la boule, et mesurer les plus petites inégalités de ses diamètres, car il suffit pour cela de tourner la boule sur elle-même en différents sens, et de lire à chaque changement de contact les indications nouvelles du comparateur. Maintenant, pour connaître la valeur absolue du diamètre, correspondante à chacune de ces indications, enlevez la boule, et substituez à sa place un étalon de fer E d'une dimension presque égale au diamètre de la boule, et dont les bouts opposés *ee* soient exactement plans et perpendiculaires à sa

longueur : cela exigera en général que vous tourniez plus ou moins la vis pour amener le centre des faces *ee* à la hauteur du disque PP qui termine la pièce mobile du comparateur. Quand vous aurez atteint ce terme, si la longueur de l'étalon est, comme nous l'avons supposé, très-peu différente du diamètre moyen de la boule, le comparateur s'arrêtera sur une division pareillement très-voisine de sa première indication, et la quantité, dont il aura marché, exprimera en millièmes de millimètres l'excès d'une de ses longueurs sur l'autre. Vous pourrez alors vérifier si les bouts *ee* de l'étalon sont en effet plans, parallèles entre eux, et si la face de contact PP du disque mobile est également parallèle à la face de contact fixe du plan T. Car il suffira pour cela de retourner l'étalon E, pour le faire poser sur la vis O successivement par ses diverses faces latérales, et de voir si l'index du comparateur s'arrête à la même division dans tous ces cas. On pourra même étudier ainsi le travail des bouts, et s'assurer s'ils sont plans, ou concaves, ou convexes; car il suffira pour cela d'élever ou d'abaisser l'étalon, en tournant la vis de manière que le contact du disque mobile s'opère par le centre des faces *ee* ou par leurs bords, soit supérieurs, soit inférieurs, soit latéraux. Si l'on trouve que ces bouts sont bien plans, comme ils doivent l'être, on opérera de nouveau le contact au centre de leurs faces, pour plus d'exactitude; et l'on aura ainsi, par le comparateur, la différence de longueur entre le diamètre de la boule et la dimension longitudinale de l'étalon E.

Il faut remarquer ici, qu'en général ces comparaisons pourront être faites à des températures peu différentes, si l'on a soin de les effectuer l'une après l'autre sans intervalle, avec les mains gantées, et en couvrant l'appareil par une feuille de papier, pour l'abriter contre la chaleur que le corps de l'observateur rayonne. Alors, au lieu de chercher à mesurer la petite différence de température que ces précautions peuvent laisser encore, ce qu'il serait fort difficile de faire avec exactitude, on la compensera rigoureusement par la méthode des alternatives; c'est-à-dire que l'on mettra d'abord dans l'appareil l'étalon E, puis la boule, puis de nouveau l'étalon E. En prenant la moyenne des deux indications données par la première substitution et la troisième, on aura un résultat exactement relatif à la température intermédiaire où la boule a été observée.

Soit t cette température en degrés centésimaux, et F, P les dilatations linéaires du fer et du platine dont l'étalon et la boule sont faits. Alors, si E représente la longueur de l'étalon, et D le diamètre de la boule, à la température de la glace fondante, il est clair que, pour la température moyenne t à laquelle les comparaisons sont réduites, la longueur de l'étalon sera devenue $E[1+Ft]$, et celle du diamètre de la boule $D[1+Pt]$. Si donc l'excès de la première sur la seconde a été trouvé par le comparateur égal à δ, δ étant une quantité si petite que l'on puisse indifféremment lui appliquer, ou ne pas lui appliquer les réductions de température, l'énoncé du résultat en langage algébrique sera

$$D(1+Pt)=E(1+Ft)-\delta,$$

d'où l'on tire

$$D=E+\frac{E(F-P)t-\delta}{1+Pt}, \qquad (1)$$

Ce qui donnera le diamètre de la boule à la température de la glace fondante, lorsque l'on connaîtra celle de l'étalon à cette même température, et que l'on aura de plus observé la différence δ.

Reste donc maintenant à connaître E : or rien n'est plus facile, car il suffit de prendre une des règles pendules dont la languette porte des divisions connues; de la placer sur la barre du comparateur; puis de chercher, par la méthode des coïncidences, la longueur de l'étalon E en fonction de ces divisions-là. Par exemple, pour la mesure de la boule de Borda, j'ai employé un étalon E, dont la longueur différait très-peu de $36^{mm},6$, et je l'ai mesuré en fonction de la règle de Dunkerque, dont les divisions sont des cinquièmes de millimètres, ou $0^{mm},2$. Désignons par R_0 la longueur inconnue de la règle et de sa languette, quand celle-ci est rentrée jusqu'au zéro de ses divisions, la température étant celle de la glace fondante. Si, à cette même température, nous faisons sortir la languette de $0^{mm},2$, et que nous lui ajoutions l'étalon E, très-peu différent de $36^{mm},6$, nous aurons une longueur totale $R_0+0,2+E$, qui sera presque exactement égale à $R_0+36^{mm},8$; par conséquent, si nous lisons alors l'index du comparateur, et si nous le lisons encore en amenant réellement la languette à $36^{mm},8$ après avoir ôté l'étalon, l'excès de la seconde

longueur sur la première, qui sera donné par le comparateur, représentera la valeur de $R_0 + 36^{mm},8 - [R_0 + 0^{mm},2 + E]$, ou simplement celle de $36^{mm},8 - E$; de sorte que cette valeur étant d, on en déduira

$$E = 36^{mm},8 - d, \qquad (2)$$

ce qui fera connaître la longueur de l'étalon E, en fonction des divisions de la languette et des parties du comparateur.

Nous avons supposé les comparaisons faites à la température de la glace fondante, où toutes les réductions deviennent nulles; mais si l'on opérait à toute autre température, *pourvu qu'elle fût constante*, les résultats seraient les mêmes sans aucune différence appréciable, parce que la règle, ainsi que sa languette et l'étalon, étant tous trois en fer, les mêmes variations de température les modifient toutes trois dans le même rapport; de sorte que ces variations affectent seulement leur différence d. Si donc celle-ci est si petite, que ses changements propres de dilatations soient insensibles depuis la température de la glace fondante jusqu'à celle où les comparaisons sont faites, on pourra l'employer directement, telle que le comparateur la donne, et l'appliquer à la différence des valeurs réduites à la température normale; c'est-à-dire que l'équation (2) ci-dessus subsistera encore, en prenant pour d la différence observée sans y faire aucune réduction.

Or, pour ramener les comparaisons à cette condition d'une température constante, il suffit de prendre, comme tout à l'heure, les précautions convenables pour rendre les variations réelles de la température très-faibles, et de les compenser par la méthode des alternatives, en enfermant chaque observation de $R_0 + 0,2 + E$, par exemple, entre deux observations de $R_0 + 36^{mm},8$, dont on prendra la moyenne pour les lui comparer.

J'ai appliqué ce procédé à deux étalons : l'un, que je nommerai E, était, comme je viens de le dire, peu différent de $36^{mm},6$, et destiné à la mesure de la boule de Borda; l'autre, que je nommerai E', était peu différent de 35,6, et destiné à la mesure de la boule d'Écosse. Leurs bouts, touchés en divers points par le comparateur, comme je l'ai dit plus haut, se sont trouvés parfaitement plans et parallèles; et la perfection de leur contact avec le disque mobile PP dans toutes les retournes

a prouvé aussi le parallélisme parfait de cette pièce avec le plan fixe T. J'ai commencé par mesurer ces deux étalons en fonction de la règle de Dunkerque, avec toutes les précautions qui pouvaient y rendre les variations de la température très-faibles. De là sont provenus les tableaux suivants, qui, après ce qui précède, ne demandent aucune explication, si ce n'est que toutes les coïncidences qui ont concouru à les former n'ont pas été simplement observées une fois, mais sont la moyenne de cinq coïncidences générales qui ont été successivement défaites et rétablies, afin d'obtenir une coïncidence moyenne plus exacte.

JOURS des observations.	Valeurs de E conclues.	Écarts des résultats partiels autour de la moyenne.	Valeurs de E′ conclues.	Écarts des résultats partiels autour de la moyenne.
	mm	mm	mm	mm
1820. mars 8	36,5520	— 0,0003	35,5650	+ 0,0029
	56,5528	— 0,0005	35,5572	— 0,0049
	36,5526	+ 0,0003	35,5598	— 0,0023
9	36,5494	— 0,0028	35,5660	+ 0,0039
	36,5556	+ 0,0033	35,5624	+ 0,0003
Valeurs moyennes.	E 36,55228		E′ 35,56208	

Ceci donne l'excès de E sur E′ égal à $0^{mm},99020$. Cette différence pouvait se vérifier immédiatement par le comparateur, en y substituant ces deux étalons tour à tour. Seulement, comme cette alternative faisait parcourir à l'index un grand arc, il fallait pour l'exactitude évaluer, par une expérience spéciale, la valeur totale de cet arc en fonction des règles à languette; c'est ce que j'ai fait, et j'ai trouvé ainsi pour E—E′, $0^{mm},9908933$, valeur à peine différente de la précédente.

Les valeurs des étalons E, E′ étant ainsi connues, il reste à les comparer aux diamètres des deux boules, que nous désignerons par Δ, Δ', pour les températures auxquelles les observations sont faites. Désignons aussi alors par ε, ε' les longueurs que prennent nos deux étalons. Nous avons exposé plus haut la marche de ces expériences. Le tableau suivant offre tout le détail d'une d'entre elles.

LONGUEUR interposée.	Indication du comparateur.	Résultat moyen.	Température moyenne de la série intermédiaire.	Excès de Δ sur ε ou Δ - ε en millimèt.
ε au centre.	373			
Le même.	372	372,75		
Le même.	373			
Le même.	373			
Δ	401			
Autre point dans le même grand cercle.	406			
Autre idem.	403			
Autre idem.	400			
Autre idem.	399			
Autre idem.	403			
Autre idem.	406			
Autre cercle à 45° du précédent.	402			
Autre point du même.	402			
Autre idem.	401			
Autre idem.	378			
Autre idem.	401			
Autre idem.	402			
Autre cercle à 45° du précéd.	407			
Autre point.	405	402,53	+ 9°.3	mm. + 0,05964
Autre idem.	403			
Autre idem.	401			
Autre idem.	401			
Autre cercle.	401			
Autre point.	404			
Autre idem.	405			
Autre idem.	404			
Autre idem.	403			
Autre idem.	400			
Autre cercle.	402			
Autre point.	405			
Autre idem.	407			
Autre idem.	403			
Autre idem.	401			
Autre idem.	400			
ε au centre.	372			
Le même.	373	372,67		
Le même.	373			

LONGUEUR interposée.	Indication du comparateur.	Résultat moyen.	Température moyenne de la série intermédiaire.	Excès de Δ' sur ε' ou Δ' - ε' en millimètres.
ε' au centre.	870			
Le même.	872			
Le même.	871	872,00		
Le même.	873			
Le même.	873			
Le même.	873			
Δ'	910			
Autre point du même grand cercle.	910			
Autre idem.	910			
Autre idem.	910			
Autre idem.	910			
Autre cercle à 45° du précédent.	910			
Autre point du même cercle.	910			
Autre idem.	909			
Autre idem.	911			
Autre idem.	911			
Autre cercle à 90° du précédent.	911	910,20	+ 9°.5	mm − 0,072730
Autre point du même cercle.	910			
Autre idem.	911			
Autre idem.	910			
Autre idem.	909			
Autre cercle à 135° du 1er.	910			
Autre point du même cercle.	911			
Autre idem.	911			
Autre idem.	910			
Autre idem.	910			
ε' au centre.	875			
Le même.	876			
Le même.	876			
Le même.	875	875,67		
Le même.	876			
Le même.	876			

On voit que la boule de Borda n'est pas rigoureusement sphérique; ses divers diamètres font, autour de leur moyenne, des oscillations qui vont jusqu'à $4^p,5$ du comparateur, ou, à $0^{mm},009$ presque $\frac{1}{100}$ de millimètre. Cette boule avait été fabriquée par Le Noir. La boule d'Écosse n'offre point d'anomalies de cet ordre. Les variations accidentelles de ses diamètres sont presque insensibles. Elle a été fabriquée par Fortin.

J'ai fait pour chacune des deux boules d'autres séries pareilles, dont je rapporterai seulement les résultats en les réunissant aux précédents.

	Valeur de $\Delta - \varepsilon$ en millimètres.	Température en degrés centésimaux.		Valeur de $\Delta' - \varepsilon'$ en millimètres.	Température en degrés centésimaux.
	mm — 0,05964	+ 9°.3		mm — 0,072734	+ 9°.5
	— 0,05992	+ 8 .7		— 0,066200	+10 .4
				— 0,069160	+ 8 .5
Valeur moyenne de $\Delta - \varepsilon$	— 0,05978	+ 9°.0	Valeur moyenne de $\Delta' - \varepsilon'$	— 0,069365	+ 9°.5

Maintenant, pour ramener ces résultats à la température de la glace fondante, il faut se rappeler que Δ est $D[1+Pt]$, comme Δ' est $D'[1+Pt']$, et que, pareillement, ε est $E(1+Ft)$ comme ε' est $E'(1+Ft')$; on aura donc, en mettant ici pour t et t', les valeurs précédentes:

$$D(1+9^\circ.P)=E(1+9^\circ.F)-0^{mm},05978;$$

$$D'(1+9^\circ.5P)=E'(1+9^\circ.5F)-0^{mm},069565,$$

On a en outre, par les expériences de Borda;

$$P=0,0000085 65 \qquad F=0,0000114;$$

valeurs que nous avons toujours trouvées conformes aux dilatations relatives du fer et du platine, quand nous avons comparé nos règles avec l'étalon métrique à diverses températures. De là on tire

$$D=E+\frac{9^\circ.(F-P)E-0^{mm},05978}{1+9P},$$

$$D'=E'+\frac{9^\circ.5(F-P).E'-0^{mm},069365}{1+9,5P},$$

et puisque nous avons trouvé plus haut

$$E = 36^{mm},55228, \quad E' = 35^{mm},56208,$$

il vient, en effectuant les calculs,

$$D = 36^{mm},55228 - 0^{mm},058849 = 36^{mm},493431,$$
$$D' = 35^{mm},56208 - 0^{mm},068405 = 35^{mm},493675.$$

L'excès de la boule de Borda sur la boule d'Écosse est donc ici de $0^{mm},999756$. J'avais trouvé à Unst $1^{mm},002375$, avec l'appareil de contact de M. Arago : ainsi, le résultat était à très-peu près le même. Mais la valeur absolue que j'avais adoptée d'après Borda, pour le diamètre de sa boule, était $36^{mm},518525$, par conséquent trop forte de $0^{mm},025094$; et je n'avais pas pu découvrir cette petite erreur avec l'appareil à contact de M. Arago, parce que, pour amener les deux plans de contact en coïncidence complète, ce qui déterminait le zéro de l'échelle, il fallait presser ces plans l'un contre l'autre beaucoup plus fortement que l'on n'osait presser les boules, ce qui faisait paraître les diamètres absolus trop grands.

Les petites réductions trouvées ici pour les rayons de nos deux boules deviennent *additives* dans les longueurs calculées du pendule, et elles s'y ajoutent avec leur valeur entière. Au contraire elles deviennent soustractives dans le terme $\frac{2R^2}{5L}$ qui était additif à ces longueurs.

En outre, si le pendule observé a été décimal, comme cela a eu lieu dans nos expériences à Paris, Dunkerque, Clermont, Bordeaux, Figeac, et que l'on veuille traduire ce pendule en sexagésimal, ce qui exige qu'on le multiplie par $\left(\frac{1000}{864}\right)^2$ ou $1 + \frac{1}{3} + 0,00625857$, il faudra agrandir les deux corrections précédentes dans le même rapport.

Ces petits changements, loin de porter atteinte aux résultats généraux énoncés dans notre Mémoire ne font au contraire que les confirmer davantage en leur donnant une plus grande régularité. Ainsi le tableau des variations progressives de la pesanteur depuis Formentera jusqu'à Unst rapporté page 18, acquiert par là une continuité complète qu'il n'avait point avec les premières évaluations que nous avions d'abord employées. Le seul changement qu'il puisse être utile de fixer spécialement est celui du pendule moyen, sur le 45e parallèle d'Europe qui devient ainsi $993^{mm},534239$ au lieu de $993^{mm},520351$ que nous avions trouvé d'abord.

E c V H M

V

t,
5.
onc ici de
de contact
ne. Mais la
netre de sa
5094; et je
contact de
en coinci-
lait presser
'on n'osait
op grands.
eux boules
et elles s'y
t soustrac-

a eu lieu
x, Figeac,
xige qu'on
grandir les

s généraux
firmer da-
ableau des
squ'à Unst
u'il n'avait
employées.
est celui du
=,534239

RAPPORT

SUR

UN MÉMOIRE DE M. JACOBSON.

MM. DUMÉRIL ET DE BLAINVILLE, COMMISSAIRES.

L'Académie, dans sa séance du 12 mars 1827, a chargé M. Duméril et moi de lui faire un rapport sur un mémoire de M. Jacobson, intitulé *Observations sur le développement prétendu des œufs des moulettes ou unios et des anodontes dans leurs branchies.*

L'idée principale et singulière que l'auteur du mémoire soutient, le nom et la juste réputation d'observateur exact et consciencieux qu'il s'est acquise depuis long-temps, l'amitié même qui lie l'un de vos commissaires avec lui, demandaient un examen plus approfondi de son travail; et ç'a en effet été pour le rendre plus digne à la fois de l'Académie, à laquelle nous avons l'honneur de le faire, et de M. Jacobson, qui veut bien y attacher quelque prix, que nous l'avons un peu retardé, parce que nous désirions avoir le temps de faire des recherches et des expériences contradictoires.

Quoiqu'elles ne nous aient pas encore présenté les résultats positifs que nous eussions désirés, nous les croyons cependant à peu près suffisantes pour éclaircir la question. Au reste, pour mieux faire sentir la difficulté de la résoudre complétement, qu'il nous soit permis de l'apprécier par une histoire rapide de l'état auquel elle est arrivée.

La génération dans les bivalves, c'est-à-dire dans cette grande classe d'animaux à laquelle appartiennent les huîtres, les moules, et tant d'autres genres que la conchyliologie y a introduits dans ces derniers temps, a été depuis long-temps le sujet des doutes des philosophes. Les anciens, pour couper court, supposent qu'ils naissent du limon dans lequel un assez grand nombre d'espèces habitent constamment. C'est, en effet, l'opinion d'Aristote, qui dit positivement, dans son Histoire des animaux (liv. 5, chap. 15), que tous les testacés naissent spontanément dans le limon, différent suivant leur nature, vaseux pour les huîtres, arénacé pour les conques; opinion qu'Oppien a traduite dans ces vers :

Quæ non concumbunt, nec fœtus nexibus edunt,
Per se nascuntur fœdo, velut ostrea cœno
Est non distincto, semper levis ostræa sexus
Hos inter pisces, nec mas, nec fæmina nota est.

Mais cette opinion, ne reposant que sur des observations incomplètes, fut aisément abandonnée, lorsque Redi combattit, par des arguments irrécusables, la génération spontanée de beaucoup d'animaux du type des insectes. Ce ne fut cependant que par analogie que l'on put conclure de ceux-ci aux bivalves; car ce célèbre philosophe ne fit aucune expérience pour s'assurer du mode de reproduction de ces ani-

maux. Toutefois, elle fut assez bien établie pour que Sténon, dans son prodrome *de solido in solidum* (p. 55), dît que l'expérience apprend que les huîtres et les autres testacés naissent d'œufs et non de la putréfaction.

Dès avant cette époque, on voit commencer l'opinion que les conques pouvaient bien avoir des sexes. En effet, on trouve rapporté dans Élien, qu'il y a dans la mer Rouge des conques qui se joignent l'une à l'autre d'une manière tellement intime que leurs dents s'unissent parfaitement : ce que Fulgence dans sa mythologie adopta, lorsqu'il dit que les conques marines se mêlent ensemble par tout leur corps dans le coït.

Gassendi, qui renouvela un certain nombre des idées admises par les anciens, modifia aussi un peu leur manière de voir au sujet de la génération des bivalves. Il établit, en effet, que les testacés et les zoophytes renaissent dans les lieux où d'autres avaient vécu, parce que quelques particules primitives d'humus sont en elles, ou parce que, dans les cendres du cadavre putréfié, il est une certaine disposition, quoique occulte, à la nouvelle et perpétuelle génération d'individus semblables.

Bonanni, dans son ouvrage intitulé : *Amusements de l'esprit et des yeux*, discuta la question dans un article *ex professo*, et renouvela tout simplement l'hypothèse d'Aristote. C'est alors que, dans le but de faire voir combien elle est dépourvue de vérité et de vraisemblance, Leuwenhoek entreprit les premières recherches positives qui aient été faites sur la génération des bivalves.

La première espèce qu'il observa fut la moule comestible, si commune sur les côtes de la Belgique qu'il habitait. C'est ce qu'on peut voir dans sa lettre quatre-vingt-troisième, écrite

en 1694. Il y annonce d'une manière positive que les œufs dont il a pu suivre le développement sont placés par la mère en dehors de sa coquille et probablement aussi sur les corps environnants, au moyen de l'appendice lingui-forme et canaliculé, dont le ventre est pourvu, ou bien à l'aide de l'extrémité même de l'oviducte ; car il est possible de reconnaître cet organe dans le tube transparent qu'il décrit comme sortant de chaque côté du milieu de l'abdomen.

Dans sa lettre quatre-vingt-douzième, il fait des observations analogues sur les huîtres, et dit qu'au mois d'août il les trouva remplies d'une quantité innombrable de jeunes huîtres en tout semblables à leur mère, pour la plupart logées entre les branchies, quelques-unes même paraissant adhérentes, ce qui est plus que douteux ; et un assez grand nombre libres dans la coquille elle-même.

Il remarqua également dans l'eau qui remplissait ces huîtres, une grande quantité d'animalcules microscopiques.

Dans la quatre-vingt-quatorzième lettre, il revient sur le même sujet, et émet pour la première fois le soupçon qu'il pourrait bien y avoir une humeur spermatique mâle dans tout ce genre d'animaux.

Mais c'est surtout dans la lettre suivante écrite en 1695 que Leuwenhoek, toujours dans le même but de démontrer l'absurdité de l'opinion d'Aristote et de Bonanni, fit porter ses observations sur les bivalves du genre de ceux qui font le sujet du mémoire de M. Jacobson, et qui, long-temps connus sous les noms vulgaires de moules d'étang, de moules des peintres, sont maintenant désignées sous les noms d'anodontes et d'unios. Ce fut dans le mois de septembre qu'il trouva une quantité énorme d'œufs ; et il paraît même que, sur le

premier individu qu'il examina, il remarqua que la liqueur sortie probablement par la section du ventre contenait une quantité immense d'animalcules extrêmement petits, nageant dans un fluide, et dont la forme et les mouvements lui donnèrent l'idée d'animalcules spermatiques, et que par conséquent cet individu pouvait être un mâle. Dans l'eau qui contenait ces coquillages, il aperçut aussi un grand nombre d'animaux microscopiques : sur cinq ou six individus qu'il regarda comme mâles, il ne vit cependant que dans trois des animalcules vivants; les autres n'en contenaient pas, ce qui lui fit supposer que le fluide séminal dans les autres n'était pas encore parvenu à sa maturité. Ces animalcules spermatiques lui parurent un peu plus longs que larges, et pourvus d'une queue six fois plus longue que le corps. Il fut en outre porté à croire qu'ils étaient pourvus d'autres organes qui leur permettaient d'adhérer fortement les uns aux autres, et qu'ils pouvaient être composés de globules, parce qu'en mourant ils se décomposaient en molécules arrondies.

Le 28 août, il ouvrit un nouvel individu femelle, sur lequel les œufs n'étaient avancés justement que jusqu'au point de paraître composés de globules arrondis, contenant une liqueur aqueuse, limpide, parmi lesquels nageaient plusieurs animalcules qu'il regarda comme spermatiques.

Aux kalendes de septembre, plusieurs individus portaient des œufs assez parfaits pour qu'on pût y distinguer la coquille, au point, dit-il, que, grossie au microscope, elle semblait appartenir à des animaux déja nés depuis quelque temps. Leuwenhoek remarqua cependant qu'elle était aussi grosse sur les petits individus que sur les grands, qu'il suppose avec raison sans doute plus vieux.

Il fit l'observation que, lorsque les œufs ne sont pas encore mûrs, ils sont contenus dans l'ovaire situé dans les parties charnues de l'abdomen, et que, lorsqu'ils le sont devenus, ils se logent dans les branchies qui deviennent alors extrêmement épaisses. Il lui parut qu'alors tous les individus prêts à déposer leurs œufs se placent dans les endroits où l'eau est peu profonde et où le soleil donne directement.

Examinant au microscope les œufs les plus avancés, il vit le petit animal se tourner dans l'œuf, d'où il conclut qu'il y est libre et sans aucune adhérence.

Enfin, sur un autre individu, ayant de nouveau examiné les œufs contenus dans les branchies, et il indique parfaitement bien les externes, il vit que les petits étaient parvenus à un degré de perfection tel, que non-seulement ils étaient beaucoup plus gros, mais qu'ils ouvraient ou fermaient leurs coquilles, et qu'au microscope, ils ressemblaient tout-à-fait à des adultes vus à l'œil nu, avec cette différence qu'ils étaient enveloppés dans une membrane.

La lettre quatre-vingt-seizième des *Arcana naturæ* roule encore tout entière sur le même sujet. Leuwenhoek essaya de voir le développement de ces petites coquilles sorties artificiellement des branchies. Il en mit un certain nombre dans de l'eau, et les y conserva pendant plusieurs jours, mais sans apercevoir aucun indice d'accroissement. Il vit, au contraire, paraître une quantité innombrable d'animaux microscopiques, et entre autres des vibrions véritables, qu'il suppose avoir mangé les petites anodontes. En effet, après dix jours de conservation, il ne restait plus que les petites coquilles bien transparentes, et les animaux microscopiques, dont les mouvements s'étaient graduellement ralentis,

avaient aussi peu à peu diminué de nombre, à mesure que les bivalves avaient disparu, en sorte que l'observateur hollandais suppose qu'ils sont morts de faim.

Dans la cent troisième lettre, il revient sur les particules rondes qu'il avait trouvées dans les huîtres, et qu'on aurait pu regarder, dit-il, comme des œufs, tandis que c'était des animalcules spermatiques qu'il a vus se réunir, se séparer en nageant; en sorte qu'il admet que les huîtres, comme les anodontes, sont partagées en individus mâles et en individus femelles.

Ainsi, comme il est aisé de le voir par l'extrait que je viens de donner des lettres de Leuwenhoek, il avait parfaitement vu sur une grande espèce d'anodonte qui me paraît être *l'anodonta intermedia* de M. de Lamarck, qu'un certain nombre d'individus ont de chaque côté et dans la masse abdominale, des ovaires dans lesquels se développent les œufs jusqu'à un certain degré; que bientôt après ces œufs se trouvent dans les branchies, et même, quoiqu'il ne le dise pas d'une manière explicite, dans les branchies externes, qu'ils y acquièrent un développement qu'ils n'avaient pas lorsqu'ils y étaient entrés, et s'accroissent au point que vus à un fort grossissement, la coquille ressemble tout-à-fait à celle de la mère, observée à l'œil nu. Il n'a pas pu en suivre le développement plus loin.

Dans d'autres individus de la même espèce, pris dans les mêmes circonstances, et examinés à la même époque, chez lesquels il n'avait pu découvrir d'œufs, ni dans l'ovaire, ni dans les branchies, il a observé des animalcules spermatiques qu'il décrit comme ayant le corps un peu plus long que large, avec une queue très-fine et six fois plus longue que

lui, et même comme ayant d'autres organes au moyen desquels ils peuvent adhérer fortement les uns aux autres.

Nous avons également montré que Leuwenhoek avait étendu ses observations aux moules proprement dites, aux huîtres, et même peut-être à quelques vénus ou bucardes qui vivent sur les plages de la Hollande.

Ainsi cet auteur, célèbre par l'hypothèse des animalcules spermatiques dans l'explication de la génération, avait depuis long-temps distingué des sexes dans les mollusques bivalves.

Cette opinion était sans doute parvenue jusqu'à Lister, puisque, quoique dans son ouvrage sur les coquillages de l'Angleterre il emprunte encore à son compatriote Willis la description anatomique de l'huître, il admet des huîtres mâles et des huîtres femelles. Il dit, en effet, qu'on reconnaît une maladie particulière dont les huîtres sont atteintes au mois de mai, à la présence d'une certaine matière dans les branchies, noire dans les mâles et blanche dans les femelles. C'est probablement là-dessus qu'est établie l'opinion généralement admise en France, que les mâles dans les huîtres se reconnaissent à la couleur noire des bords de leur manteau.

En 1706, un des membres de l'ancienne Académie des Sciences, Poupart, publia des observations sur la génération de la moule des étangs, grande espèce d'anodonte peu différente de celle de Leuwenhoek, et sans connaître, à ce qu'il paraît, l'ouvrage de l'auteur hollandais. Il semble qu'il n'a jamais trouvé d'œufs, mais, pendant l'été, beaucoup de glaire et d'une matière laiteuse susceptible de se coaguler dans l'eau. D'après cela, quoiqu'il pense que ces animaux peuvent

être androgynes, il croit cependant qu'ils ne sèment pas leur laitance dans l'eau, mais qu'un individu l'insinue dans l'autre au temps de la propagation.

Méry, autre membre de l'Académie des Sciences, peu de temps après, en 1710, donna une anatomie plus complète de l'anodonte des cygnes, toujours sous le nom de moule des étangs. C'est dans ce Mémoire qu'il proposa de regarder comme appartenant à l'appareil de la génération les doubles lames vasculaires situées de chaque côté du corps entre lui et le manteau. La paire interne fut pour lui des vésicules séminales, et l'externe des ovaires. Quoique cet anatomiste ait examiné ces organes d'une manière très-incomplète, et même en grande partie erronée, il vit très-bien, sans qu'il le dise cependant formellement, que la paire externe est la seule dans laquelle on trouve des œufs; et c'est sans doute d'après cette observation qu'il en fit des ovaires, et admit que c'est là que naissent les œufs. Quant à la paire interne, il n'en fit que des vésicules de dépôt d'un fluide sécrété par un petit corps blanc, qui, suivant lui, en parcourt toutes les lames. Dans cette manière de voir, les anodontes, et par conséquent les bivalves en général, furent regardées comme androgynes, c'est-à-dire comme possédant à la fois l'organe femelle et l'organe mâle de l'appareil de la génération; d'où il résultait que tous les individus étaient semblables, qu'il n'y avait pas besoin d'accouplement ou de rapprochement de deux individus, et qu'un seul représentait l'espèce.

Telle est l'opinion qui a dominé dans la science pendant toute la durée du dix-huitième siècle, chez les physiologistes, comme chez les anatomistes et les naturalistes, quoique Méry n'ait réellement pas connu les véritables ovaires.

Elle fut considérablement étayée, quoiqu'un peu modifiée, par Poli, dans son grand ouvrage sur les testacés des deux Siciles. En effet, il démontra le premier la position et la structure des ovaires sur les côtés de la masse abdominale; il en suivit les développements dans un assez grand nombre d'espèces différentes. Il ne paraît cependant pas avoir connu nettement la terminaison de l'oviducte, comme il sera possible de le voir par l'extrait suivant du chapitre huit consacré aux généralités sur la génération des bivalves.

Poli commence par assurer que tous les animaux qui habitent les coquilles bivalves sont hermaphrodites, et qu'en conséquence il n'y a chez eux aucun autre organe de génération que l'ovaire; en sorte que chez eux il faut en conclure, dit-il, que les œufs et l'humeur prolifique ou séminale propre à les féconder doivent être produits au même endroit; il passe ensuite à une description générale de l'ovaire.

« Cet organe, sans contredit de beaucoup le plus grand de tous ceux dont l'animal est composé, couvre de toutes parts le foie, les intestins, et en général toutes les parties contenues dans l'abdomen. Bien plus, à l'époque du frai, ses ramifications se glissent dans les interstices des faisceaux musculaires du pied, quand il y en a, en sorte qu'elles remplissent toute la cavité abdominale, qu'elles distendent de tous côtés. Il y a même certains genres dans lesquels cette cavité ne semble pas assez grande pour contenir l'ovaire ainsi distendu, et où il se répand dans la doublure du manteau. C'est alors, ajoute Poli, qu'on le voit recouvert d'une humeur séminale. Variable dans sa forme et sa coloration, suivant l'époque de la fécondation, l'ovaire semble d'abord être composé d'une série de tubes, ou de cylindres entremêlés d'une

manière très-compliquée, ou bien une masse informe qui se développe peu à peu à mesure que les ovaires prennent de l'accroissement. Elle pousse, pour ainsi dire, çà et là des ramifications très-multipliées, visibles à travers les parois de l'abdomen peu à peu distendues. Leur couleur, d'abord rose, devient dorée; et enfin quand les œufs sont arrivés à leur maturité, les lobules de l'ovaire, fortement adhérents entre eux par leur pression mutuelle, forment une masse comme gonflée par une humeur laiteuse qui en baigne toutes les parties. Mais, outre les vaisseaux des branchies, ceux des appendices labiaux et du manteau paraissent aussi considérablement gonflés; mais on les voit peu à peu diminuer à mesure que les œufs arrivent à leur maturité parfaite. Ceux-ci sont alors descendus dans les branchies, et ne sont plus entourés d'aucune humeur séminale.

« La structure de ces œufs est presque la même dans tous les genres : ils diffèrent cependant un peu de forme, étant quelquefois plus ou moins globuleux, ovales ou pédonculés.

« Ils sont enveloppés par une membrane mince, contenant une liqueur dans laquelle nage le fœtus. Celui-ci n'est d'abord qu'un point blanc informe et translucide, avec quelques autres particules opaques. Peu à peu sa forme se régularise; et enfin on aperçoit au microscope une petite coquille contenant son animal. »

Poli admet pour la sortie des œufs deux issues, la trachée et les branchies. « Il est en effet, dit-il, des espèces dans lesquelles des rameaux de l'ovaire s'introduisent dans les canaux particuliers des branchies, et alors les œufs en sortent pour être rejetés au dehors. Dans d'autres, les ramifications de l'ovaire sortent de côté et d'autre de l'abdomen, et parvien-

nent dans chaque loge de la branchie adjacente. Les œufs sont alors nourris dans ces loges, jusqu'à ce qu'étant arrivés à leur maturité, ils en sont chassés par la contraction de leurs parois.

« Quoique la plupart des acéphales soient ovipares, il y en a quelques-uns qui sont ovovivipares, c'est-à-dire dont les œufs éclosent dans la mère elle-même, et en sortent bien vivants.

« Le fœtus sorti de l'œuf est enduit d'une mucosité, qui sert à l'attacher aux corps submergés. »

Nous avons rapporté avec quelque étendue ce que Poli dit de la génération des bivalves, d'abord parce que de tous les naturalistes qui se sont occupés de ce sujet, aucun ne l'a fait avec autant de détails et n'était plus convenablement placé pour cela; et ensuite parce que c'est sa manière de voir qui a été admise presque généralement jusque dans ces derniers temps. Il ne semble cependant pas que cet auteur ait bien connu la terminaison des ovaires, la marche que suivent les œufs pour passer dans les branchies, et quelques autres circonstances importantes. Aussi M. Cuvier, dans ses Leçons d'anatomie comparée, adoptant l'opinion de Poli, termine ce qu'il dit d'après cet auteur de la génération des bivalves, par le doute que les œufs, éclos dans les deux lames qui composent chaque feuillet branchial, en sortent en rompant le tissu du bord des branchies; ce qui n'était guère supposable et ce qui n'est certainement pas.

L'hermaphrodisme suffisant chez les acéphales allait donc être généralement admis; et cependant, dès 1797, M. Rathke, actuellement professeur d'histoire naturelle à Christiana en Norwège, en donnant une anatomie détaillée de l'anodonte,

dans laquelle, pour le dire en passant, il décrivait pour la première fois le système nerveux dans les bivalves, proposait une tout autre opinion sur les petites coquilles que Leuwenhoek, Méry, Poli et M. Cuvier avaient trouvées dans les branchies des anodontes, et qui ont servi de base à ce qui a été dit sur la génération de ces animaux. Il les regarda, en effet, comme des animaux parasites, au point qu'il en fit un genre distinct sous le nom de *Glochidium*, opinion pour le soutien de laquelle est dirigé le Mémoire adressé à l'Académie par M. Jacobson, et que nous analyserons dans un moment.

Cependant le travail de M. Rathke étant, à ce qu'il paraît, resté à peu près inconnu, du moins en France, tous les naturalistes professaient l'opinion de Poli, lorsque parut l'excellente dissertation de M. Bojanus, sur les organes de la respiration de l'anodonte en particulier, et des bivalves en général; dissertation dont le but principal était de déposséder les lames branchiales de leur fonction respiratrice, pour l'attribuer à un autre organe, qu'il nomme le poumon, avec Mery. Cette manière de voir, que M. Bojanus appuya sur une description complète du système circulatoire, le conduisit à voir, comme l'académicien français, des parties de l'appareil générateur dans les lames branchiales. Il connut et décrivit avec beaucoup d'exactitude les orifices des ovaires de chaque côté de la racine de la masse abdominale; et sans faire attention que, dans un assez grand nombre d'espèces, il paraît que les œufs n'entrent jamais dans les branchies, et que, même dans les anodontes et les unios, cela n'a lieu que dans la paire externe, il voulut que ce fussent des espèces de matrice.

Cette opinion, qui fut combattue par l'un de nous dans les observations qu'il ajouta à la traduction française du Mémoire de M. Bojanus dans le Journal de physique, ne touchait presque en rien à la question qui nous occupe en ce moment, et ne fut généralement pas adoptée, même en Allemagne; nous voyons, en effet, que M. Treviranus a confirmé, par des recherches nouvelles, la manière de voir de Méry, perfectionnée par Poli; toutefois, en admettant que les œufs sortent par la bouche, au contraire de M. Carus, qui, dans son Manuel de zootomie, veut que ce soit par l'anus.

C'est dans cet état de choses que M. Prevost, de Genève, ayant essayé de rétablir l'influence des animalcules spermatiques dans l'acte de la génération, fut conduit à pousser ses recherches dans les bivalves, et renouvela, presque dans les mêmes termes, la manière de voir de Leuwenhoek à ce sujet, probablement cependant sans le savoir; car il ne cite nullement l'observateur hollandais, le père des animalcules spermatiques. Il distingua parmi les unios et les anodontes des mâles et des femelles, les uns contenant, dans les côtés de l'abdomen, un fluide spermatique avec des animalcules vivants, dont il compare la forme à celle de petites soles, et les autres n'ayant dans le même endroit que des œufs. Il fit plus, ayant séparé des individus de chaque sexe, sans dire, malheureusement, comment il est parvenu à les distinguer, il obtint des œufs des femelles, et rien des mâles; et ce qui serait encore plus concluant, les œufs pondus par les individus femelles, mis à part sans contact avec les mâles, n'éprouvèrent aucun développement.

Aussitôt l'annonce de ce renouvellement de l'opinion de

Leuwenhoek, l'un de vos commissaires, M. de Blainville, s'empressa de faire une série de recherches, d'où il lui parut résulter qu'en effet, parmi des individus de la même espèce, ayant vécu dans les mêmes circonstances, pris à la même époque de l'année, il en est chez lesquels on trouve l'addomen considérablement gonflé et rempli d'une matière lactescente, comme séminale, dans laquelle cependant il n'est pas toujours possible d'apercevoir les animalcules spermatiques; d'autres où la substance blanche est contenue dans des lobules mieux formés de l'organe sécréteur, ce qui lui donne l'aspect plus oviforme; un plus grand nombre chez lesquels on voit beaucoup d'œufs, plus ou moins distincts, dans les cellules de l'ovaire et nageant dans un fluide aqueux, plus ou moins abondant, quelquefois sans aucun changement dans la paire de branchies externes, et d'autres fois avec une modification particulière de cette branchie; d'autres où l'abdomen n'est plus gonflé du tout, et dont les branchies externes sont considérablement épaissies par une accumulation énorme d'œufs, et enfin un très-petit nombre n'ayant rien dans l'abdomen ni dans les branchies.

En sorte que, sans oser encore prendre des conclusions positives, l'opinion de Poli lui sembla plus probable que celle de Leuwenhoek et de M. Prevost.

Ainsi, au moment où le Mémoire de M. Jacobson est arrivé à l'Académie, outre l'opinion d'Aristote, qui admet la génération spontanée, et qui n'est plus soutenue par personne, du moins pour les bivalves, il y en a eu quatre autres principales, alternativement adoptées ou rejetées :

1° Celle de Leuwenhoek, qui pense que, dans les bivalves, il y a des sexes séparés, ou des individus mâles et des indi-

vidus femelles, comme dans les animaux supérieurs, l'un produisant une humeur séminale avec des animalcules spermatiques, l'autre, des œufs déposés quelque temps dans les branchies ;

2° Celle de Méry, suivant laquelle ces animaux seraient androgynes, ou pourvus des deux sexes distincts sur le même individu, mais ne pouvant agir l'un sur l'autre, et seulement sur le sexe contraire d'un second individu, en sorte que, quoique tous fussent semblables, l'espèce serait nécessairement composée de deux individus. Dans cette manière de voir, la branchie externe serait l'ovaire même, et par conséquent les œufs qui s'y trouvent seraient bien ceux de l'animal ;

3° Celle de Poli, qui n'est presque qu'une rectification de la précédente, surtout pour la détermination des organes de la génération, et qui, admettant que les œufs et le fluide séminal sont produits par le même organe sécréteur, regarde les bivalves comme de véritables hermaphrodites, pouvant se suffire à eux-mêmes, et chez lesquels, par conséquent, un seul individu représente l'espèce.

Celle de M. de Blainville, suivant laquelle les deux organes sécréteurs seraient à la suite l'un de l'autre, quoique plus ou moins distincts, en sorte que les œufs produits dans l'ovaire seraient imprégnés en traversant le testicule, n'est qu'une légère modification de la manière de voir de Poli : aussi admet-elle comme celle-ci que les œufs sont souvent déposés pendant un temps plus ou moins long dans les branchies.

Dans la manière de voir de Poli, qui est la plus généralement soutenue, il y a divergence d'opinion pour la sortie des œufs, les uns n'ayant pas clairement abordé la question

comme MM. Poli et Cuvier, M. Carus voulant que ce soit par l'anus, M. Tréviranus par la bouche, et enfin MM. Oken, Bojanus, de Blainville, Prévost, admettant que c'est par des orifices particuliers situés de chaque côté de l'abdomen.

4° Enfin l'opinion de M. Rathke qui, sans préjuger la question du bisexualisme ou de l'hermaphrodisme, veut que les petites coquilles, qu'à une certaine époque on trouve dans les branchies des anodontes et des unios, soient des parasites, et non pas des petits de ces animaux.

C'est pour soutenir cette manière de voir que le Mémoire de M. Jacobson, fait à l'occasion de celui de M. Prévost de Genève, est rédigé, et par conséquent contre l'opinion généralement admise, que les œufs et les fœtus des acéphales se développent dans les branchies.

Les considérations que M. Jacobson, après avoir bien précisé la question, avoir fait l'histoire de ce point de la science, et rapporté les observations confirmatives de ce qui avait été vu avant lui à ce sujet, donne à l'appui de la manière de voir de son compatriote, sont les suivantes :

1° La forme et l'organisation des petites coquilles bivalves que l'on trouve dans les branchies des unios et des anodontes sont tout-à-fait différentes de celles de ces animaux.

2° Elles sont absolument de la même grosseur et de la même forme dans ces deux genres et dans des individus de grosseur et d'âge très-différents.

3° Elles ont toujours la même forme et la même grandeur quand elles sont arrivées à leur développement complet.

4° Leurs valves sont d'une consistance et d'une dureté qui ne sont nullement en rapport avec leur grandeur, si elles étaient des petits de l'anodonte et de l'unio.

5° Leur développement n'est en rapport ni avec une époque de l'année, ni avec un certain âge de l'animal sur lequel on les trouve; c'est-à-dire, qu'on rencontre en même temps, dans la même localité, des individus qui ont des œufs, tandis que d'autres portent de petites bivalves nouvellement écloses, ou bien de ces coquilles adultes.

6° L'énorme quantité qu'on en trouve à la fois sur le même individu n'est nullement en proportion avec le nombre des animaux dont on croit qu'elles sont les petits.

7° On ne conçoit pas que des organes aussi délicats et aussi importants que des branchies puissent servir comme d'espèces de matrice; et l'on ne trouve pas d'autre exemple dans la série des animaux, tandis que souvent ces organes sont le siége d'animaux parasites.

Analysons-les les unes après les autres.

Et d'abord quant à la forme, si différente de celle des animaux dans les branchies desquels elles se trouvent.

D'après ce que disent MM. Rathke et Jacobson, ces petites coquilles, au lieu d'être longitudinales, ovales, comme dans les anodontes, sont subtriquêtres avec une lame semi-lunaire à chaque angle, plus haute que large; le bord cardinal est droit, légèrement concave au milieu, et le plus court de tous; les deux autres, un peu inégaux en courbure, se réunissent inférieurement en formant un angle plus ou moins aigu. La disposition un peu excave du bord cardinal fait que l'articulation n'a lieu qu'à ses deux extrémités, l'intervalle étant sans doute rempli par le ligament. Mais ce qui rend cette coquille bien singulière, ce sont des parties que les observateurs danois nomment des crochets, et qui sont attachées à l'angle inférieur de chaque valve. Chacun d'eux, égalant en

longueur le tiers de la valve, suivant M. Jacobson, et plus de la moitié, suivant M. Rathke, est scalénoïde, légèrement courbé, terminé en pointe, et adhère à sa base par une sorte d'articulation qui permet ses mouvements sur la valve. A son bord convexe est une série de dents, un peu plus longues au milieu et translucides.

Outre ces crochets, on voit sortir du même angle inférieur de la coquille et de chaque côté un faisceau de filaments ou de cirrhes très-fins, déja aperçus par Koëlreuter et Mangili, qui en font une sorte de cordon ombilical, et que MM. Rathke et Jacobson disent être très-irritables et très-rétractiles. Ils admettent, du moins le premier, que chaque faisceau naît d'une petite cavité située de chaque côté de l'abdomen.

La structure de l'animal qui habite cette singulière coquille est encore assez remarquable. M. Rathke s'est assuré, malgré sa grande petitesse, qu'il est pourvu d'un manteau. Il croit même avoir aperçu l'ovaire. M. Jacobson a fait l'observation que ce n'est pas dans le milieu, dans la partie la plus concave des valves, que se trouve la masse principale de son corps, mais bien autour de cette partie médiane; ce qui n'est peut-être pas aussi extraordinaire que le pense M. Jacobson, puisqu'il n'admet qu'un seul muscle adducteur médian. On remarque vers le milieu du bord cardinal un espace translucide de forme carrée, et entourée d'une partie plus opaque. Pfeiffer dit y avoir observé des pulsations, 18 par minute, ce qui lui a fait admettre que c'était le cœur; opinion que combat M. Jacobson, à cause de l'étendue de l'espace pulsant : aussi est-il plus porté à croire avec M. Rathke que c'est l'estomac. Cependant il faut convenir que c'est bien la position du cœur dans les bivalves; peut-être est-il enveloppé par les branchies.

Ainsi ce petit acéphale, quoique réellement d'une forme très-différente de celle de l'anodonte, aurait cependant une organisation assez normale. Il paraît que ses valves sont susceptibles d'être écartées au point de se placer dans un même plan horizontal; alors les crochets sont relevés de chaque côté à angle droit, et peuvent être abaissés ou relevés au moyen de fibres distinctes qu'on voit partir de l'animal, et s'insérer aux bords concaves et latéraux de la racine du crochet.

En terminant la description du bivalve trouvé dans les branchies de l'anodonte, M. Jacobson fait la remarque importante qu'il doit y avoir identité d'espèce entre celui qu'il a vu et le sujet des observations de ses prédécesseurs, puisque la figure donnée par les quatre différentes personnes qui l'ont étudié a une très-grande ressemblance; en effet, le rapprochement qu'il a eu soin d'en faire rend la chose presque certaine.

Sans doute il y a d'assez grandes différences entre le petit bivalve que nous venons de décrire d'après les deux naturalistes danois, et l'anodonte dans les branchies de laquelle ils ont été trouvés; mais, sauf les deux singuliers crochets qui occupent le bord abdominal de la coquille, et dont nous ne pouvons pas même soupçonner l'analogue dans aucun animal de la même classe, le reste des différences bien analysées peuvent être regardées comme ne sortant pas des limites possibles. Que l'on compare, en effet, la jeune huître avec sa mère, et l'on sera étonné du peu de ressemblance qu'elles présentent. Quant aux crochets, ils ne me semblent pas avoir été décrits par d'autres personnes que par MM. Rathke et Jacobson.

Ce dernier en voit cependant des indices dans les figures données par Bojanus, Pfeiffer et M. Prevost; mais aucun de ces auteurs n'en parle ; M. Éverard Home, dans le Mémoire qu'il vient de publier à ce sujet tout dernièrement, n'en dit rien non plus; et M. Bauer, dessinateur et observateur si exact, n'a rien représenté de pareil dans les excellentes planches qui accompagnent le Mémoire de M. Home. Koëlreuter lui-même n'a rien dit de semblable, car il nous semble difficile d'admettre avec M. Jacobson que les filaments entremêlés qui servent, dit Koëlreuter, à faire adhérer entre elles toutes ces petites coquilles, extrêmement minces, pellucides, qui remplissent la branchie externe des anodontes, et qu'il regarde comme faisant l'office de cordon ombilical, puissent être l'analogue des crochets décrits et figurés par Rathke.

La seconde considération employée par M. Jacobson pour soutenir sa thèse, consiste en ce que ces bivalves sont absolument de la même forme et de la même grandeur dans les anodontes que dans les unios.

La même forme est-elle réellement bien étonnante, à l'état de fœtus, dans deux genres si rapprochés, que, pour la coquille parfaite, lorsqu'on ne peut pas voir la charnière, on est souvent embarrassé pour décider auquel elle appartient, et pour l'animal, que Poli les a réunis en un seul sous la dénomination commune de lymnoderme?

Quant à la même grandeur, la différence entre les adultes n'est pas toujours considérable, surtout entre certaines espèces; et M. Jacobson ne nous dit pas au juste quelles sont celles qu'il a observées. D'ailleurs est-il bien certain que les germes diffèrent entre eux autant que les animaux qui en sont le développement? Enfin quand les différences sont as-

sez peu considérables, et c'est ici le cas, même à l'état adulte, peut-on les apercevoir aisément au microscope et à des grossissements qu'on ne peut estimer que d'une manière approximative?

Elles ont toujours la même forme et la même grandeur quand elles sont parvenues à leur état complet de développement. Mais quelle preuve a-t-on que ce soit leur état complet de développement, quand on les examine, pour des êtres qui paraissent mourir constamment, ou ne continuer du moins que très-peu de temps à vivre après qu'on les a extraits du lieu où la nature voulait qu'ils se développassent? En dix jours de temps, toutes celles que Koëlreuter a essayé de conserver, sans doute avec toutes les précautions convenables, étaient mortes, soit hors, soit dans l'intérieur même des ovaires. Leuwenhoek a obtenu le même résultat. Et si l'on n'en a pas, y a-t-il rien d'étonnant que le jeune produit d'un animal soit toujours de même forme et de même grandeur, quand il est arrivé au même degré de développement?

Sans doute la quatrième considération employée par M. Jacobson, que la dureté et l'épaisseur des valves ne sont pas en rapport avec l'état de fœtus, serait une preuve que le petit animal est adulte, si l'on connaissait la dureté relative de la coquille aux différents âges des mollusques conchylifères; et l'on en est encore bien loin. D'ailleurs, comment s'est-on assuré du fait? Koëlreuter, en disant, en effet, que ces petites coquilles craquent sous la dent et sous les doigts comme des grains de sable, ajoute cependant qu'elles sont si minces et si transparentes, qu'on peut les voir les unes à travers les autres.

D'après ce que disent MM. Rathke et Jacobson, le dévelop-

pement des prétendus parasites n'est pas en rapport avec une époque déterminée de l'année, ni avec un certain âge de l'animal sur lequel on les trouve ; mais cela est-il absolument hors de doute? en ont-ils observé dans des unios et des anodontes évidemment jeunes (je ne parle pas de grosseur relative un peu inférieure ou supérieure), et qui auraient tous les caractères de ce que les conchyliologistes désignent sous le nom de jeunes coquilles? ils ne le disent pas. Au contraire, n'avons-nous pas vu plus haut que Leuwenhoek annonce positivement que les œufs dans l'ovaire sont tous différents de ce qu'ils seront à la fin du développement qu'ils doivent acquérir dans les branchies, où, ce sont ses expressions, la similitude avec l'état adulte est complète? Koëlreuter a dit cependant comme M. Jacobson, et noté le fait comme très-singulier, que la forme des embryons est tout-à-fait différente de celle des adultes.

Quant à l'époque de l'année, ne peut-il pas y avoir deux portées dans son cours? Et d'ailleurs ne sait-on pas que l'ensemble des circonstances extérieures exerce une grande influence sur le retard ou l'avancement du développement des produits de la génération, surtout dans les animaux inférieurs? On voit d'ailleurs, d'après les observations de l'un de nous, et celle de Koëlreuter, que c'est réellement vers le mois de novembre que les petites coquilles, prétendues parasites des anodontes et des unios, ont acquis tout le développement qu'elles doivent avoir dans les branchies de leur mère.

Quant à l'objection tirée par M. Jacobson de l'énorme quantité de ces prétendus œufs proportionnellement avec ce qu'on trouve d'anodontes et d'unios, elle est, il faut l'avouer,

plutôt en faveur de l'opinion à laquelle il l'oppose. En effet, ne sait-on pas quelle énorme quantité d'œufs donne une seule femelle de brochet ou de carpe parmi les poissons, ou de crabe ou d'écrevisse parmi les crustacés, proportionnellement à ce qui existe de ces animaux dans un espace limité? Et n'a-t-on pas admis avec raison comme résultat de l'expérience, que, dans la continuité des espèces, la nature a proportionné le nombre des germes aux chances de destructions auxquelles elles sont exposées avant de pouvoir se reproduire? Ne peut-on pas d'ailleurs rapporter ici l'observation de Leuwenhoek, qui a vu que, dans ce grand nombre d'œufs ou de germes, il y en a déja une quantité innombrable qui ne se développeront pas, et qui avortent soit dans les ovaires eux-mêmes, soit dans les branchies?

Quant à la dernière objection de M. Jacobson, que des organes aussi délicats que des branchies ne peuvent guère servir de matrice, tandis que souvent c'est le siége d'animaux parasites, en quoi coûte-t-il plus à l'organe de nourrir des parasites naturels, que des parasites accidentels?

Nous venons de passer en revue les principales observations qui appuient la manière de voir de M. Jacobson; et nous avons rapporté, chemin faisant, les objections qu'on peut leur opposer: voyons maintenant celles qui peuvent être appliquées plus directement.

1° Comment des animaux parasites en nombre aussi immense iraient-ils constamment se placer dans le même lobe branchial externe, à droite et à gauche, quoique l'organisation de la paire de branchies interne soit absolument la même? Circonstance qui est tellement fixe, que Méry avait eu l'idée de borner aux lobes branchiaux externes le nom d'o-

vaires. Y seraient-ils déposés par leur mère? Cela est probable, car on ne peut guère supposer qu'ils iraient eux-mêmes.

2° Il est certain, et M. Jacobson est obligé d'en convenir lui-même, quoiqu'il sentît fort bien la force de cette objection, qu'à une certaine époque de la ponte des unios et des anodontes, on trouve dans l'ovaire un peu dégonflé des œufs tout-à-fait semblables à ceux qui se trouvent dans les branchies externes. On peut les voir sortir par l'orifice de l'oviducte, suivre la rainure de la racine de la branchie interne, remonter tout le long du bord dorsal de l'externe pour s'enfoncer dans son redoublement, comme s'en sont assurés M. Rathke lui-même et l'un de nous. Faut-il croire que ces animaux parasites seraient nés dans l'ovaire ou y auraient été déposés d'une manière quelconque pour en sortir par une voie toute naturelle, l'orifice de l'oviducte? Cela paraîtra extrêmement peu probable, quoique M. Jacobson paraisse porté à penser que ce ne sont pas les véritables œufs de l'anodonte ou de l'unio.

3° Pourquoi, avant que l'ovaire se vide de ses œufs par la contraction évidente des muscles de l'abdomen, la paire de branchies externes, sans doute par une sorte d'harmonie préétablie, se gonfle-t-elle par la production d'une espèce de matière gélatineuse, qui les épaissit d'une manière fort sensible? Ne serait-ce pas pour servir au développement ultérieur des œufs quand ils y seront arrivés, plutôt que pour la nourriture d'animaux parasites?

4° Comment se fait-il que l'on ne trouve pas plus souvent les anodontes et les unios dans un véritable état de marasme ou de maladie, les branchies externes dilacérées ou en

partie détruites, après le développement de la quantité véritablement énorme des petites coquilles supposées parasites, qui s'y est fait? M. Jacobson est obligé lui-même de convenir qu'il s'est assuré que des anodontes ont résisté à l'action de ces nombreux ennemis, et ont passé d'une année à l'autre; puisqu'au printemps il a trouvé une quantité de leurs petites coquilles vides dans le canal commun des branchies, et quelquefois formant par leur agglomération une masse plus ou moins noirâtre. M. de Blainville n'a jamais trouvé d'individus sur lesquels les branchies indiquassent la moindre trace de destruction : il paraît cependant que cela a lieu assez souvent, d'après M. Jacobson.

Comment se fait-il qu'on n'ait point rencontré ces glochidium dans aucun autre bivalve que dans les différentes espèces d'anodontes et d'unios, et jamais, à ce qu'il nous semble du moins, dans les cyclades, qui se trouvent souvent avec elles? La différence d'organisation de ces deux genres n'est cependant pas assez grande, pour qu'on puisse admettre un parasitisme aussi spécial, et qu'un parasite qui vit sur l'un ne puisse pas vivre sur l'autre.

Ces différentes observations, que nous soumettons avec confiance au savant auteur du Mémoire que nous venons d'analyser, n'étaient-elles pas suffisantes pour ne pas regarder comme complètement démontrée l'opinion de M. Rathke et la sienne, sur le parasitisme des petits bivalves qu'on trouve en grande abondance dans les branchies des Lymnodermes? Il devenait donc nécessaire de faire des recherches et des expériences nouvelles, établies contradictoirement.

L'un de vos commissaires, dans ce but, a été se placer, à la fin du printemps dernier, sur les bords de la Seine, chez

un de ses amis, M. de Roissy, qui porte un intérêt tout particulier à l'étude d'un groupe d'animaux dont il s'est occupé avec succès, et qui par conséquent a pu l'aider de toutes manières. Voici ce qu'ils ont vu sur des unios ou moulettes de deux espèces, l'U. *pictorum* et l'U. *batava*, et sur un petit nombre d'anodontes des canards pris aux mêmes endroits sur le bord du rivage, à une assez petite distance, dans des lieux où le peu de profondeur de l'eau pouvait faire supposer que le soleil devait avoir une action favorable sur les animaux, et peut-être sur leurs œufs.

Quelques individus, ouverts immédiatement après leur arrivée, ont montré un très-petit nombre d'œufs contenus dans la branchie externe et un bien plus grand dans les ovaires, où ces œufs ont offert tous les caractères qui les constituent tels; ils étaient, du reste, tout semblables à ceux observés, dans les deux années précédentes, par M. de Blainville.

Toutes les autres moulettes ou anodontes furent placées dans un grand vase, contenant de l'eau claire et limpide très-fraîche. Au bout de peu de temps, ces animaux entr'ouvrirent leurs coquilles, comme ils le font habituellement dans leur position ordinaire, et en firent sortir les cirrhes tentaculaires qui bordent l'entrée postérieure de la cavité palléale, ainsi qu'une partie du pied.

Le lendemain nous trouvâmes au fond du vase un paquet de corps globuleux, qu'il nous fut aisé de reconnaître pour des œufs, même à la vue simple, mais encore bien plus aisément au microscope. Il s'agissait de savoir quel était l'individu qui l'avait pondu, et comment cela avait eu lieu. Pour cela toutes les moulettes furent mises à part dans des vases particuliers, pleins d'une suffisante quantité d'eau claire; au bout de peu de temps, nous eûmes le plaisir d'apercevoir

que plusieurs individus en avaient pondu, mais si rapidement, que nous n'avions pu apercevoir comment cette ponte s'était opérée. Avant de porter exclusivement notre attention sur ce point, nous reconnûmes d'abord que les masses d'œufs étaient très-inégales en grosseur, très-différentes de forme, et en contenaient un nombre assez variable. Nous vîmes aussi que ces œufs étaient disposés par séries assez régulières, et que ceux qui constituaient une masse étaient d'un jaune-clair presque blanc, tandis que ceux d'une autre étaient teints en jaune-orangé. Nous vîmes bientôt que la couleur des œufs était constamment en rapport avec celle de la masse abdominale de l'individu qui les avait pondus, et que, du reste, ils n'offraient aucune autre différence. Quant à la manière dont ils étaient rejetés par la moulette, nous finîmes par voir, au bout de quelques quarts d'heure d'une observation attentive, que leur sortie, qui pouvait avoir lieu quelquefois entre le pied et les bords du manteau, se faisait réellement habituellement par un des orifices postérieurs de la cavité branchiale, sans pouvoir dire au juste lequel, quoiqu'il soit probable que c'était par l'orifice anal, et que cette sortie se faisait par une sorte d'éjaculation, qui chassait la masse d'œufs souvent à une distance de quatre ou cinq pouces. Nous vîmes aussi que chaque individu rejetait ainsi ses œufs en un grand nombre de petites masses, qui étaient rangées en demi-cercle à quelques pouces de son extrémité postérieure.

Presque toutes les moulettes que nous avions recueillies nous donnèrent ainsi une plus ou moins grande quantité d'œufs, et il n'y en eut qu'un petit nombre qui ne pondirent point; celles-ci ne nous parurent cependant offrir aucune

différence appréciable, quelque attention que nous ayons apportée dans notre comparaison.

Quant aux œufs, quoique placés dans des vases contenant de l'eau fréquemment renouvelée, il paraît qu'ils n'éprouvèrent aucun changement indiquant un véritable développement. Peut-être, car je n'ai pas assisté à cette partie de l'expérience, eût-il fallu au contraire ne renouveler l'eau qui les contenait, que peu souvent, et en augmenter considérablement la masse, que l'on aurait exposée aux rayons solaires; c'est ce que je me propose de faire au printemps de l'année prochaine. Quel qu'en soit le résultat, nous n'en avons pas moins observé dans les moulettes, au printemps, qu'elles contiennent, dans les ovaires et dans les branchies, des œufs de même forme et de même apparence, et qu'elles peuvent très-bien s'en débarrasser, probablement quelque temps après qu'ils ont séjourné dans ces dernières.

Mais si nous n'avons pu arriver encore à observer leur développement, MM. Everard Home et Bauer ont été plus heureux, comme ils nous l'apprennent dans un Mémoire publié dernièrement dans les Transactions philosophiques pour 1827. Voici l'extrait de ce qu'ils ont vu. Les œufs, quand ils sont encore attachés par leur pédicule à la membrane de l'ovaire, ne peuvent être distingués des granulations qui constituent le parenchyme du foie que par la couleur. Avant le 10 août, ils sont complètement formés dans les ovaires, et vers le 20 du même mois, ils passent dans l'oviducte, dont la structure, curieusement treillisée, est située entre les deux membranes qui constituent les branchies. Vers le 12 septembre, ils y étaient tous arrivés.

L'imprégnation se fait évidemment avant ce changement

de situation, l'œuf ayant été formé en une vésicule, à travers les parois de laquelle, bientôt après qu'il y a été retenu, l'embryon est vu distinctement enveloppé par un fluide, ouvrant et fermant sa coquille commençante, pour la respiration, et probablement pour la nutrition du fœtus, dans ce degré d'accroissement.

Les jeunes moulettes restent dans l'oviducte, dont l'intérieur a la plus grande ressemblance avec un gâteau d'abeilles, jusqu'à ce qu'elles soient arrivées à la taille où elles peuvent se suffire à elles-mêmes, et alors elles le quittent.

Lorsqu'elles sont prêtes à quitter leur espèce de prison cellulaire, il se forme un canal par lequel elles sortent; et comme le pied de la mère est entouré en partie par une portion de l'oviducte, lorsque celui-là, dans la progression, est étendu, cette partie est ainsi sortie au dehors de la coquille, en sorte que les jeunes animaux ont la plus grande aisance pour se mettre en liberté; ce qui a lieu dans les mois d'octobre et de novembre. A la fin de ce dernier, toutes les petites moulettes sont sorties, et l'on trouve déja dans l'ovaire de jeunes œufs préparés pour l'année prochaine.

Voilà de nouveaux détails qui, quoique ne cadrant pas tout-à-fait avec ce qui était connu déja, semblent cependant confirmer que les jeunes coquilles que l'on trouve en si grande abondance dans les branchies des anodontes en sont évidemment les petits, et non des animaux parasites. M. Everard Home n'a pas même eu l'idée qu'il pourrait en être autrement. Il ne prononce pas même le nom de parasites. Peut-être, il est vrai, l'auteur anglais ne savait-il pas qu'il y eût le moindre doute à ce sujet. Il ne paraît pas non plus qu'il ait songé à l'opinion de Leuwenhoek sur le bisexualisme des bi-

valves. En effet, il admet complètement la manière de voir de Poli ; mais un fait que M. Bauer a observé peut, jusqu'à un certain point, expliquer l'illusion de certaines personnes qui ont vu des animalcules vivants sur certains individus de moules d'étang. Il a, en effet, aperçu un grand nombre de très-petits animaux, qui d'abord tout-à-fait sphériques et semblables à de simples granulations, prennent peu à peu de l'accroissement, s'alongent et se changent en des vers cylindriques infiniment plus gros. Ces animalcules paraissent être des ennemis acharnés des jeunes anodontes. On ne les distingue d'abord d'une substance granuleuse ordinaire que par un mouvement giratoire curieux, qui se continue jusqu'à ce que le petit animal ait atteint tout son développement, qui va quelquefois jusqu'à la longueur d'un centième de pouce. Il est aisé de reconnaître dans ces petits animaux ceux dont a déja parlé Leuwenhoek, comme détruisant la plus grande partie des jeunes anodontes qu'il a essayé de faire développer. Peut-être, comme il a été dit plus haut, ces animalcules, à leur premier état, sont-ils les animalcules spermatiques observés par M. Prevost et quelquefois par M. de Blainville. Quoi qu'il en soit, il est aisé de voir que les nouvelles expériences de MM. de Roissy et de Blainville, non plus que les nouvelles recherches de MM. Everard Home et Bauer, ne peuvent complètement renverser l'hypothèse de MM. Rathke et Jacobson : il aurait fallu faire de nouveau des observations pendant les mois de novembre et de décembre. Malheureusement l'un de vos commissaires qui se l'était proposé en a été bien cruellement empêché.

Nous sommes cependant obligés de convenir en terminant ce rapport, évidemment bien long, quoique encore in-

complet, que, dans l'état actuel des choses à ce sujet, cette hypothèse nous paraît avoir peu de probabilité. Toutefois, qu'il nous soit encore permis, à cause de la haute estime que nous professons pour son auteur, de rester dans le doute, jusqu'à ce que de nouvelles recherches, faites maintenant en connaissance de cause, aient complètement éclairci le sujet extrêmement intéressant de la génération des mollusques bivalves. En conséquence, nous conclurons à ce que M. Jacobson soit remercié, au nom de l'Académie, de la communication de son travail, et invité à lui faire part des résultats auxquels il pourra parvenir par la suite; car nous ne doutons pas qu'il ne continue des recherches dont le commencement a déja mérité d'inspirer autant d'intérêt.

Nous demandons aussi à l'Académie que la question de la génération des bivalves, maintenant si controversée, et qu'il est sans doute possible de résoudre, soit rappelée en temps opportun à la commission chargée de proposer les prix de physique pour l'année prochaine.

J. D. de BLAINVILLE, *rapporteur.*

L'Académie approuve les conclusions de ce rapport,

Signé : Le baron CUVIER, *secrétaire-perpétuel.*

Depuis la lecture de mon rapport à l'Académie, j'ai trouvé dans un auteur hollandais du milieu du dernier siècle, Job Baster, une observation, sur la génération des moules, qui

est à l'appui de l'opinion de Leuwenhoek, déja proposée, à ce qu'il paraît, par Willis et Lister, sur le bisexualisme des bivalves. Qu'il me soit permis d'en donner ici un extrait, et d'y joindre le titre des ouvrages des auteurs cités dans le cours de ce rapport.

Au mois de janvier 1756, dans le but positif de résoudre la question des sexes, du mode de génération et de l'accouplement des moules, Baster mit dans un vase, plein d'eau de mer renouvelée chaque jour, quatre ou cinq moules comestibles [*mytilus edulis*, L.].

A la suite d'observations fréquemment répétées, et dans lesquelles il ne put apercevoir aucun indice de copulation, il vit, le 12 avril, sur le soir, autour d'une des moules, une sorte de nuage blanc, produisant l'effet d'une goutte de lait qui se répandrait dans une masse d'eau.

Le lendemain la même moule fut mise dans de nouvelle eau, et, au bout de deux ou trois heures d'une observation assidue, Baster aperçut distinctement le même nuage blanc sortant de l'orifice postérieur du manteau donnant issue aux excréments, et qui se répandit également dans tout le vase.

Le même phénomène eut lieu le lendemain, mais l'eau fut beaucoup moins blanchie.

Quelques gouttes des deux premières eaux, examinées au microscope, firent voir à Baster une quantité innombrable d'animalcules en mouvement, dont il ne put assurer la forme, mais qui lui parurent avoir celle de petites aiguilles oblongues.

Cette observation le conduisit à se demander si cet individu n'était pas un mâle, et, par conséquent, si la liqueur qu'il

avait rendue n'était pas une humeur spermatique analogue à celle vue par Leuwenhoek dans les anodontes.

Il se trouva naturellement confirmé dans cette opinion par l'observation qu'il fit, le 16 du mois suivant, d'une autre moule qui, mise dans les mêmes circonstances, rejeta, par la même ouverture que la première, à deux ou trois pouces de distance, de petits cylindres oblongs, assez semblables à des crottes de souris, et cela pendant près de deux heures consécutives, à de courts intervalles, de manière à former un petit amas. Six heures après, ils étaient partagés en petites plaques qui, le lendemain, se séparèrent au moindre mouvement. Examinées au microscope, Baster reconnut qu'elles étaient formées de véritables petites moules.

En sorte que l'observateur hollandais termine son chapitre en disant que si l'on regarde la liqueur de la première moule comme une liqueur séminale, on pourrait admettre que son action, produisant un certain stimulus sur la femelle, servirait ainsi à féconder les œufs, et qu'alors il serait permis de concevoir quelque chose à la génération des moules.

Je dirai aussi, dans cette note additionnelle, que M. Jacobson m'a écrit avoir observé que, dans la cyclade cornée, les petites cyclades, après être sorties de l'ovaire, se placent en dedans de la branchie interne, mais non pas dans le centre des lames. A ce sujet, je ferai observer que, dans les huîtres, les peignes, les cardiums, les moules, les vénus, les myes et les pholades, seuls genres dont j'aie pu examiner jusqu'ici les ovaires et les œufs, j'ai toujours trouvé ces derniers entre les branchies, entre les lobes ou même dans les parois du manteau, mais jamais dans la duplicature même des branchies.

J'ajouterai encore, d'après M. Raspail, que M. de Baer de Kœnisberg [*Froriep noticed*, janv. 1826] adopte l'opinion

de M. Prevost sur la distinction des sexes dans les anodontes, et que dans le prodrome d'un travail plus étendu [Bulletin univ. des Sciences, 2e sect., sept. 1826, n° 103], il dit avoir observé outre les animalcules spermatiques, un grand nombre d'animaux beaucoup plus gros et de forme différente, qu'il regarde comme des entozoaires, dont il fait même un genre sous le nom d'*aspido-gaster,* qu'il classe dans la famille des gastéropodes.

Enfin je dois terminer par dire que, dans un Mémoire sur l'Histoire naturelle de l'alcyonelle des étangs, lu à l'Académie des Sciences le 24 septembre 1827, et dont je n'ai pas parlé dans mon rapport, parce que n'en ayant pas entendu la lecture, et ne l'ayant lu moi-même que tout dernièrement dans le but d'en faire, comme commissaire, le rapport à l'Académie, je ne pouvais guère supposer qu'il y était question de plusieurs points intéressants pour le sujet qui nous occupe, M. Raspail annonce s'être assuré que les animalcules spermatiques, observés par M. Prevost de Genève dans les unios et les anodontes, ne sont que des lambeaux ou petits corps tournant et vibrant à la manière des morceaux de leurs branchies observés au microscope. Les vers dont parle M. Éverard Home, les êtres dont M. de Baer a fait son genre aspidogastre, et le *Leucophra ciliata* de Muller, sont aussi la même chose, en sorte que M. Raspail semble reconnaître que les mollusques bivalves sont hermaphrodites. Il admet cependant la manière de voir de Méry et de M. Bojanus sur les usages des lames branchiales. En effet, regardant que les appendices labiaux sont les véritables branchies, il fait de celles-ci des appendices de l'appareil de la génération, et comme constituant ensemble une sorte de matrice dont l'ou-

verture excrémentitielle serait le vagin vers l'extrémité duquel s'ouvriraient les organes excrémentitiels, comme l'organe urinaire dans les animaux supérieurs. La preuve principale qu'il en donne, c'est qu'en injectant de la cire par l'orifice excrémentitiel du manteau, il a rempli les locules des lames branchiales, sans aller plus loin.

D'après cela, il doute beaucoup de l'existence des orifices des ovaires, comme MM. Bojanus, de Blainville, Prevost, etc., les ont vus ; et comme il n'a pu les apercevoir, il craint fort que ces orifices ne soient que deux plis qu'il a observés très-souvent au-dessous du point d'insertion des appendices labiaux.

Il ajoute qu'il a trouvé des œufs, non-seulement dans la paire externe de lames branchiales, mais encore dans l'interne et même dans les lobes du manteau.

Aristote. Histoire des animaux, liv. V, chap. xv, tome 1, p. 273, de la traduction française de Camus. Paris, 1783, 2 vol. in-4°.

Oppien. *Halieuticon sive de piscatione, lib.* v, *interprete Laurentio Lippio Collensi. Argentorati*, 1534, page 25.

— *Edente* Joh. Gostlob Schneider. *Argentorati,* 1776, lib. I, vers 762 et suivans, que Schneider a traduits beaucoup plus clairement que Lippi, en ces termes :

Ostreae neque coitu neque parente procreantur, ac nimirùm omnia ex cœno nascuntur. Illorum enim neque femina, neque mas distinctus est, sed ejusdem naturæ sunt, atque adeò inter se similia ut non marem à femina internoscere possis.

Elien. *De naturâ animalium.* Lib. XVII, *edente* J. Gottlob Schneider. *Lipsiæ,* 1784, in-8°.

Lib. X, cap. xx, p. 573 du texte grec, et p. 133 de la traduction latine.

En lisant ce chapitre d'Élien, sur des bivalves de la mer Rouge, il est évident qu'il y est question de l'articulation des valves de la coquille et non d'accouplement, comme je l'ai dit dans le cours du rapport d'après Bonanni.

FULGENCE FULGENTIUS PLANCIADES [*Fabius*]. *Mythologiæ libri* V. Amsterdam, 1681, 2 vol. in-8°.

STENON [Nicolas]. *De solido intra solidum naturaliter contento prodromus.* Florent., 1669, in-4°. *Lugduni Batavorum*, 1679, in-12, traduit presque en totalité dans la collection académique, partie étrangère, tome IV, page 277.

REDI [François]. *Esperienze intorno alla generazione degli insetti, in una lettera all'Illustrissimo signor Carlo Dati. Napoli*, 1687.

GASSENDI [Pierre]. *Physica, sect.* 3, *De varietate animalium.*

Dans ses œuvres complètes, 6 vol. in-fol. Lyon, 1658.

LISTER [Martin]. *Historiæ animalium Angliæ tres tractatus, unus de araneis, alter de cochleis, tum terrestribus, tum fluviatilibus, tertius de cochleis marinis. Londini*, 1678, chap. II, tit. XXVI, p. 179.

BONANNI [P.-Philippe]. *Recreatio mentis et oculi in observatione animalium testaceorum*, chap. IV, p. 22, et chap. V et VI de l'édition latine. *Romæ*, 1684.

LEEUWENHOEK [Antoine]. *Arcana naturæ detecta. Lugduni Batavorum*, 1722, tome II, Epist. 83, p. 417, et tome III, Epist. 95 et 96, p. 15.

Poupart [François]. Remarques sur les coquillages à deux coquilles, et premièrement sur les moules [anodontes]. Acad. des Sc. de Paris, 1706.

Mery [Jean]. Remarques faites sur la moule des étangs [anodontes]. Acad. des Sc. de Paris, 1701.

Baster [Job]. *Opuscula subseciva observationes miscellaneas de animalculis et plantis quibusdam marinis eorumque ovariis et seminibus continentia.* 2 volumes in-4°. *Harlemi,* 1759-1765.

De mytilis, tome 1, lib. III, p. 101.

Koelreuter [I-T.]. *Observationes anatomicæ physiologicæ chytili* sans doute pour *mytili) cygnei,* L, *ovaria concernentes. Nov. acta Petrop.*, tome vi, p. 236. Pétrop., 1790.

Ces observations, quoique publiées en 1790, avaient été lues à l'Académie, le 4 novembre 1779, et faites en 1774.

Poli. [Jos. Xavier]. *Testacea utriusque Siciliæ, eorumque historia et anatome*, 2 vol. in-fol. Paris, 1791-1795.

Tome 1, chap. viii, p. 67.

Mangili [G.] *Nuove ricerche zootomiche sopra alcune specie di conchiglie bivalvi;* broch. in-8°, avec une planche. Milan, 1804, traduite dans les Archives de physiologie de Reil, t. xi, p. 218.

Cet ouvrage, dont je n'avais parlé dans mon rapport que d'après M. Jacobson, m'est aujourd'hui connu en original, graces à la complaisance de M. le comte Bofondi, qui, après beaucoup de recherches, est parvenu à m'en procurer un exemplaire, dont un de ses amis a bien voulu se priver en ma faveur. J'ai pu m'assurer alors que Mangili a vu, comme

Koëlreuter, que, dans les anodontes, les œufs sont déposés dans la paire de branchies externe, et que la coquille des petits qu'ils contiennent, et dont il donne une figure, diffère beaucoup de celle des animaux adultes; mais il ne parle nullement des singuliers crochets observés par Rathke et M. Jacobson, quoiqu'il fasse mention des filaments déja indiqués par Koëlreuter.

Cuvier [Georges]. Leçons d'anatomie comparée recueillies par M. G. L. Duvernoy, tome v, p. 183. Paris, 1805.

Bojanus [Ludwig Henrich]. *Uber die athem und Kreislauf-werkzunge der zweischaaligen Muscheln insbesondere des Anodon cygneum;* c'est-à-dire, sur les organes de la respiration et de la circulation dans les bivalves, et particulièrement dans l'anodonte des cygnes, dans une lettre adressée à M. G. Cuvier, insérée dans l'Isis *Heft.* I 1819, et traduite dans le Journal de physique, tome LXXXIX, p. 108.

Treviranus [G.-R.]. *Uber die zeugung der mollusken*, c'est-à-dire, sur la génération des mollusques, dans le Recueil pour la physiologie, par MM. Treviranus et Tiedeman, vol. 1, cah. 1, page 31.

Oken. *Lehrbuch der naturgeschichte.* 3 theil. Zoologie. Leipzig, 1815, p. 204.

Carus. *Lehrbuch der Zootomie*, p. 618.

Pfeiffer [Carl.]. *Naturgeschichte deutscher land und sussiwasser muscheln*, p. 10.

Cette citation est tirée du mémoire de M. Jacobson; car ce n'est pas sous ce titre que m'est connu l'ouvrage de Pfeiffer, mais bien sous celui-ci: *Systematische anordunng und Bes-*

chreibung deutscher land und wasser Schnecken. Cassel et Berlin, 1821. Il faut donc croire que c'est un autre ouvrage, car ce n'est pas à la page 10 que cet auteur donne quelques détails sur les œufs d'unios, mais bien à la page 115, à l'article de l'U. *pictorum.*

Je dois même ajouter que cet auteur donne la figure des masses d'œufs de l'U. *littoralis,* absolument comme nous les avons vues, M. de Roissy et moi, pour l'U. *batava.*

Prevost. Mémoire sur la génération de la moule des peintres. Bulletin par la Soc. philomatique, 1826; et Annales des sciences nat., tom. 7, p. 449, et Mém. de la Soc. de phys. d'hist. nat. de Genève, tom. 3, 1825.

De Blainville [Henry]. Articles Moule, Peigne et Mollusques du Dictionnaire des Sciences naturelles.

—Manuel de malacologie et de conchyliologie. Paris, 1825.

— Bulletin par la Société philomatique. 1826.

Home [Everard]. Recherches sur la manière dont se fait la propagation dans l'huître commune et dans les coquilles bivalves d'eau douce.

Transactions philos. de Londres, 1827, part. 1, p. 39, avec quatre planches dessinées par M. Bauer.

MÉMOIRE

SUR

DIVERS POINTS D'ANALYSE,

PAR M. A. L. CAUCHY.

Lu à l'Académie Royale des Sciences, le 3 septembre 1827.

On peut, à l'aide d'une formule donnée par Lagrange et de plusieurs autres formules du même genre, développer en séries les racines des équations, ou les fonctions de ces racines. C'est ainsi que, dans l'astronomie, on développe le rayon vecteur de l'orbite d'une planète et l'anomalie vraie en séries ordonnées suivant les puissances ascendantes de l'excentricité. Mais, comme les séries de ce genre ne peuvent être utiles que dans le cas où elles sont convergentes, il importait beaucoup de fixer les conditions de leur convergence. On n'y était parvenu jusqu'à présent que dans quelques cas particuliers, par exemple, dans le cas où il s'agit de développer le rayon vecteur ou l'anomalie vraie d'une orbite planétaire. Ce cas est celui que M. Laplace a traité par une analyse fort délicate dans deux Mémoires, dont l'un a été inséré dans la Connaissance des temps de 1828, et dont l'autre vient d'être publié tout nouvellement. Il a supposé, pour plus de simplicité, que l'anomalie moyenne était réduite à un angle droit,

et alors il a trouvé que la valeur de l'excentricité, pour laquelle chaque série cessait d'être convergente, dépendait de la résolution d'une équation transcendante dans laquelle entrait le nombre e. Frappé d'un résultat si digne de remarque, je me suis demandé s'il ne serait pas possible de fixer généralement les conditions de convergence de la série de Lagrange, et des formules du même genre que j'avais obtenues à l'aide du calcul des résidus. Mes recherches sur cet objet m'ont conduit à reconnaître que ces conditions peuvent toujours être déduites de la résolution d'une équation transcendante qui renferme, comme cas particulier, l'équation trouvée par M. Laplace. Mais, pour arriver à ce dernier résultat, j'ai été obligé de recourir à une méthode très-différente de celle qui a été employée, dans la théorie du mouvement elliptique, par l'illustre géomètre que je viens de citer. Pour donner une idée de cette méthode, il est nécessaire d'entrer ici dans quelques détails.

Je considère d'abord une intégrale définie dans laquelle la fonction sous le signe $\int$ est imaginaire et composée de deux facteurs, dont le premier est une puissance fort élevée et du degré n, par exemple, u^n, u désignant une fonction réelle ou imaginaire de la variable x par rapport à laquelle on intègre. Le second facteur v peut être pareillement une fonction réelle ou imaginaire. Cela posé, je prouve que, dans le cas où le plus grand des modules de u correspond à une valeur X de x, qui fait évanouir la dérivée $\frac{du}{dx}$, l'intégrale proposée est le produit de la valeur de $u^n v$ correspondante à $x = \mathrm{X}$, par la racine carrée du quotient qu'on obtient en divisant la circonférence décrite avec le rayon 1, par le nom-

bre n et par une quantité très-peu différente de la dérivée du second ordre de $l\left(\frac{1}{u}\right)$ (*). Lorsque l'intégrale renferme une certaine constante r, et a néanmoins une valeur indépendante de r, on peut disposer de cette constante de manière que le plus grand module de u réponde à une valeur nulle de $\frac{du}{dx}$, et par conséquent de manière à obtenir la valeur très-approchée de l'intégrale que l'on considère. Pour y parvenir, il suffit de chercher les valeurs de r et de x qui vérifient simultanément les deux équations réelles comprises dans l'équation imaginaire

$$\frac{du}{dx}=0.$$

Parmi ces valeurs se trouvera nécessairement la valeur demandée de la constante r. Donc cette valeur sera une racine de l'équation transcendante que fournira l'élimination de x entre les équations réelles dont je viens de parler.

Je recherche ensuite les valeurs approchées des différentielles dont l'ordre est très-considérable, quand la fonction sous le signe $\int$ renferme des fonctions élevées à de très-hautes puissances. J'y parviens en transformant ces différentielles en intégrales définies qui renferment une constante arbitraire dont leurs valeurs sont indépendantes. La détermination approximative des différentielles dont il s'agit dépend encore de la résolution d'une équation transcendante qui fixe la valeur de la constante arbitraire.

(*) Dans le cas particulier où les fonctions u, v se réduisent à des quantités réelles, le résultat que nous indiquons ici s'accorde avec une formule donnée par M. Laplace.

En partant de ce principe, on détermine aisément les conditions de convergence de la série de Lagrange et des autres séries du même genre, et l'on établit, par exemple, relativement à la série de Lagrange, une règle de convergence que je vais indiquer.

Z étant une fonction quelconque de la variable z, on peut attribuer à cette variable une infinité de valeurs imaginaires qui aient le même module r, et parmi ces valeurs il y en aura une pour laquelle le module de la fonction Z deviendra un *maximum maximorum*. Soit R le module *maximum maximorum* de Z, correspondant au module r de la variable z. R variera avec r, et l'on pourra choisir r de manière que R soit une valeur de Z correspondante à une valeur de r qui vérifie l'équation $\frac{dZ}{dz}=0$. Dans ce cas, R deviendra ce que nous nommerons le *module principal* de la fonction Z. Cela posé, concevons que, par la formule de Lagrange, on développe en série la racine z de l'équation

$$z=t+f(z),$$

ou une fonction quelconque de cette racine. On prouvera, par les principes ci-dessus établis, que la série obtenue sera convergente ou divergente suivant que le module principal de la fonction

$$\frac{f(z)}{z}$$

sera inférieur ou supérieur à l'unité.

Au Mémoire dont je viens de donner un extrait, j'en ai joint un second, dans lequel je détermine le reste de la série de Lagrange, en l'exprimant par une intégrale définie.

MÉMOIRE

SUR

DIVERS POINTS D'ANALYSE.

§ 1er. *Détermination approximative de l'intégrale*

(1) $$S=\int_{x_0}^{x_1} u^n v\,dx,$$

u *et* v *désignant deux fonctions réelles ou imaginaires de la variable* x, *et* n *un nombre très-considérable.*

Soit X une valeur particulière de x; U, V, U′, V′, U″, V″,... les valeurs correspondantes de $u, v, u', v', u'', v'', \ldots$ et cherchons la partie de l'intégrale S comprise entre les limites très-voisines

(2) $$x=X-\frac{a}{\sqrt{n}},\quad x=X+\frac{a}{\sqrt{n}}.$$

On aura, entre ces limites,

(3) $$u=U+\frac{U'}{1}(x-X)+\frac{U''}{1.2}(x-X)^2+\text{etc.},$$

puis, en posant

(4) $$x=X+\frac{t}{\sqrt{n}},$$

on trouvera

$$(5)\qquad u = \mathrm{U} + \frac{\mathrm{U}'}{1}\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\mathrm{U}''}{1.2}\frac{t^2}{n} + \text{etc.};$$

$$(6)\qquad \mathrm{l}(u) = \mathrm{l}(\mathrm{U}) + \mathrm{l}\left(1 + \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}}\frac{t^2}{n} + \ldots\right)$$
$$= \mathrm{l}(\mathrm{U}) + \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}\frac{t^2}{n} + \text{etc.}$$

On aura donc à très-peu près, lorsque n sera très-grand,

$$(7)\qquad u = \mathrm{U}e^{\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}\frac{t}{\sqrt{n}} - \frac{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}\frac{t^2}{n}},$$

et par suite

$$(8)\qquad u^n = \mathrm{U}^n e^{\frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}}t\sqrt{n} - \frac{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}t^2},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(9)\qquad u^n = \mathrm{U}^n e^{\frac{n}{2}\frac{\mathrm{U}'^2}{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}} e^{-\frac{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}\left(t - \frac{\mathrm{U}\mathrm{U}'}{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}\sqrt{n}\right)^2}.$$

On en conclura, à très-peu près,

$$(10)\qquad \int_{\mathrm{X} - \frac{a}{\sqrt{n}}}^{\mathrm{X} + \frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\,dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-a}^{+a} \mathrm{U}^n e^{\frac{n}{2}\frac{\mathrm{U}'^2}{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}} e^{-\frac{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}{2\mathrm{U}^2}(t - c)^2}\,\mathrm{V}dt,$$

c désignant pour abréger la constante $\frac{\mathrm{U}\mathrm{U}'}{\mathrm{U}'^2 - \mathrm{U}\mathrm{U}''}\sqrt{n}$.

Si, pour plus de commodité, on posait

$$(11)\qquad u = e^{w}, \quad \text{et } \mathrm{U} = e^{\mathrm{W}} \quad \text{ou } \mathrm{W} = \mathrm{l}(\mathrm{U}),$$

on trouverait sensiblement

$$(12)\qquad \frac{\mathrm{U}'}{\mathrm{U}} = \mathrm{W}', \quad \frac{-\mathrm{U}'^2 + \mathrm{U}\mathrm{U}''}{\mathrm{U}^2} = \mathrm{W}'',$$

$$(13)\qquad u = e^{W + W'\frac{t}{\sqrt{n}} + W''\frac{t^2}{2n}\cdots}$$

$$(14)\qquad u^n = e^{nW + W't\sqrt{n} + \frac{W''}{2}t^2\cdots} = e^{n\left(W - \frac{W'^2}{2W''}\right)} e^{\frac{W''}{2}\left(t + \frac{W'}{W''}\sqrt{n}\right)^2}$$

$$(15)\qquad \int_{X-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{X+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\, dx = \frac{e^{n\left(W - \frac{W'^2}{2W''}\right)}}{\sqrt{n}} \int_{-a}^{a} e^{\frac{W''}{2}\left(t + \frac{W'}{W''}\sqrt{n}\right)^2} V\, dt.$$

L'équation (15) suppose que $\frac{a}{\sqrt{n}}$ est très-petit, ce qui peut avoir lieu, même lorsque a prend une valeur considérable, par exemple, lorsqu'on fait $a = \sqrt[3]{n}$, $a = \sqrt[4]{n}$, etc... Alors on a sensiblement, pourvu que la partie réelle de W'' soit négative

$$(16)\qquad \int_{-a}^{a} e^{\frac{W''}{2}t^2} V\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(-\frac{W''}{2}\right)t^2} V\, dt = V\sqrt{\left(\frac{2\pi}{-W''}\right)}.$$

Par suite, si, la partie réelle de W'' étant négative, la condition

$$(17)\qquad W' = 0$$

se trouve remplie, l'équation (15) donnera sensiblement

$$(18)\qquad \int_{X-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{X+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\, dx = \frac{V e^{nW}}{\sqrt{n}} \sqrt{\left(\frac{2\pi}{-W''}\right)}.$$

Si W' n'était pas nul, il ne serait pas possible de remplacer l'intégrale

$$\int_{-a}^{a} e^{\frac{W''}{2}\left(t + \frac{W'}{W''}\sqrt{n}\right)^2} dt$$

par

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{W''}{2}\left(t+\frac{W'}{W''}\sqrt{n}\right)^2} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{W''}{2}t^2} dt.$$

Car on aurait évidemment

$$(19) \quad \int_{-a}^{a} e^{\frac{W''}{2}\left(t+\frac{W'}{W''}\sqrt{n}\right)^2} dt = \int_{-a-\frac{W'}{W''}\sqrt{n}}^{a-\frac{W'}{W''}\sqrt{n}} e^{\frac{W''}{2}t^2} dt,$$

et, a étant très-petit par rapport à $\sqrt{n}$, les limites de l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (19) seraient des infinis de même signe. Donc cette intégrale serait sensiblement nulle si la partie réelle de W″ était négative. Au contraire, si la partie réelle de W″ était positive, l'intégrale comprise dans le second membre de la formule (19) deviendrait infinie.

Soient maintenant

$$(20) \qquad w = p + q\sqrt{-1},$$

et P, P′, P″, Q, Q′, Q″ ce que deviennent p, p', p'', q, q', q'' quand on pose $x = X$. On aura

$$(21) \qquad u = e^{w} = e^{p}(\cos.q + \sqrt{-1}\sin.q).$$

Donc e^{p} sera le module de u. De plus on trouvera

$$(22) \qquad \begin{cases} W = P + Q\sqrt{-1}, \quad W' = P' + Q'\sqrt{-1}, \\ W'' = P'' + Q''\sqrt{-1}. \end{cases}$$

Donc, si W′ est nul, on aura

$$(23) \qquad P' = 0, \quad Q' = 0,$$

et, si la partie réelle de W'' est négative, on aura

$$(24) \qquad P'' < 0.$$

Cela posé, soit

$$(25) \qquad P'' = -B^2, \quad \theta = \text{arc.tang.}\frac{Q''}{P''},$$

B étant une quantité positive, l'équation (18) donnera

$$(26) \int_{X-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{X+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\, dx = \frac{V e^{n(P+Q\sqrt{-1})}}{B\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2\pi}{1+\text{tang.}\theta\sqrt{-1}}}$$

$$= \frac{V e^{n(P+Q\sqrt{-1})}}{B\sqrt{n}} (\cos.\theta)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} \left(\cos.\frac{\theta}{2} - \sqrt{-1}\sin.\frac{\theta}{2}\right),$$

ou, ce qui revient au même,

$$(27) \quad \int_{X-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{X+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\, dx = \frac{V}{B} \frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} (\cos.\theta)^{\frac{1}{2}} e^{\left(nQ-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}}.$$

Il est essentiel d'observer qu'en vertu des conditions (23) et (24), P sera nécessairement un *maximum* de p, et $e^{P} = U$ un *maximum* de $e^p = u$.

Lorsque P est non-seulement un *maximum* de p, mais encore la plus grande des valeurs de p, correspondantes à des valeurs de x comprises entre les limites $x = x_0$, $x = x_1$, c'est-à-dire, en d'autres termes, lorsque P est le *maximum maximorum* de p, alors il est facile de reconnaître que l'on a

$$(28)\qquad S=\int_{x_0}^{x_1} u^n v\,dx=(1\pm\varepsilon)\int_{X-\frac{a}{\sqrt{n}}}^{X+\frac{a}{\sqrt{n}}} u^n v\,dx,$$

ε désignant un nombre très-petit et qui s'évanouisse avec $\frac{1}{n}$. Donc, par suite, on trouvera

$$(29)\qquad S=(1\pm\varepsilon)\frac{V}{B}\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(\cos.\theta)^{\frac{1}{2}}\,e^{\left(nQ-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}}.$$

Si l'on fait, pour plus de commodité,

$$(30)\qquad V=A(\cos.\Theta+\sqrt{-1}\sin.\Theta),$$

on aura

$$(31)\qquad S=(1\pm\varepsilon)\frac{A}{B}\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(\cos.\theta)^{\frac{1}{2}}\,e^{\left(nQ+\Theta-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}}.$$

Si l'intégrale S a une valeur réelle, on aura nécessairement

$nQ+\Theta-\frac{\theta}{2}=0$,

$$(32)\qquad S=(1\pm\varepsilon)\frac{A}{B}\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(\cos.\theta)^{\frac{1}{2}}.$$

On doit toutefois excepter le cas où deux valeurs de x correspondraient au *maximum maximorum* de p. Admettons cette dernière hypothèse, et supposons que, dans le passage de la première valeur de x à la seconde, A, B, P ne varient pas, et que Q, Θ, θ changent seulement de signe. L'intégrale S sera évidemment déterminée par une équation de la forme

$$(33)\qquad S=(1\pm\varepsilon_1)\frac{A}{B}\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(\cos.\theta)^{\frac{1}{2}}\,e^{\left(nQ+\Theta-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}}$$
$$+(1\pm\varepsilon_2)\frac{A}{B}\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(\cos.\theta)^{\frac{1}{2}}\,e^{-\left(nQ+\Theta-\frac{\theta}{2}\right)\sqrt{-1}},$$

que l'on pourra réduire à la forme

$$(34) \qquad S = (1 \pm \varepsilon)\frac{2A}{B}\frac{e^{nP}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(\cos.\theta)^{\frac{1}{2}}\cos.\left(nQ + \Theta - \frac{\theta}{2}\right).$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$(35) \qquad e^{P} = R,$$

R sera le module *maximum maximorum* de la fonction u, et les formules (32), (34) donneront

$$(36) \qquad S = (1 \pm \varepsilon)\frac{A}{B}\frac{R^n\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(\cos.\theta)^{\frac{1}{2}},$$

$$(37) \qquad S = (1 \pm \varepsilon)\frac{2A}{B}\frac{R^n\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}(\cos.\theta)^{\frac{1}{2}}\cos.\left(nQ + \Theta - \frac{\theta}{2}\right).$$

Il est bon d'observer que la série, dans laquelle S représenterait le terme général correspondant à l'indice n, sera convergente quand on aura $R < 1$, et divergente quand on aura $R > 1$.

Ajoutons que, si l'intégrale S renferme une constante arbitraire r, on pourra disposer de cette constante de manière que la valeur $x = X$, correspondante au module *maximum maximorum* de la fonction u, vérifie non-seulement la première des formules (23), mais encore la seconde, c'est-à-dire l'équation de condition

$$(38) \qquad q' = 0.$$

---

§ II. *Sur la détermination approximative de la quantité*

$$(1) \qquad S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots m}\frac{d^m\{\varphi(t)[\varpi(t)]^n\}}{dt^m},$$

m *et* n *étant de très-grands nombres.*

On aura évidemment, quelle que soit la constante r,

$$(2)\quad S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r^{-m}\, e^{-ms\sqrt{-1}}\,\varphi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)\left[\varpi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)\right]^n ds,$$

puis, en posant $m = n\mu$,

$$(3)\quad S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)\left\{\frac{\varpi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)^{\mu}}\right\}^n ds.$$

Cette valeur de S_n coïncidera avec l'intégrale (1) du premier paragraphe, si l'on pose $x = s$,

$$(4)\quad u = \frac{\varpi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)}{r^{\mu} e^{s\mu\sqrt{-1}}},\quad v = \frac{1}{2\pi}\varphi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right),$$

$$(5)\quad w = \mathrm{l}\left[\varpi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)\right] - \mu\,\mathrm{l}(r) - s\mu\sqrt{-1},$$

$$(6)\quad \frac{dw}{ds} = w' = p' + q'\sqrt{-1} = \left\{\frac{re^{s\sqrt{-1}}\varpi'\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\varpi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)} - \mu\right\}\sqrt{-1};$$

et la série qui aura pour terme général S_n sera convergente, si le module *maximum maximorum* de la fonction

$$(7)\quad u = \frac{\varpi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)^{\mu}}$$

est plus petit que l'unité, quand la constante r est choisie de manière que la valeur de s correspondante à ce module vérifie l'équation imaginaire $w' = 0$, ou

$$(8)\quad \frac{re^{s\sqrt{-1}}\varpi'\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\varpi\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)} = \mu.$$

Soit R ce module, et posons pour plus de commodité

$$(9) \qquad \psi(x) = \frac{\varpi(t+x)}{x^r}.$$

Pour obtenir la quantité R, il suffira de chercher les valeurs réelles ou imaginaires de x qui rendent nulle la fonction dérivée $\psi'(x)$, c'est-à-dire les racines de l'équation

$$(10) \qquad \psi'(x) = 0.$$

Soit $x = \rho e^{s\sqrt{-1}}$ une de ces racines. Le module correspondant de $\psi(x)$, savoir,

$$(11) \qquad \psi\left(\rho e^{s\sqrt{-1}}\right),$$

sera précisément la quantité R, si ce module est la valeur *maximum maximorum* de la fonction $\psi\left(\rho e^{s\sqrt{-1}}\right)$. Or il y aura en général une racine de l'équation (10) qui vérifiera la condition précédente. Car, pour chaque valeur particulière de la constante r, la fonction

$$\psi\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)$$

aura un module *maximum maximorum*, correspondant à une valeur de s qui vérifiera l'équation

$$p' = 0;$$

et, si l'on attribue successivement à r une infinité de valeurs distinctes, la quantité q' recevra une infinité de valeurs correspondantes, parmi lesquelles on en trouvera généralement une égale à zéro.

La quantité R dont il est ici question, et qui représente

toujours l'un des modules de $\psi(x)$ correspondant à une racine de l'équation

$$\psi'(x)=0$$

est ce que nous nommerons *le module principal* de la fonction $\psi(x)$. Cela posé, on pourra énoncer la proposition suivante.

1[er] Théorème. *La série qui a pour terme général*

$$(12) \qquad S_n=\frac{1}{1.2.3\ldots m}\frac{d^m\{\varphi(t)[\varpi(t)]^n\}}{dt^m},$$

m *désignant un très-grand nombre qui croît avec* n *de manière que* $\frac{m}{n}=\mu$ *conserve une valeur finie, sera convergente ou divergente, suivant que le module principal de la fonction*

$$(13) \qquad \frac{\varpi(t+x)}{x^\mu}$$

sera inférieur ou supérieur à l'unité.

En posant $m=n-1$, on trouvera $\mu=1-\frac{1}{n}$, ou à très-peu près, pour de très-grandes valeurs de n, $\mu=1$. Par suite, on déduira immédiatement du 1[er] théorème cette autre proposition.

2[e] Théorème. *La série qui a pour terme général*

$$(14) \qquad S_n=\frac{1}{1.2.3..(n-1)}\frac{d^{n-1}\{\varphi(t)[\varpi(t)]^n\}}{dt^{n-1}},$$

sera convergente ou divergente, suivant que le module principal de la fonction

$$(15) \qquad \frac{\varpi(t+x)}{x}$$

sera inférieur ou supérieur à l'unité.

Il est bon d'observer que l'expression (13), divisée par n, deviendra le terme général de la série trouvée par Lagrange, et qui représente la valeur de $\int \varphi(z)\,dz$, z étant une racine de l'équation

(16) $$z = t + \varpi(z).$$

1[er] *Exemple*. Considérons l'équation

(17) $$z = t + c \sin. z.$$

On aura, dans ce cas,

(18) $$\left\{\begin{aligned} &\varpi(z) = c \sin. z, \\ &\frac{\varpi(t+x)}{x} = c\,\frac{\sin.(t+x)}{x}. \end{aligned}\right.$$

Il reste à trouver le module principal de la fonction

(19) $$c\,\frac{\sin.(t+x)}{x} = c\,\frac{\sin.\left(t + re^{s\sqrt{-1}}\right)}{re^{s\sqrt{-1}}}.$$

Or ce module répond nécessairement à une racine de l'équation

(20) $$\frac{d\left(\frac{\sin.(t+x)}{x}\right)}{dx} = 0,$$

ou

(21) $$d\,\mathrm{l} \sin.(t+x) - d\,\mathrm{l}(x) = 0,$$

que l'on peut réduire à

(22) $$\operatorname{tang.}(t+x) = x.$$

Cela posé, soit d'abord $t = \frac{\pi}{2}$. L'équation (22) deviendra

$-\cot. x = x$, ou

(23) $$\text{tang.}\, x = -\frac{1}{x}.$$

On satisfait à cette dernière en prenant

(24) $$x = re^{s\sqrt{-1}} r\sqrt{-1}, \quad \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^r} = \frac{1}{r}, \quad s = \frac{\pi}{2}.$$

De plus, le module de la fonction (19) est généralement

(25) $$\frac{c}{2r}\sqrt{\left[e^{2r\sin. s} + e^{-2r\sin. s} - 2\cos.(2t + 2r\cos. s)\right]}.$$

Donc il se réduit, pour $t = \frac{\pi}{2}$, à

(26) $$\frac{c}{2r}\sqrt{\left[e^{2r\sin. s} + e^{-2r\sin. s} + 2\cos.(2r\cos. s)\right]}.$$

Or la valeur *maximum maximorum* de cette dernière quantité est évidemment celle qui répond à $s = \frac{\pi}{2}$, savoir,

(27) $$c\,\frac{e^r + e^{-r}}{2r}.$$

Donc la quantité (27), dans laquelle on doit supposer r déterminé par la formule

(28) $$\frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r}} = \frac{1}{r}$$

est le module principal de la fonction

(29) $$\frac{\sin.\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{x} = \frac{\cos. x}{x}.$$

Donc la racine z de l'équation

(30) $$z = \frac{\pi}{2} + c\sin. z,$$

et les fonctions de cette même racine seront développables en séries convergentes par la formule de Lagrange, lorsqu'on aura

$$(31)\qquad c\,\frac{e^r+e^{-r}}{2r}<1,\ \text{ou}\ c<\frac{2r}{e^r+e^{-r}}.$$

D'ailleurs on tire de l'équation (28)

$$(32)\qquad \frac{e^r+e^{-r}}{r}=\frac{e^r-e^{-r}}{1}=\frac{2}{\sqrt{r^2-1}},$$

$$(33)\qquad \frac{2r}{e^r+e^{-r}}=\sqrt{r^2-1}.$$

Donc les séries en question seront convergentes, quand on aura

$$(34)\qquad c<\sqrt{r^2-1}.$$

Il reste à calculer approximativement dans la même hypothèse le terme général d'une semblable série, par exemple, de celle qui fournira le développement de $\Phi(z)$. Or ce terme sera

$$(35)\qquad S_n=\frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}\{\Phi'(t)[c\sin.t]^n\}}{dt^{n-1}},$$

pourvu que l'on fasse $t=\frac{\pi}{2}$ après les différenciations, ou, ce qui revient au même,

$$(36)\quad S_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi'\left(\frac{\pi}{2}+re^{s\sqrt{-1}}\right)\left\{\frac{c\cos.\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)}{\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)^{1-\frac{1}{n}}}\right\}^n ds.$$

Pour comparer cette dernière intégrale à l'intégrale (1) du premier paragraphe, il faudra faire

$$(37)\begin{cases} v=\Phi'\left(\frac{\pi}{2}+re^{s\sqrt{-1}}\right).re^{s\sqrt{-1}} \\ u=c\,\frac{\cos.\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)}{re^{s\sqrt{-1}}} \\ \varpi=p+q\sqrt{-1}=\mathrm{l}\left[\cos.\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)\right]-\left[\mathrm{l}(r)+s\sqrt{-1}\right]+\mathrm{l}(c). \end{cases}$$

Cela posé, on trouvera

$$(38)\begin{cases} \varpi'=p'+q'\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}\left[re^{s\sqrt{-1}}\,\text{tang.}\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)+1\right]=\frac{d(p+q\sqrt{-1})}{ds} \\ \varpi''=p''+q''\sqrt{-1}=\left\{re^{s\sqrt{-1}}\,\text{tang.}\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)+\frac{r^2e^{2s\sqrt{-1}}}{\cos.^2\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)}\right\}. \end{cases}$$

Par suite l'équation $\varpi'=0$ donnera

$$(39)\qquad re^{s\sqrt{-1}}\,\text{tang.}\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)+1=0,$$

et se réduira ainsi à la formule (23). De plus, r et s étant déterminés par la formule (39), ou ce qui revient au même par les équations

$$(40)\qquad s=\frac{\pi}{2},\quad \frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}}=\frac{1}{r},$$

la seconde des formules (38) donnera

$$(41)\qquad \mathrm{W}''=\mathrm{P}''+\mathrm{Q}''\sqrt{-1}=-\left[1+\frac{4r^2}{(e^r+e^{-r})^2}\right]=-\left[1+r^2-1\right]=-r^2.$$

On aura donc

$$(42)\qquad \mathrm{B}^2=-\mathrm{P}''=r^2,\quad \mathrm{Q}''=0,\quad \theta=0,\quad \mathrm{B}=r.$$

On trouvera de même

$$(43)\qquad \mathrm{U}=e^{\mathrm{P}+\mathrm{Q}\sqrt{-1}}=c\,\frac{\cos.(r\sqrt{-1})}{r\sqrt{-1}}=-\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\sqrt{-1},$$

et par suite

(44) $$\mathrm{R}=e^{\mathrm{P}}=\frac{e^{r}+e^{-r}}{2r}=\frac{1}{\sqrt{r^2-1}},\quad \mathrm{Q}=-\frac{\pi}{2}.$$

Si l'on fait d'ailleurs

(45) $$\mathrm{V}=r\sqrt{-1}\,\Phi'\left(\frac{\pi}{2}+r\sqrt{-1}\right)=\mathrm{A}(\cos.\Theta+\sqrt{-1}\sin.\Theta),$$

la formule (37) du premier paragraphe donnera

(46) $$\mathrm{S}_n=\frac{(1\pm\varepsilon)}{2\pi}\frac{2\mathrm{A}}{r}\left(c\frac{e^{r}+e^{-r}}{2r}\right)^{n}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos.\left(\Theta-\frac{n\pi}{2}\right).$$

Soit en particulier

(47) $$\Phi(z)=1-c\cos.z.$$

On trouvera

(48) $$\Phi'(z)=c\sin.z,$$

(49) $$\left\{\begin{array}{l}\mathrm{V}=cr\sqrt{-1}\cos.(r\sqrt{-1})=cr\left(\frac{e^{r}+e^{-r}}{2}\right)\sqrt{-1},\\ \mathrm{A}=cr\left(\frac{e^{r}+e^{-r}}{2}\right),\quad \Theta=\frac{\pi}{2},\end{array}\right.$$

(50) $$\mathrm{S}_n=\frac{(1\pm\varepsilon)}{2\pi}2r\left(c\frac{e^{r}+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\cos.(n-1)\frac{\pi}{2},$$

(51) $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{S}_n}{n}&=\frac{(1\pm\varepsilon)}{2\pi}\frac{2r\sqrt{2\pi}}{n\sqrt{n}}\left(c\frac{e^{r}+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}\cos.(n-1)\frac{\pi}{2}\\ &=\frac{(1\pm\varepsilon)}{\sqrt{2\pi}}\frac{2r}{n\sqrt{n}}\left(\frac{c}{\sqrt{r^2-1}}\right)^{n+1}\cos.(n-1)\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

La formule (51) s'accorde avec celle qu'a donnée M. Laplace.

Revenons au cas où t a une valeur quelconque. Alors, en faisant, pour abréger,

(52) $$x=re^{s\sqrt{-1}},$$

on aura

$$(53)\qquad u=c\,\frac{\sin.(t+x)}{x},$$

$$(54)\begin{cases} w=p+q\sqrt{-1}=\mathrm{l}(c)+\mathrm{l}\sin.(t+x)-\mathrm{l}(x),\ \dfrac{dx}{ds}=x\sqrt{-1},\\ w'=\dfrac{dx}{ds}=p'+q'\sqrt{-1}=\left(\dfrac{\cos.(t+x)}{\sin.(t+x)}-\dfrac{1}{x}\right)\dfrac{dx}{ds}=\sqrt{-1}\left(\dfrac{x}{\mathrm{tang.}(t+x)}-1\right),\\ w''=\dfrac{d^2w}{ds^2}=p''+q''\sqrt{-1}=\left(\dfrac{1}{\mathrm{tang.}(t+x)}-\dfrac{x}{\sin.^2(t+x)}\right)\dfrac{dx}{ds}\sqrt{-1}\\ \qquad=-\left(\dfrac{x}{\mathrm{tang.}(t+x)}-\dfrac{x^2}{\sin.^2(t+x)}\right).\end{cases}$$

Cela posé, l'équation $w'=0$ donnera

$$(55)\qquad \frac{\mathrm{tang.}(t+x)}{x}=1,\quad \text{ou}\quad \mathrm{tang.}(t+x)=x,$$

et l'on en tirera

$$(56)\qquad \begin{cases} \dfrac{\sin.(t+x)}{x}=\dfrac{\cos.(t+x)}{1},\\ \dfrac{\sin.^2(t+x)}{x^2}=\dfrac{\cos.^2(t+x)}{1}=\dfrac{1}{1+x^2}.\end{cases}$$

$$(57)\qquad W''=P''+Q''\sqrt{-1}=-[1-(1+x^2)]=x^2.$$

Donc le module principal de l'expression (53) correspondra nécessairement à une racine de l'équation (55) qui rendra négative la partie réelle de x^2. Il est clair que cette racine ne peut être réelle. Car, dans ce cas, x^2 serait réelle et positive. Donc il faut exclure toutes les racines réelles de l'équation (55), et même les racines imaginaires dans lesquelles la partie réelle surpasserait (abstraction faite du signe) le coefficient de $\sqrt{-1}$. Car, si l'on pose

$$(58)\qquad x=\alpha+\beta\sqrt{-1},$$

on aura

$$(59)\qquad x^2 = \alpha^2 - 6^2 + 2\alpha 6\sqrt{-1};$$

et la partie réelle de x^2 ne pourra être négative, si l'on a $\alpha^2 > 6^2$. Ajoutons que la valeur $x = \alpha + 6\sqrt{-1}$, substituée dans l'équation (55), donnera

$$(60)\qquad \alpha + 6\sqrt{-1} = \frac{\sin.(t+\alpha+6\sqrt{-1})}{\cos.(t+\alpha+6\sqrt{-1})} = \frac{2\sin.(t+\alpha+6\sqrt{-1})\cos.(t+\alpha-6\sqrt{-1})}{2\cos.(t+\alpha+6\sqrt{-1})\cos.(t+\alpha-6\sqrt{-1})}$$

$$= \frac{\sin.(2t+2\alpha) + \frac{1}{2}\left(e^{26} - e^{-26}\right)\sqrt{-1}}{\cos.(2t+2\alpha) + \frac{1}{2}\left(e^{26} + e^{-26}\right)},$$

$$(61)\qquad \alpha = \frac{\sin.(2t+2\alpha)}{\cos.(2t+2\alpha) + \frac{1}{2}\left(e^{26} + e^{-26}\right)},\quad 6 = \frac{\frac{1}{2}\left(e^{26} - e^{-26}\right)}{\cos.(2t+2\alpha) + \frac{1}{2}\left(e^{26} + e^{-26}\right)}.$$

Donc par suite, si α et 6 diffèrent de zéro, l'on aura

$$(62)\qquad \frac{\sin.(2t+2\alpha)}{2\alpha} = \frac{e^{26} - e^{-26}}{46} > 1.$$

Or l'équation (62) ne peut subsister, ni pour $t = 0$, ni pour $t = \frac{\pi}{2}$, ou $2t = \pi$, puisque alors le premier membre se réduit à $\pm \frac{\sin.2\alpha}{2\alpha}$ dont la valeur numérique est inférieure à l'unité. Donc, dans l'un et l'autre cas, il faut supposer $\alpha = 0$; ce qui réduit la seconde des équations (61), pour $t = 0$, à

$$(63)\qquad 6 = \frac{e^{26} - e^{-26}}{\left(e^{6} + e^{-6}\right)^2} = \frac{e^{6} - e^{-6}}{e^{6} + e^{-6}},\quad \text{ou}\quad 6 = 0,$$

et, pour $t = \frac{\pi}{2}$, à

$$(64)\qquad 6 = \frac{e^{26} - e^{-26}}{\left(e^{6} - e^{-6}\right)^2} = \frac{e^{6} + e^{-6}}{e^{6} - e^{-6}}.$$

La formule (64) s'accorde avec la seconde des équations (40). Quant au cas où l'on suppose $t=0$, il donne à la fois $\alpha=0$, $\theta=0$, et par conséquent $x=0$. Donc alors le module principal de l'expression (53) correspond à $x=0$, et se réduit à

$$c\frac{\sin.x}{x}=c. \tag{65}$$

Donc, dans le même cas, la série de Lagrange sera convergente, si l'on a

$$c<1. \tag{66}$$

2[e] *Exemple.* Considérons l'équation

$$z=\cos.\theta+\frac{\alpha}{2}(z^2-1). \tag{67}$$

La série de Lagrange appliquée à cette équation du second degré fournira le développement en série de l'une de ses racines, savoir :

$$z=\frac{1-(1-2\alpha\cos.\theta+\alpha^2)^{\frac{1}{2}}}{\alpha}; \tag{68}$$

et, si l'on pose, pour abréger, $\cos.\theta=t$, ce développement sera

$$z=t+\frac{\alpha}{2}(t^2-1)+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1.2}\frac{d(t^2-1)^2}{dt}+\ldots+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1.2.3\ldots n}\frac{d^{n-1}(t^2-1)^n}{dt^{n-1}}+\text{etc.} \tag{69}$$

Ici, la fonction $\varpi(z)$ étant donnée par l'équation

$$\varpi(z)=\frac{\alpha}{2}(z^2-1), \tag{70}$$

la série de Lagrange sera convergente lorsque le module principal de la fonction

(71) $$\frac{\varpi(t+x)}{x}=\frac{\alpha}{2}\frac{(t+x)^2-1}{x}$$

sera inférieur à l'unité. D'ailleurs, si l'on pose

(72) $$u=\frac{\alpha}{2}\frac{(t+x)^2-1}{x},\quad x=re^{s\sqrt{-1}},\quad \frac{dx}{ds}=x\sqrt{-1},$$

on aura

(73) $$w=\mathrm{l}(u)=\mathrm{l}\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{l}[(t+x)^2-1]-\mathrm{l}(x),$$

(74) $$\begin{cases} w'=\dfrac{dw}{ds}=\left[\dfrac{2(t+x)}{(t+x)^2-1}-\dfrac{1}{x}\right]x\sqrt{-1}=\sqrt{-1}\left[\dfrac{2tx+2x^2}{(t+x)^2-1}-1\right],\\ w''=\dfrac{d^2w}{ds^2}=p''+q''\sqrt{-1}=-\left\{\dfrac{2(t+2x)x}{(t+x)^2-1}-\left(\dfrac{2tx+2x^2}{(t+x)^2-1}\right)^2\right\}. \end{cases}$$

Par suite l'équation $w'=0$, donnera

(75) $$\begin{cases} \dfrac{2tx+2x^2}{(t+x)^2-1}-1=0,\\ x^2=t^2-1=-\sin.^2\theta,\\ x=\pm\sin.\theta.\sqrt{-1}; \end{cases}$$

et l'on en conclura, en plaçant le signe + devant $\sin.\theta.\sqrt{-1}$,

(76) $$\begin{cases} W''=P''+Q''\sqrt{-1}=-\left[\dfrac{2(t+2x)x}{(t+x)^2-1}-1\right]=\dfrac{3x^2+1-t^2}{1-t^2-x^2-2tx}\\ \quad=\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\dfrac{\sin.\theta}{\cos.\theta+\sqrt{-1}\sin.\theta}=\dfrac{\sin.\theta(\cos.\theta-\sqrt{-1}\sin.\theta)}{\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

(77) $$P''=-\sin.^2\theta,\quad B=\sin.\theta,\quad Q''=-\sin.\theta\cos.\theta,\quad \frac{Q''}{P''}=\cot.\theta=\mathrm{tang.}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right);$$

(78) $$\begin{cases} U=\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{(t+x)^2-1}{x}=\dfrac{\alpha}{2}\dfrac{\cos.2\theta-1+\sin.2\theta.\sqrt{-1}}{\sin.\theta.\sqrt{-1}}\\ \quad=\alpha[\cos.\theta+\sin.\theta.\sqrt{-1}]; \end{cases}$$

$$(79) \qquad R = \alpha, \quad Q = \theta.$$

Donc le module principal de la fonction (71) sera $R = \alpha$, et la série (69) sera toujours convergente pour $\alpha < 1$. On peut en dire autant de toute série qui représentera le développement de

$$\Phi(z),$$

Φ étant une fonction quelconque, et z étant déterminée par la formule (68).

Si l'on voulait développer, en série ordonnée suivant les puissances de α, le radical

$$(80) \qquad (1 - 2\alpha \cos.\theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}},$$

on observerait que ce radical est équivalent à

$$(81) \qquad \frac{1}{1 - \alpha z},$$

z désignant la racine de l'équation (67) ou

$$(82) \qquad z - \cos.\theta - \frac{\alpha}{2}(z^2 - 1) = 0,$$

qui se développe par la formule de Lagrange. On aurait par suite, en observant que la dérivée du premier membre de l'équation (82) est précisément $1 - \alpha z$,

$$(83) \qquad (1 - 2\alpha \cos.\theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{E} \frac{1}{\left(\left(z - \cos.\theta - \frac{\alpha}{2}(z^2 - 1)\right)\right)}$$

$$= \mathcal{E} \frac{1}{\left(\left(z - t - \frac{\alpha}{2}(z^2 - 1)\right)\right)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(84)\qquad \frac{1}{1-\alpha z}=\mathcal{E}\frac{1}{((z-t))}+\frac{\alpha}{2}\mathcal{E}\frac{z^2-1}{(((z-t)^2))}+\frac{\alpha^2}{2^2}\mathcal{E}\frac{(z^2-1)^2}{(((z-t)^3))}+\text{etc.}$$

ou bien encore

$$(85)\qquad \frac{1}{1-\alpha z}=1+\frac{\alpha}{2}\frac{d(t^2-1)}{dt}+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1\,.\,2}\frac{d^2(t^2-1)^2}{dt^2}+\ldots+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,n}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}+\text{etc.}$$

Ainsi l'on trouvera, en posant $\cos.\theta=t$,

$$(86)\qquad (1-2\alpha\cos.\theta+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$1+\frac{\alpha}{2}\frac{d(t^2-1)}{dt}+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1\,.\,2}\frac{d^2(t^2-1)^2}{dt^2}+\ldots+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1\,.\,2\,.\,3\,..\,n}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}+\text{etc.}$$

Or cette dernière série sera convergente, lorsque le module principal de la fonction

$$\frac{\alpha}{2}\frac{(t+x)^2-1}{x},$$

c'est-à-dire la quantité α, sera inférieur à l'unité.

Soit maintenant

$$(87)\qquad S_n=\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^n}{1\,.\,2\,.\,3\,...\,n}\frac{d^n(t^2-1)^n}{dt^n}$$

le terme général de la série (86). On aura

$$(88)\qquad S_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left\{\frac{\alpha}{2}\frac{\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)^2-1}{re^{s\sqrt{-1}}}\right\}^n ds.$$

En comparant cette valeur de S_n à l'intégrale (1) du premier paragraphe, on trouvera $s=x$,

$$(89)\qquad u=\frac{\alpha}{2}\frac{\left(t+re^{s\sqrt{-1}}\right)^2-1}{re^{s\sqrt{-1}}},\quad v=\frac{1}{2\pi}.$$

On aura par suite

$$(90)\quad \begin{cases} R=\alpha, \quad B=\sin.\theta, \quad \text{arc.tang.}\frac{Q''}{P''}=\frac{\pi}{2}-\theta \\ A=\frac{1}{2\pi}, \quad \Theta=0, \quad Q=\theta; \end{cases}$$

et l'on tirera de la formule (37) du premier paragraphe, après y avoir remplacé θ par $\frac{\pi}{2}-\theta$,

$$(91)\qquad S_n=(1\pm\varepsilon)\frac{\alpha^n}{\sqrt{\frac{1}{2}n\pi\sin.\theta}}\cos.\left[(n+\tfrac{1}{2})\theta-\frac{1}{4}\pi\right].$$

Ce résultat s'accorde avec celui qu'a obtenu M. Laplace. [Voyez aussi une note de M. Plana insérée dans le 14e volume de la correspondance astronomique de M. le baron de Zach.]

§ III.

Cherchons généralement la valeur de l'intégrale

$$(1)\qquad S_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)\left(\frac{\psi(re^{s\sqrt{-1}})}{re^{s\sqrt{-1}}}\right)^n ds$$
$$=\frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n[\varphi(i)(\psi(i))^n]}{di^n},$$

i devant être supposé nul après les différentiations. On déterminera la valeur de x à laquelle correspond le module principal de la fonction

$$(2)\qquad \frac{\psi(x)}{x}.$$

Soit $x=\omega$ cette valeur qui pourra être réelle ou imaginaire. Si l'on fait

$$(3)\quad \begin{cases} v=\varphi\left(re^{s\sqrt{-1}}\right), \quad u=\frac{\psi\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)}{re^{s\sqrt{-1}}}, \quad x=re^{s\sqrt{-1}}, \\ w=\mathrm{l}(u)=\mathrm{l}\left[\psi\left(re^{s\sqrt{-1}}\right)\right]-\mathrm{l}(r)-s\sqrt{-1}, \end{cases}$$

et par conséquent

$$v = \varphi(x), \quad w = \mathrm{l}[\psi(x)] - \mathrm{l}(x),$$

on trouvera $\frac{dx}{ds} = x\sqrt{-1}$,

$$(4) \qquad \frac{dw}{ds} = \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} - \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{ds} = \left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}x - 1\right)\sqrt{-1}$$

$$(5) \quad \frac{d^2 w}{ds^2} = \sqrt{-1}\left[\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} + \frac{\psi''(x)}{\psi(x)}x - x\left(\frac{\psi'(x)}{\psi(x)}\right)^2\right]\frac{dx}{ds} = -\left[\frac{x^2\psi''(x)}{\psi(x)} + \frac{x\psi'(x)}{\psi(x)} - \left(\frac{x\psi'(x)}{\psi(x)}\right)^2\right].$$

Donc la valeur ω de x vérifiera l'équation $\frac{dw}{ds} = 0$, ou

$$(6) \qquad \omega\frac{\psi'(\omega)}{\psi(\omega)} - 1 = 0,$$

et la valeur correspondante de $\frac{d^2 w}{ds^2} = p'' + q''\sqrt{-1}$ sera [voyez le § Ier],

$$(7) \qquad \mathrm{W}'' = \mathrm{P}'' + \mathrm{Q}''\sqrt{-1} = -\frac{\omega^2\psi''(\omega)}{\psi(\omega)}.$$

Quant à la valeur de

$$\mathrm{U} = e^{\mathrm{W}},$$

elle sera

$$(8) \qquad e^{\mathrm{W}} = \frac{\psi(\omega)}{\omega}.$$

Enfin on aura

$$(9) \qquad \mathrm{V} = \varphi(\omega).$$

Cela posé, le second membre de la formule (18) du § Ier deviendra

$$(10) \qquad \frac{\varphi(\omega)\left(\frac{\psi(\omega)}{\omega}\right)^n}{\sqrt{n}}\,\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\left(\frac{\omega^2\psi''(\omega)}{\psi(\omega)}\right)}}.$$

Par suite, si le module principal de la fonction

$$\frac{\psi(x)}{x}$$

est réel et correspond à une seule valeur de x, on aura, pour de grandes valeurs de n,

$$(11)\qquad S_n = (1 \pm \varepsilon)\left(\frac{1}{2\pi n}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi(\omega)\left[\frac{\psi(\omega)}{\omega}\right]^n \left[\frac{\psi(\omega)}{\omega^2 \psi''(\omega)}\right]^{\frac{1}{2}};$$

ε désignant un nombre très-petit. Mais, si le module principal de $\frac{\psi(x)}{x}$ correspond à deux valeurs imaginaires et conjuguées de la variable x, alors, en posant

$$(12)\qquad \varphi(\omega)\left[\frac{\psi(\omega)}{\omega}\right]^n \left[\frac{\psi(\omega)}{\omega^2 \psi''(\omega)}\right]^{\frac{1}{2}} = \Omega + \Omega_1 \sqrt{-1},$$

on aura

$$(13)\qquad S_n = (1 \pm \varepsilon)\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi n}}\,\Omega.$$

Exemple. Soient

$$(14)\qquad \varphi(x) = 1,\quad \psi(x) = \frac{(t+x)^2 - 1}{2}\alpha,\quad t = \cos.\theta,$$

on trouvera

$$(15)\quad \omega = \pm \sin.\theta.\sqrt{-1},\ \psi(\omega) = \frac{(\omega+t)^2 - 1}{2}\alpha,\ \psi''(\omega) = \alpha.$$

Cela posé, si l'on prend

$$(16)\qquad \omega = \sin.\theta\sqrt{-1},$$

on aura

$$\psi(\omega) = \frac{(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)^2 - 1}{2}\alpha = \frac{-2\sin.^2\theta + 2\sin.\theta\cos.\theta\sqrt{-1}}{2}\alpha$$

$$\frac{\psi(\omega)}{\omega^2\psi''(\omega)} = 1 - \frac{\cos.\theta}{\sin.\theta}\sqrt{-1} = \frac{\cos.\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - \sin.\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sqrt{-1}}{\sin.\theta}$$

$$\frac{\psi(\omega)}{\omega} = \alpha(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta),$$

$$\left(\frac{\psi(\omega)}{\omega}\right)^n = \alpha^n(\cos.n\theta + \sqrt{-1}\sin.n\theta),$$

$$\left(\frac{\psi(\omega)}{\omega^2\psi''(\omega)}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\cos.\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{-1}\sin.\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{(\sin.\theta)^{\frac{1}{2}}}, \quad \varphi(\omega) = 1,$$

et par suite

$$(17) \quad \Omega + \Omega_1\sqrt{-1} = \frac{\alpha^n}{(\sin.\theta)^{\frac{1}{2}}}\left[\cos.\left(n\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{-1}\sin.\left(n\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$(18) \quad \Omega = \frac{\alpha^n}{(\sin.\theta)^{\frac{1}{2}}}\cos.\left(n\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Donc la formule (13) donnera

$$(19) \quad S_n = (1 \pm \varepsilon)\frac{\alpha^n\cos.\left(n\theta + \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi n\sin.\theta}};$$

ce que l'on savait déja.

Supposons maintenant qu'il s'agisse de calculer

$$(20) \quad S_n = \frac{1}{1.2.3..(n-1)}\frac{d^{n-1}[\Phi'(t)(\varpi(t))^n]}{dt^{n-1}}.$$

On aura évidemment, pourvu que l'on pose après les différentiations $i=0$,

$$(21) \quad S_n = \frac{1}{1.2.3...n}\frac{d^n\{i\Phi'(t+i)[\varpi(t+i)]^n\}}{di^n}.$$

Donc, pour déduire la valeur de S_n des formules (12) et (13), il suffira de prendre

$$(22) \quad \varphi(x) = x\Phi'(t+x), \quad \psi(x) = \varpi(t+x).$$

On aura donc

$$(23)\qquad S_n = \frac{1 \pm \varepsilon}{\sqrt{\frac{1}{2}\pi n}}\,\Omega,$$

la valeur de Ω étant donnée par l'équation

$$(24)\qquad \omega\Phi'(t+\omega)\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega}\right]^n\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega^2\varpi''(t+\omega)}\right]^{\frac{1}{2}} = \Omega + \Omega_1\sqrt{-1}.$$

Si le module principal de la fonction $\frac{\varpi(t+x)}{x}$ correspondait à une valeur unique de x, on aurait simplement

$$(25)\qquad S_n = \frac{1 \pm \varepsilon}{\sqrt{2\pi n}}\,\omega\Phi'(t+\omega)\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega}\right]^n\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega^2\varpi''(t+\omega)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Dans le cas particulier où l'on suppose

$$(26)\qquad \Phi'(t) = \varpi(t),$$

l'équation (24) se réduit à

$$(27)\qquad \omega^2\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega}\right]^{n+1}\left[\frac{\varpi(t+\omega)}{\omega^2\varpi''(t+\omega)}\right]^{\frac{1}{2}} = \Omega + \Omega_1\sqrt{-1}.$$

Exemple. Appliquons les formules (23) et (27) au cas où l'on a

$$(28)\qquad \varpi(t) = c\sin.t.$$

Dans ce cas, on tire de la formule (6), en y remplaçant $\psi(x)$ par $\varpi(t+x)$

$$(29)\qquad \frac{\omega\cos.(t+\omega)}{\sin.(t+\omega)} = 1.$$

On trouve de plus

$$(30)\qquad \frac{\varpi(t+\omega)}{\omega} = c\,\frac{\sin.(t+\omega)}{\omega},$$

$$(31)\qquad \frac{\varpi(t+\omega)}{\omega^2\varpi''(t+\omega)} = -\frac{1}{\omega^2}.$$

Le second membre de la formule (31) devant avoir une partie réelle positive, la valeur de ω, tirée de l'équation (29), doit nécessairement être imaginaire. Cela posé, la formule (27) donnera

$$(32)\qquad \frac{[c\sin.(t+\omega)]^{n+1}}{\omega^{n-1}}\left(-\frac{1}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\Omega+\Omega_1\sqrt{-1}.$$

Si l'on fait en particulier $t=\frac{\pi}{2}$, on vérifiera l'équation (29) en prenant

$$(33)\qquad \omega=r\sqrt{-1},\quad \frac{e^r-e^{-r}}{e^r+e^{-r}}=\frac{1}{r},$$

et l'on tirera de la formule (32)

$$(34)\qquad \Omega+\Omega_1\sqrt{-1}=\left(c\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}r(-\sqrt{-1})^{n-1}$$
$$=\left(c\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}r\left[\cos.\frac{n-1}{2}\pi-\sqrt{-1}\sin.\frac{n-1}{2}\pi\right].$$

Donc par suite

$$(35)\qquad \Omega=r\left(c\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}\cos.\frac{n-1}{2}\pi;$$

et la formule (23) donnera

$$(36)\qquad S_n=\frac{(1\pm\varepsilon)2r}{\sqrt{2\pi n}}\left(c\frac{e^r+e^{-r}}{2r}\right)^{n+1}\cos.\left(\frac{n-1}{2}\right)\pi,$$

ce que l'on savait déja.

Post-Scriptum. On peut aisément calculer à l'aide des formules précédentes la valeur approchée de la différence finie $\Delta^m s^n$, lorsque m et n sont des nombres entiers, et que, les

valeurs de m, n, s étant très-considérables, les deux rapports $\frac{m}{n}=\mu$, $\frac{s}{n}=\varsigma$ conservent des valeurs finies. En effet on a identiquement, en posant $i=0$ après les différentiations,

$$(1)\quad \Delta^m s^n = \frac{d^n\left\{e^{(m+s)i}-\frac{m}{1}e^{(m+s-1)i}+\ldots\right\}}{di^n} = \frac{d^n\left\{e^{si}(e^i-1)^m\right\}}{di^n},$$

ou ce qui revient au même

$$(2)\qquad \Delta^m s^n = 1.2.3\ldots n.S_n,$$

la valeur de S_n étant donnée par l'équation

$$(3)\qquad S_n = \frac{1}{1.2.3\ldots n}\frac{d^n\left\{e^{\varsigma i}(e^i-1)^\mu\right\}^n}{di^n}.$$

D'ailleurs, pour faire coïncider cette valeur de S_n avec celle que fournit l'équation (1) du § III, il suffit de poser

$$(4)\qquad \varphi(x)=1,\ \psi(x)=e^{\varsigma x}(e^x-1)^\mu = e^{\frac{sx}{n}}(e^x-1)^{\frac{m}{n}}.$$

Alors l'équation (6) du § III se réduit à

$$(5)\qquad \frac{s}{n}+\frac{m}{n}\frac{1}{1-e^{-\omega}}-\frac{1}{\omega}=0,$$

et la formule (11) du même paragraphe donne

$$(6)\qquad S_n = \frac{1\pm\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{s\omega}\left(e^\omega-1\right)^m}{\omega^{n+1}}\left\{\frac{n}{\omega^2}-\frac{m}{\left(e^{\frac{\omega}{2}}-e^{-\frac{\omega}{2}}\right)^2}\right\}^{-\frac{1}{2}},$$

ω étant la racine réelle de l'équation (5). Comme on a d'ailleurs sensiblement, pour de très-grandes valeurs de n,

$$(7) \qquad \frac{1.2.3\ldots n}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}} = \sqrt{2\pi},$$

on tirera de la formule (2) combinée avec les équations (6) et (7)

$$(8) \quad \Delta^m s^n = (1 \pm \varepsilon) \left(\frac{n}{\omega}\right)^{n+1} e^{s\omega - n} (e^{\omega} - 1)^m \left\{ \frac{n^2}{\omega^2} - \frac{mn}{\left(e^{\frac{\omega}{2}} - e^{-\frac{\omega}{2}}\right)^2} \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

L'équation (8) coïncide avec une formule donnée par M. Laplace, et dont j'ai présenté une démonstration nouvelle dans le Mémoire sur la conversion des différences finies des puissances en intégrales définies. Il est d'ailleurs facile de s'assurer 1° que cette formule subsiste, dans le cas même où n cesse d'être un nombre entier; 2° que, dans le cas où s devient négatif, elle fournit, non plus la valeur de la différence finie

$$(9) \quad \Delta^m s^n = (m+s)^n - \frac{m}{1}(m+s-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.2}(m+s-2)^n + \text{etc.},$$

mais seulement la partie de cette différence qui renferme des puissances n^{mes} de quantités positives.

MÉMOIRE

SUR

Le développement de $f(\zeta)$ suivant les puissances ascendantes de h, ζ étant une racine de l'équation

(1) $$z - x - h\varpi(z) = 0\,;$$

PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

§ Ier.

Si l'on désigne par ζ une racine de l'équation (1), on aura

(2) $$f(\zeta) = \mathcal{E}\,\frac{1 - h\varpi'(z)}{((z - x - h\varpi(z)))}\,f(z),$$

le signe $\mathcal{E}$ se rapportant à la seule racine que l'on considère. D'ailleurs

(3) $$\frac{1 - h\varpi'(z)}{z - x - h\varpi(z)} = \frac{d\,\mathrm{l}\,[z - x - h\varpi(z)]}{dz}.$$

De plus, si l'on pose

(4) $$\mathrm{l}[z - x - h\varpi(z)] = \mathrm{l}(z - x) - \frac{h\varpi(z)}{z - x} - \frac{1}{2}\,\frac{h^2[\varpi(z)]^2}{(z - x)^2} - \ldots - \frac{1}{n}\,\frac{h^n[\varpi(z)]^n}{(z - x)^n} + \varphi(z),$$

on trouvera, en différentiant par rapport à z,

(5)
$$\frac{1-h\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}=$$
$$\frac{1}{z-x}-h\frac{d\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]}{dz}-\frac{h^2}{2}\frac{d\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]^2}{dz}\ldots-\frac{h^n}{n}\frac{d\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]^n}{dz}+\varphi'(z)$$
$$=\frac{1}{(z-x)}\left[1+\frac{h\varpi(z)}{z-x}+\ldots+\left(\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right)^n\right]-\frac{h\varpi'(z)}{z-x}\left[1+\ldots+\left(\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right)^{n-1}\right]$$
$$+\varphi'(z),$$

ou
$$1-h\varpi'(z)=1-\left(\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right)^{n+1}-h\varpi'(z)\left[1-\left(\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right)^n\right]+\varphi'(z)[z-x-h\varpi(z)].$$

Donc
$$[z-x-h\varpi(z)]\varphi'(z)=\left(\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right)^{n+1}-h\varpi'(z)\left(\frac{h\varpi(z)}{z-x}\right)^n$$
$$=\frac{h^{n+1}}{(z-x)^{n+1}}[\varpi(z)-(z-x)\varpi'(z)][\varpi(z)]^n,$$

(6)
$$\varphi'(z)=\frac{h^{n+1}[\varpi(z)]^n[\varpi z-(z-x)\varpi'(z)]}{(z-x)^{n+1}[z-x-h\varpi(z)]};$$

et par suite, si l'on fait pour abréger,

(7)
$$\frac{[\varpi(z)]^n[\varpi(z)-(z-x)\varpi'(z)]}{z-x-h\varpi(z)}f(z)=\frac{\chi(z)}{z-\zeta},$$

on aura

(8)
$$\frac{1-h\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}f(z)=$$
$$\frac{f(z)}{z-x}-\frac{h}{1}f(z)\frac{d\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]}{dz}-\frac{h^2}{2}f(z)\frac{d\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]^2}{dz}-\ldots-\frac{h^n}{n}f(z)\frac{d\left[\frac{\varpi(z)}{z-x}\right]^n}{dz}$$
$$+\frac{h^{n+1}\chi(z)}{z-\zeta}\frac{1}{(z-x)^{n+1}}.$$

Concevons maintenant que l'on prenne les résidus des deux membres de l'équation (8) par rapport aux seules valeurs

de z

$$z = x, \quad z = \zeta.$$

Alors, en ayant égard à la formule

$$(9)\quad \mathcal{E} f(z) \frac{d\left[\frac{\varpi(z)}{((z-x))}\right]^m}{dz} = -\mathcal{E} f'(z) \frac{[\varpi(z)]^m}{(((z-x)^m))} = -\frac{1}{1.2.3..(m-1)} \frac{d^{m-1}[f'(x)(\varpi(x))^m]}{dx^{m-1}}$$

on trouvera

$$(10)\qquad f(\zeta) =$$

$$f(x) + \frac{h}{1} f(x)\varpi(x) + \frac{h^2}{1.2} \frac{d[f'(x)(\varpi(x))^2]}{dx} + \ldots + \frac{h^n}{1.2.3..n} \frac{d^{n-1}[f'(x)(\varpi(x))^n]}{dx^{n-1}}$$
$$+ \mathcal{E} \frac{h^{n+1}\chi(z)}{(((z-\zeta)(z-x)^{n+1}))}.$$

La série comprise dans le second membre de la formule (10) est la série de Lagrange. Si l'on nomme r_{n+1} le reste qui complète cette série prolongée jusqu'au terme qui renferme h^n, on aura

$$(11)\qquad r_{n+1} = \mathcal{E} \frac{\chi(z)}{(((z-\zeta)(z-x)^{n+1}))} h^{n+1},$$

la valeur de $\chi(z)$ étant donnée par la formule (7); et par conséquent

$$(12)\qquad r_n = \mathcal{E} \frac{\psi(z)}{(((z-x)^n(z-\zeta)))} h^n,$$

la valeur de $\psi(z)$ étant donnée par l'équation

$$(13)\qquad \frac{\psi(z)}{z-\zeta} = \frac{[\varpi(z)]^{n-1}[\varpi(z)-(z-x)\varpi'(z)]}{z-x-h\varpi(z)} f(z).$$

§ II.

Pour obtenir, sous forme d'intégrale définie, la valeur de r_n, il suffit de remarquer qu'on a généralement

$$(14)\qquad \psi(z)=\psi(x)+\frac{z-x}{1}\psi'(x)+\ldots+\frac{(z-x)^{n-1}}{1.2..(n-1)}\psi^{(n-1)}(x)$$
$$+\frac{(z-x)^n}{1.2..(n-1)}\int_0^1 u^{n-1}\psi^{(n)}[z-u(z-x)]\,du.$$

Or, si l'on substitue la valeur précédente de $\psi(z)$ dans l'équation (12), en observant que l'on a, pour toutes les valeurs entières et positives de m,

$$\mathcal{E}\frac{1}{(((z-x)^m(z-\zeta)))}=0,$$

on trouvera

$$(15)\qquad r_n=\frac{h^n}{1.2.3..(n-1)}\mathcal{E}\frac{\int_0^1 u^{n-1}\psi^{(n)}[z-u(z-x)]\,du}{((z-\zeta))},$$

ou, ce qui revient au même,

$$(16)\qquad r_n=\frac{h^n}{1.2.3..(n-1)}\int_0^1 u^{n-1}\psi^{(n)}[\zeta-u(\zeta-x)]\,du.$$

Ainsi, pour obtenir le reste r_n de la série de Lagrange, il suffit de multiplier le rapport

$$(17)\qquad \frac{h^n}{(\zeta-x)^n}$$

par l'expression

$$(18)\qquad \frac{(\zeta-x)^n}{1.2.3...(n-1)}\int_0^1 u^{n-1}\psi^{(n)}[\zeta-u(\zeta-x)]\,du$$

qui représente le reste de la série à laquelle on parvient,

quand on développe $\psi(\zeta)=\psi(x+\overline{\zeta-x})$ suivant les puissances ascendantes de $\zeta-x$. Effectivement $f(\zeta)$ est ce que devient le produit

$$(19)\quad \frac{h^n}{(\zeta-x)^n}\psi(z)=\frac{h}{\zeta-x}\left(\frac{\varpi(z)}{\varpi(\zeta)}\right)^{n-1}\frac{z-\zeta}{z-x-h\varpi(z)}[\varpi(z)-(z-x)\varpi'(z)]f(z)$$

quand on y pose $z=\zeta$, puisqu'alors ce même produit se réduit à

$$(20)\quad \frac{h}{\zeta-x}\,\frac{1}{1-h\varpi'(\zeta)}[\varpi(\zeta)-(\zeta-x)\varpi'(\zeta)]f(\zeta)=f(\zeta).$$

De plus, il est facile de s'assurer que

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{h^n}{(\zeta-x)^n}\left\{\psi(x)+\dfrac{\zeta-x}{1}\psi'(x)+\ldots+\dfrac{(\zeta-x)^{n-1}}{1.2.3..(n-1)}\psi^{(n-1)}(x)\right\}= \\ f(x)+\dfrac{h}{1}f'(x)\varpi(x)+\ldots+\dfrac{h^{n-1}}{1.2..(n-1)}\,\dfrac{d^{n-2}[f'(x)(\varpi(x))^{n-1}]}{dx^{n-2}}. \end{cases}$$

Ainsi, par exemple, si l'on pose $n=1$, on aura

$$\frac{h}{\zeta-x}\psi(x)=\frac{h}{\zeta-x}\cdot\frac{x-\zeta}{-h\varpi(x)}\varpi(x)f(x)=f(x).$$

Si l'on pose $n=2$, on trouvera

$$\frac{h^2}{(\zeta-x)^2}\left\{\psi(x)+\frac{\zeta-x}{1}\psi'(x)\right\}=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)\varpi(x)$$

etc.....

Ajoutons que la valeur de r_n, donnée par l'équation (16), peut être présentée sous la forme

$$(22)\quad r_n=\frac{h^n}{1.2.3\ldots n}\psi^{(n)}(s),$$

s désignant une quantité comprise entre les limites x et ζ.

Il est encore essentiel de remarquer que l'on a générale-

ment

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\varpi(z)-(z-x)\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}=\frac{1}{h}\,\frac{h\varpi(z)-h(z-x)\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}\\ &=\frac{1}{h}\left\{(z-x)\frac{1-h\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}-1\right\};\end{aligned}\right.$$

puis, en nommant

$$\zeta,\ \zeta_1,\ \zeta_2,\ \text{etc.}\ldots$$

les diverses racines de l'équation $z-x-h\varpi(z)=0$, et supposant cette équation algébrique,

$$(24)\qquad \frac{1-h\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}=\frac{1}{z-\zeta}+\frac{1}{z-\zeta_1}+\frac{1}{z-\zeta_2}+\text{etc.}\ldots$$

Cela posé, en ayant égard à l'équation (23), on tirera de la formule (13),

$$(25)\qquad \psi(z)=\frac{z-\zeta}{h}\left\{(z-x)\frac{1-h\varpi'(z)}{z-x-h\varpi(z)}-1\right\}[\varpi(z)]^{n-1}f(z);$$

et l'on trouvera encore, en ayant égard à la formule (24),

$$(26)\quad \begin{aligned}\psi(z)&=\frac{1}{h}\left\{\zeta-x+(z-x)\left(\frac{z-\zeta}{z-\zeta_1}+\frac{z-\zeta}{z-\zeta_2}+\ldots\right)\right\}[\varpi(z)]^{n-1}f(z)\\ &=[\varpi(\zeta)][\varpi(z)]^{n-1}f(z)+\frac{z-x}{h}\left(\frac{z-\zeta}{z-\zeta_1}+\frac{z-\zeta}{z-\zeta_2}+\ldots\right)[\varpi(z)]^{n-1}f(z).\end{aligned}$$

§ III.

Il est facile de calculer directement la somme

$$(27)\qquad f(x)+\frac{h}{1}f'(x)\varpi(x)+\frac{h^2}{1.2}\,\frac{d\{f'(x)[\varpi(x)]^2\}}{dx}+\text{etc.}$$

dans le cas où, la série

$$(28) \qquad f(x),\ \frac{h}{1}f'(x)\varpi(x),\ \frac{h^2}{1.2}\frac{d\{f'(x)[\varpi(x)]^2\}}{dx},\ \text{etc.}$$

étant convergente, les fonctions $f(x)$, $\varpi(x)$ sont elles-mêmes développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes de x. Pour y parvenir, supposons d'abord $f(x)=x$, et faisons

$$(29) \qquad X = x + \frac{h}{1}\varpi(x) + \frac{h^2}{1.2}\frac{d[\varpi(x)]^2}{dx} + \text{etc.}$$

On tirera de l'équation (29) multipliée plusieurs fois de suite par elle-même, en ayant égard à une formule établie dans le 1er volume des Exercices de mathématiques [page 52],

$$(30) \qquad \begin{cases} X^2 = x^2 + \frac{h}{1}[2x\varpi(x)] + \frac{h^2}{1.2}\frac{d[2x(\varpi(x))^2]}{dx} + \text{etc.}, \\ X^3 = x^3 + \frac{h}{1}[3x^2\varpi(x)] + \frac{h^2}{1.2}\frac{d[3x^2(\varpi(x))^2]}{dx} + \text{etc.}, \\ \text{etc.}\ldots\ldots \\ X^n = x^n + \frac{h}{1}[nx^{n-1}\varpi(x)] + \frac{h^2}{1.2}\frac{d[nx^{n-1}(\varpi(x))^2]}{dx} + \text{etc.}, \end{cases}$$

n étant un nombre entier quelconque; puis, en supposant

$$\varpi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{etc.},$$

et ajoutant les équations (29) et (30) respectivement multipliées par $a_0, a_1, a_2, \ldots$, on trouvera

$$(31) \quad \varpi(X) = \varpi(x) + \frac{h}{1}\varpi'(x)\varpi(x) + \frac{h^2}{1.2}\frac{d[\varpi'(x)(\varpi(x))^2]}{dx} + \text{etc.}$$

$$= \varpi(x) + \frac{h}{1.2}\frac{d[\varpi(x)]^2}{dx} + \frac{h^2}{1.2.3}\frac{d^2[\varpi(x)]^3}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{h}(X - x);$$

et par suite X sera une racine de l'équation

(1) $$z - x - h\varpi(z) = 0,$$

puisqu'on aura

(32) $$X - x - h\varpi(X) = 0.$$

La valeur de X étant déterminée comme on vient de le dire, si l'on suppose maintenant

(33) $$f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \text{etc.},$$

on tirera des formules (29) et (30) respectivement multipliées par b_0, b_1, b_2, etc.

(34) $$f(X) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x)\varpi(x) + \frac{h^2}{1.2}\frac{d[f'(x)(\varpi(x))^2]}{dx} + \text{etc.}$$

§ IV.

Si l'on pose, dans l'équation (10), $f(z) = z$, et si l'on admet que le reste r_n déterminé par la formule (22) décroisse indéfiniment avec $\frac{1}{n}$, on aura

(35) $$\zeta = x + \frac{h}{1}\varpi(x) + \frac{h^2}{1.2}\frac{d[\varpi(x)]^2}{dx} + \text{etc.}$$

Si l'on suppose en particulier

$$\varpi(x) = x^m,$$

m étant un nombre quelconque, l'équation (1) deviendra

(36) $$z - x - hz^m = 0,$$

et la formule (35) donnera

$$(37)\quad \zeta = x + \frac{h}{1}x^m + \frac{h^2}{1.2}\frac{d.x^{2m}}{dx} + \frac{h^3}{1.2.3}\frac{d^2x^{3m}}{dx^2} + \text{etc.}$$

$$= x + \frac{1}{1}hx^m + \frac{2m}{1.2}h^2x^{2m-1} + \frac{3m(3m-1)}{1.2.3}h^3x^{3m-2} + \text{etc.}$$

Or la série, comprise dans le second membre de l'équation (37), aura pour terme général

$$(38)\qquad \frac{nm(nm-1)\ldots(nm-n+2)}{1.2.3\ldots n}h^nx^{nm-n+1},$$

et, si l'on nomme u_n ce terme général, on trouvera, pour de grandes valeurs de n,

$$(39)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}\frac{(nm+m)(nm+m-1)\ldots(nm+1)}{(nm-n+2)\ldots\ldots(nm-n+m)}hx^{m-1},$$

ou, à très-peu près,

$$(40)\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}hx^{m-1}.$$

Il est aisé d'en conclure que, si m est un nombre entier, la série, comprise dans le second membre de la formule (37), sera convergente toutes les fois que la valeur numérique du produit

$$\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}hx^{m-1}$$

sera inférieure à l'unité. Alors la somme de la série sera très-certainement une racine réelle de l'équation trinome $z - x - hz^m = 0$.

MÉMOIRE

SUR

L'ORIGINE, LE DÉVELOPPEMENT ET L'ORGANISATION DU LIBER ET DU BOIS.

PAR M. MIRBEL.

Lu à l'Académie des Sciences, le 26 novembre 1827.

Ce travail a pour but principal de développer et de prouver ce que j'ai avancé en 1816 dans une simple note, insérée au Bulletin de la Société philomatique, touchant l'organisation et la croissance du liber. Je n'ai pu cependant m'occuper de cet objet sans reporter mon attention sur le bois, puisque le liber et le bois ont une même origine et s'organisent simultanément.

Je m'applique à démontrer que les couches du liber des arbres et arbrisseaux à deux cotylédons conservent chacune, pendant une suite d'années plus ou moins considérable, la propriété de végéter et de croître; que la croissance du liber se manifeste par l'élargissement ou la multiplication des mailles de son réseau et l'augmentation de la masse de son tissu cellulaire; que, lorsque le liber se porte en avant, ce n'est pas, comme on le croit communément, que les nou-

velles productions qui s'interposent chaque année entre le bois et l'écorce, le chassent devant elles, mais c'est qu'il acquiert plus d'ampleur par l'effet de sa propre croissance, et que, par conséquent, il se sépare et s'écarte de lui-même du cône ligneux sur lequel il était appliqué; que si, dans cette circonstance, on n'aperçoit pas de lacune entre le bois et le liber, cela provient de ce que la place abandonnée par le liber est occupée immédiatement par le cambium. Ces faits expliquent de la manière la plus simple les déchirements que l'on remarque sur l'écorce des vieux arbres. J'établis en outre que les prétendus canaux séveux ou méats de M. Tréviranus, qui, selon cet auteur, sont les interstices que laissent entre elles des utricules, d'abord séparées complètement les unes des autres, puis soudées incomplètement les unes aux autres, ne sont, dans la réalité, que des fentes produites par le desséchement tardif de la substance interne des parois épaisses du tissu cellulaire originairement mucilagineux et continu dans tous ses points; que l'on ne saurait voir dans les tubes criblés des couches ligneuses que des cellules plus larges et plus longues que celles du tissu cellulaire alongé qui constitue la partie la plus compacte du bois; que les parois des tubes criblés sont en même temps les parois des cellules alongées, contigües à ces mêmes tubes; et qu'ainsi, sans qu'il soit nécessaire d'alléguer d'autres faits qui trouveront place plus loin, je puis déja affirmer, contre le sentiment de plusieurs auteurs, qu'il existe des cellules criblées, comme je l'ai annoncé autrefois.

On trouvera, dans l'explication des figures que je joins à ce Mémoire, les preuves de ce que j'avance. Je ne veux pas faire perdre à l'Académie un temps précieux, en lui lisant des détails anatomiques qui ne peuvent être bien compris que

dans le silence du cabinet, quand on a sous les yeux les objets eux-mêmes, ou, à défaut des objets, leur fidèle représentation. Je recommanderai à l'attention du lecteur la planche dans laquelle j'expose l'organisation de l'orme (1). Mes dessins parleront plus clairement à l'esprit que tout ce que je pourrais dire à l'appui de mon opinion.

EXPLICATION DES FIGURES ET OBSERVATIONS.

PLANCHE I. ANATOMIE DE L'ORME.

Fig. 1. Coupe transversale d'une branche de quatre ans, grandeur naturelle.

Fig. 2. Portion de la coupe, fig. 1.

Fig. 3. La fig. 2 très-grossie.

a. b. Écorce. — *a. c.* Enveloppe cellulaire — *b. c.* Liber; il offre quatre couches très-distinctes. — *c. f.* Couche de la première année. — *f. e.* Couche de la seconde année. — *e. d.* Couche de la troisième année — *d. b.* Couche de la quatrième année. — *g.* Rayons médullaires : après avoir parcouru le bois, ces rayons traversent les mailles du liber et viennent se perdre dans l'enveloppe cellulaire. — *h.* Lames cellulaires interposées entre les couches du liber. — *m. l.* Couche ligneuse de la première année. — *l. k.* Couche ligneuse de la seconde année. —

(1) Cette planche a été gravée par M. F. Bein en 1817. La première épreuve a été déposée à cette époque dans les bureaux de l'Académie des Sciences.

i. k. Couche ligneuse de la troisième année. —*i. b.* Couche ligneuse de la quatrième année. —*n.* Gros vaisseaux du bois : ces vaisseaux forment la limite intérieure de chaque couche ligneuse.— *o.* Petits vaisseaux du bois : ils sont répandus dans l'épaisseur de chaque couche ligneuse. —*p.* Etui médullaire : ce sont les vaisseaux qui entourent la moelle. — *q. r.* Moelle. —*s.* Rayons médullaires.

Fig. 4. Portion de la fig. 3.

a. b. Écorce.—*a. c.* Enveloppe cellulaire. —*b. c.* Liber : il offre quatre couches très-distinctes. —*c. f.* Couche de la première année.—*f. e.* Couche de la seconde année.—*e. d.* Couche de la troisième année. —*d. b.* Couche de la quatrième année. —*g.* Rayons médullaires. —*h.* Lames cellulaires interposées entre les couches du liber. — *k. i.* Portion de la couche ligneuse de la troisième année. — *i. b.* Couche ligneuse de la quatrième année. — *n.* Gros vaisseaux du bois : ces vaisseaux forment la limite extérieure de chaque couche ligneuse. — *o.* Petits vaisseaux du bois : ils sont répandus dans l'épaisseur des couches ligneuses. — *s.* Rayons médullaires du bois.

Fig. 5. Le même fragment de la fig. 3, représenté fig. 4, grossi au point de faire voir le tissu organique dans ses moindres détails.

a. b. Écorce. — *t.* Lacunes. — *a. c.* Enveloppe cellulaire. — *b. c.* Liber. — *c. f.* Couche de la première année.—*f. e.* Couche de la seconde année. —*c. d.* Couche de la troisième année.— *d. b.* Couche de la quatrième année. —*g.* Rayons médullaires. — *h.* Couches cellulaires interposées entre les couches du liber.

Observation. On voit parfaitement ici l'organisation de l'écorce. L'enveloppe cellulaire, *a. c.*, offre quelques lacunes, *t*, répandues çà et là. Chaque couche du liber, séparée de la couche voisine par une lame de tissu cellulaire, *h*, est elle-même formée de plusieurs feuillets, également séparés par des lames de tissu cellulaire, *a*. Ces lames interposées paraissent même dans les fig. 3 et 4; mais le grossissement est trop faible pour qu'on y puisse apercevoir la nature du tissu, tandis qu'elle est évidente dans la fig. 5. Les rayons médullaires sont aussi fort apparents. Ils sont composés de cellules alongées vers la circonférence, et ils sont le prolongement des rayons médullaires du bois. Quant aux feuillets *v* des couches du liber, ils se composent, selon toute apparence, de tubes ou du moins de cellules très-longues, à parois épaisses, non criblées. Chaque tube est distinct des autres, et semble avoir sa paroi propre. On voit, dans mon dessin, une ligne tracée en hexagone autour de la section transversale des tubes. Cette ligne indique une interruption de continuité. Cependant la séparation n'est pas complète; il y a dans nombre de points une adhérence marquée entre les tubes. Je reviendrai bientôt sur ces faits.

k. i. Portion de la couche ligneuse de la troisième année. — *i. b.* Couche ligneuse de la quatrième année. — *n.* Gros vaisseaux du bois qui forment la limite la plus intérieure de la quatrième couche. — *o.* Petits vaisseaux du bois : ils sont distribués avec une sorte de symétrie dans l'intérieur des couches ligneuses. — *s.* Rayons médullaires du bois.

Observation. En général, plus les couches du bois sont

voisines du centre, plus elles sont dures; mais le tissu de chaque couche prise isolément, comme je l'ai dit page 107 de mes *Éléments de physiologie végétale*, est d'autant plus solide et plus compacte, qu'il est plus voisin de la circonférence, ce qui provient sans doute de ce que le tissu le plus interne se développe dans la saison où la température n'est pas encore parvenue à son *maximum* d'élévation, tandis que le tissu le plus externe se développe dans la saison la plus chaude de l'année. Ce résultat est exprimé fig. 5, couche ligneuse, *i. b.* On voit dans l'échantillon que j'ai dessiné, quatre zones ligneuses séparées par des séries de vaisseaux. La zone *w.* touche au liber. Les cellules alongées ont un très-petit calibre et des parois très-épaisses. Les cellules de la zone *x* qui vient ensuite ont un calibre un peu plus grand et des parois d'une moindre épaisseur. La grandeur du calibre et l'amincissement des parois augmentent encore dans la zone *y*, qui est la troisième, et dans la zone *z*, qui est la quatrième. Il est à remarquer que la tranche de chaque cellule de la zone *w* est circonscrite par une ligne hexagonale, qui indique une solution de continuité dans le tissu. Même chose a lieu dans les zones *x* et *y*, quoique d'une manière moins complète; mais, dans la zone *z*, il m'a été impossible d'apercevoir aucun indice de séparation des cellules; elles semblent former un tissu tout-à-fait continu. Les lignes hexagonales sont évidemment les *méats intercellulaires* de M. Tréviranus; mais en rendant toute justice au talent d'observation de ce savant naturaliste, je ne trouve jusqu'à présent aucune raison suffisante pour adopter son opinion sur la nature, l'origine et les fonctions des fentes dont il s'agit. Si je n'ai pas parlé de ces fentes dans mes Éléments de phy-

siologie, quoique je les aie figurées pl. 11, 12 et 13, c'est que je ne voulais rien hasarder sur ce sujet sans l'avoir étudié profondément. Mon anatomie de l'orme m'a fourni l'occasion de nouvelles observations; elles ne m'ont pas ramené au sentiment de M. Tréviranus. Ce savant pense que chaque cellule est originairement isolée de toutes les autres; que, par conséquent, les interstices sont d'organisation primitive; qu'ils ne disparaissent que par l'effet de la soudure des parois contiguës des cellules, et qu'ils sont les conduits naturels de la sève. Je crois au contraire qu'originairement les cellules forment un tissu continu; que les interstices ne sont que des fentes accidentelles, postérieures à la formation du tissu, et que la sève a pour conduits ordinaires les tubes criblés, les tubes fendus, et les tubes découpés en hélices. J'ai examiné la coupe transversale du bois de l'orme, à l'époque où il n'a encore que la consistance de la gomme ramollie dans l'eau. Le calibre des cellules était très-petit; leurs parois étaient très-épaisses, et je n'ai pu découvrir d'interstices dans leur épaisseur. J'ai tâché d'isoler les cellules, ce qui n'eût présenté aucune difficulté, si chacune d'elles avait eu sa paroi propre; mais elles se sont constamment divisées en masses. Quand j'ai observé des coupes de tissu un peu plus avancées, j'ai trouvé que le calibre des cellules s'était agrandi aux dépens des parois devenues plus minces; mais je n'ai reconnu l'existence des interstices que dans le tissu qui avait pris la consistance du bois parfait. Les interstices sont souvent interrompus, et jamais ils ne s'étendent tout autour d'une cellule ligneuse, de telle sorte qu'on puisse l'isoler des autres sans déchirement notable.

Voici comment je conçois la formation de ces fentes:

Soit donné deux cellules contiguës avec une paroi commune très-épaisse ; les deux faces de cette paroi se dessécheront et prendront de la consistance jusqu'à une certaine profondeur, avant que la partie la plus intérieure de sa substance ait perdu, par l'évaporation, toute son humidité primitive. Il s'ensuivra que les cavités des deux cellules ne pourront plus s'accroître, que la paroi ne pourra plus s'amincir, et que l'humidité de cette paroi continuant peu à peu à se dissiper, les molécules organiques tendront à se rapprocher, et qu'il s'opérera du milieu, vers les deux surfaces, un retrait de matière ; ce qui produira le déchirement que l'on observe dans l'épaisseur de la paroi. Si, par le moyen de l'eau bouillante ou de l'acide nitrique, on parvient quelquefois à isoler les cellules, qu'est-ce que cela prouve, sinon que la substance intérieure des parois résiste moins à l'action de ces dissolvants, que la lame superficielle qui limite l'étendue de chaque cavité ?

Les méats, ou, pour mieux dire, les interstices pariétaux du tissu ligneux de l'orme, fig. 5, se trouvent dans les zones *w*, *x* et *y*, et ne se trouvent plus dans la zone *z*. Je constate cette différence, sans pouvoir en donner une explication à l'épreuve de toute objection.

Cette différence entre les zones de la couche ligneuse *i. b.*, fig. 5, existe aussi entre les zones des couches *k. i.*, *l. k.* et *m. l.*, fig. 3. Il n'y a donc point d'interstices pariétaux dans le tissu ligneux formé au printemps, et il y en a dans le tissu ligneux formé en été. Je fais cette observation, sans me permettre d'en rien conclure.

Fig. 6. Autre fragment de la fig. 3.

m. Portion de la couche ligneuse de la première année qui est représentée tout entière fig. 3, entre les lettres *m. l.*

q. r. Portion de la moelle. — *p.* Place de l'étui médullaire.

Fig. 7. Le même fragment de la fig. 3, représenté fig. 6, grossi au point de faire voir le tissu organique dans ses moindres détails.

m. Portion de la couche ligneuse de la première année qui est représentée tout entière fig. 3, *m. l.* — *q.* Portion de la moelle qui est représentée tout entière fig. 3, *q. r.* — *s.* Rayons médullaires. — *a.* Trachées qui font partie de l'étui médullaire. — *r.* Portion de la moelle composée de cellules, dont les parois, très-épaisses, offrent des interstices pariétaux. — *t.* Tissu cellulaire de la moelle, dont les parois, très-minces, n'offrent point d'interstices.

Observation. Le tissu médullaire à parois épaisses, *r*, a une organisation très-remarquable. Les interstices pariétaux sont très-apparents; ils forment dans quelques endroits des vides triangulaires, et dans d'autres seulement des fentes linéaires. Quelquefois aussi ils n'existent pas, ou du moins il est impossible d'en constater l'existence. Les cavités cellulaires sont remplies de petits grains qui sont probablement de l'amidon. Ce tissu médullaire à parois épaisses est continu avec le tissu médullaire à parois minces, *t*, et le passage de l'un à l'autre tissu se fait brusquement.

Fig. 8. Coupe longitudinale radiale du fragment représenté fig. 5.

Observation. Le tissu organique dont la fig. 5 montre la coupe transversale est représenté ici dans sa longueur. Si l'on prend la peine de comparer les deux coupes fig. 5 et 8, on reconnaîtra bientôt les relations qu'elles ont entre elles, et l'on pourra se former une idée juste de la structure des diverses parties. Afin de rendre la comparaison plus facile, j'emploie les mêmes lettres dans les deux figures, pour indiquer les points correspondants.

a. b. Écorce. — *a. c.* Enveloppe cellulaire. — *b. c.* Liber. — *g.* Rayons médullaires qui traversent le liber. — *k. i.* Portion de la couche ligneuse de la troisième année. — *i. b.* Couche ligneuse de la quatrième année. — *n.* Gros vaisseaux du bois; ils forment la limite la plus intérieure de chaque couche ligneuse. Ce sont, comme on le voit, des vaisseaux criblés. Entre eux et le tissu environnant, la continuité est parfaite. — *a.* Petits vaisseaux du bois: ils ne diffèrent des gros vaisseaux que parce que leur calibre est plus petit. — *s.* Rayons médullaires du bois : ils sont formés par des lames de tissu cellulaire à parois épaisses, alongées du centre à la circonférence. — *w. x. y. z.* Les quatre zones de la quatrième couche du bois. La zone *z* s'est développée la première; la zone *y* la seconde, la zone *x* la troisième, la zone *w* la quatrième. Ces quatre zones, avec les vaisseaux petits et grands qui les séparent, composent la couche ligneuse de l'année *i. b.*

Observation. Le tissu ligneux qui forme les zones *w. x. y. z.*, est composé de cellules alongées qui se terminent en biseaux, ou en coin, ou en sommet de cône à l'un et à l'autre bout. Dans mes premiers écrits, j'avais donné à ce tissu le nom de *petits tubes ;* mais déja je reconnaissais leur structure cel-

lulaire. Voici la description que j'en ai donnée, en 1822, *Traité d'Anatomie et de Physiologie végétale,* tome I, p.. 70: « Les « petits tubes sont composés de *cellules unies les unes aux au-* « *tres, comme celles qui composent le tissu cellulaire;* mais, « dans le tissu cellulaire, les cellules ont un diamètre à peu « près égal dans tous les sens, tandis que, dans celui-ci, *les* « *cellules sont extrêmement alongées*, et forment de véritables « tubes dont les extrémités sont fermées, etc. » Il est évident que je ne me suis servi du mot tube qu'en considération de la longueur des cellules. Trois années après, en 1805, M. Decandolle, dans la troisième édition de la Flore française, dit, en parlant de ces mêmes cellules, qu'*elles s'alongent et forment des cellules tubulées.* Ce passage, ainsi que le suivant que je trouve dans l'Organographie du même auteur, imprimé vingt-deux ans après mon Traité d'Anatomie, s'accorde parfaitement avec ma description: « Les cellules alongées dans le sens « longitudinal sont assez différentes des précédentes (les « cellules arrondies), et se rapprochent même quelquefois par « leur forme des véritables vaisseaux » [Decand., Organogr., tome I, p. 15]. A moins de me citer textuellement, M. Decandolle ne pouvait entrer plus avant dans ma pensée; cependant il ajoute sans transition: « M. Mirbel avait décrit d'a- « bord les cellules alongées sous le nom de *petits tubes,* et les « avait considérées comme des modifications des vaisseaux; « mais il est évident, pour quiconque les aura observées, que « ce ne sont point des vaisseaux, car elles sont closes aux deux « extrémités; c'est pourquoi, dans les principes élémentaires « placés à la tête de la troisième édition de la *Flore fran-* « *çaise,* je les ai désignées sous le nom de *cellules tubulées*, « qui indique assez bien leur forme, et j'ai nommé tissu cel-

« lulaire alongé, celui qui en est composé. M. Rudolphi a eu « absolument la même manière de voir, et désigne ces cellules « sous le nom de cellules *alongées*. M. Mirbel a fini par adop- « ter la même opinion et a désigné la masse de cet organe, « d'abord sous le nom de *tissu cellulaire ligneux*, parce qu'il « se trouve en abondance dans le bois, puis sous celui de *tissu* « *cellulaire alongé* » [Decand., Organ., t. I, p. 15]. En lisant ce passage avec attention, ce que j'y découvre, c'est que M. Decandolle réclame, comme sa propriété, les noms de *cellules tubulées* et de *tissu cellulaire alongé*. Mais je n'ai pas fait emploi du premier nom, et j'ai vainement cherché le second dans la troisième édition de la *Flore française*. Les cavités dont il s'agit sont alongées en manière de tubes et closes comme des cellules; voilà ce que m'a donné l'observation, ce que j'ai dit, ce que M. Decandolle a répété. Que j'aie pensé d'abord qu'en considération de l'alongement de ces cavités, je pouvais les désigner sous le nom de *petits tubes*, et que M. Decandolle ait jugé depuis qu'en considération des cloisons qui séparent ces cavités les unes des autres, il convenait de les nommer *cellules tubulées*, je ne vois pas là-dedans quelle grande erreur j'ai commise, ni quelle découverte M. Decandolle a faite, puisque les faits s'accordent avec ma description, et que j'ai toujours indiqué les cellules et les tubes comme de simples modifications d'un même tissu membraneux et cellulaire.

Fig. 9. Coupe longitudinale radiale du fragment représenté fig. 7, grossi au point de faire voir le tissu organique dans ses moindres détails.

m. l. Portion de la couche ligneuse de la première année.—

q. r. Portion de la moelle. — *s.* Rayon médullaire. — *a.* Trachée qui fait partie de l'étui médullaire. — *q.* Portion de la moelle, composée de cellules dont les parois, très-épaisses, offrent des interstices pariétaux. — *r.* Tissu cellulaire de la moelle dont les parois, très-minces, n'offrent point d'interstices.

Observation. Cette coupe verticale montre très-distinctement, dans le tissu cellulaire à parois épaisses, les interstices pariétaux qui s'offrent sous un autre aspect dans la fig. 7, lettre *c.* Ces interstices sont fréquemment interrompus. Ils ne séparent point les cellules les unes des autres. Ils sont produits, comme je l'ai déja dit, par un simple retrait de la substance intérieure des parois, ce qui ne prouve en aucune façon l'isolement primitif des cellules.

Fig. 10. Coupe longitudinale tangentale du *liber.*

v et *v'*. Tubes grêles ou cellules très-alongées qui forment un réseau. — *g.* Mailles du réseau : elles sont remplies par le tissu cellulaire des rayons médullaires.

Observation. Les tubes grêles ou cellules alongées du réseau me paraissent représenter dans le liber les cellules alongées des couches ligneuses ; mais les interstices pariétaux du liber tendent davantage à séparer chaque tube. C'est pourquoi j'en ai figuré quelques-uns, dont les bouts sont isolés. Voyez *v'*. J'ai dessiné scrupuleusement ce que j'avais sous les yeux. Cependant la désunion de ces tubes n'est que partielle, et le tissu cellulaire environnant a une adhérence parfaite avec les tubes les plus extérieurs.

Fig. 11. Coupe longitudinale tangentale d'une couche ligneuse, dans la partie où il n'y a pas de vaisseaux.

a. Cellules alongées : elles constituent la portion la plus dense et la plus solide du bois. — *s.* Mailles du réseau ligneux, dans lesquelles sont logées les lames du tissu cellulaire qui courent du centre à la circonférence, et forment, sur la coupe transversale, les lignes de cellules que l'on nomme rayons médullaires.

Observation. Le tissu cellulaire de la partie des rayons médullaires qui traverse les couches ligneuses a des parois épaisses, tandis que le tissu cellulaire de la portion de ces mêmes rayons, qui traverse les couches du liber, a des parois minces. La continuité entre le tissu cellulaire alongé du bois et le tissu cellulaire des rayons médullaires ne saurait être mise en doute. Une union semblable existe entre les différentes parties du liber.

Fig. 12. Coupe longitudinale tangentale d'une couche de bois, dans la partie où il y a des vaisseaux d'une médiocre grosseur, partie indiquée fig. 5, lettre *o*.

o. Vaisseaux criblés. — *a.* Tissu cellulaire alongé qui entoure les vaisseaux. — *s.* Mailles du tissu ligneux, remplies par les rayons médullaires.

Observation. On remarque que les vaisseaux *o* sont coupés de distance en distance par des lignes diagonales *c*. Ces lignes ne sont autre chose que la tranche de cloisons qui partagent les tubes en cellules disposées bout à bout. Ainsi le nom de tubes ou de vaisseaux donné à ces cavités pourrait être remplacé sans aucun inconvénient par celui de *grandes cellules alongées et criblées ;* manière de considérer la structure de

ces vaisseaux, dans l'orme, qui s'accorde avec quelques observations que j'ai faites autrefois sur différentes espèces de végétaux.

Fig. 13. Coupe longitudinale tangentale d'une couche ligneuse, dans la partie où il y a de gros vaisseaux.

a. Tissu cellulaire alongé. — *s*. Mailles du tissu ligneux remplies par les rayons médullaires. — *n*. Gros vaisseaux criblés.

Observation. La surface *b* du vaisseau *n'* porte les débris des cellules alongées qui l'environnaient, et qui ont été enlevées en partie par la dissection. Il n'eût pas été possible de les séparer intégralement sans détruire le vaisseau; car les parois postérieures de ces cellules forment, par leur continuité, la paroi du gros vaisseau. Cela étant, cette paroi appartient également au vaisseau et aux cellules. Pour qu'il en fût autrement, il faudrait que le vaisseau *n'* et les cellules contiguës eussent des parois distinctes, et c'est ce qui n'est pas. Il y a donc des cellules alongées criblées. Mais pour trouver de telles cellules, il n'est pas nécessaire de les chercher autour des gros vaisseaux. Que l'on jette les yeux sur la figure 12, lettre *o'*, et l'on reconnaîtra qu'il existe des cellules séparées des gros vaisseaux, et qui sont criblées comme eux.

Le vaisseau n^2, offre sur sa paroi des zones ou bandes qui ne sont pas criblées. Déja, dans d'autres végétaux, j'avais remarqué quelque chose de semblable; mais je ne m'y étais pas arrêté avec une attention suffisante. Aujourd'hui, en y réfléchissant, je suis tenté de croire que ces zones indiquent la place qu'occupaient des cloisons intérieures qui divisaient la cavité en

cellules, et qui n'ont pu se maintenir quand le calibre du vaisseau s'est accru. J'ai imprimé quelque part qu'il n'était pas sans exemple que l'on trouvât de grands tubes obstrués par du tissu cellulaire.

Je remarque dans l'orme, entre le liber et le bois, des rapports dont je dois parler ici (voyez fig. 5, *b.c.* et *b.k.*). Le liber et le bois ont une même origine : ils proviennent du développement du cambium. Chaque couche de bois augmente le volume du corps ligneux ; chaque couche de liber, le volume de l'écorce : l'un et l'autre se forment par zones distinctes (voyez les zones *w.x.y.z.*). Chaque zone, dans le bois, est séparée de la zone voisine par un étui composé de vaisseaux (voyez *o*), qui livrent passage aux rayons médullaires. Chaque zone, dans le liber, est séparée par un étui de tissu cellulaire semblable au tissu de la moelle, et cet étui n'interrompt pas la marche des rayons médullaires. La ressemblance est frappante, quant à la distribution des parties; mais elle s'affaiblit, ou même elle disparaît, si nous comparons leur structure. Dans le liber, à la place qui correspond au tissu cellulaire alongé du bois, je trouve aussi des espèces de cellules ; cependant elles sont si longues et si distinctes les unes des autres, qu'on pourrait les considérer comme de petits tubes rapprochés, plutôt que comme un tissu continu, quoique j'aie de fortes raisons de croire qu'il existe entre elles de nombreux points d'adhérence. Toujours dans le liber, à la place qui correspond aux vaisseaux du bois (voy. *o*), je trouve un tissu cellulaire à cellules courtes et à parois très-minces. Ces analogies et ces différences fournissent, selon moi, des arguments pour démontrer que le végétal est, dans l'origine, formé essentiellement d'un simple tissu cellulaire,

qui subit des modifications diverses par l'effet des développements.

PLANCHE II.

Fig. 1re. Coupe transversale d'une petite branche de *tilia europæa*, dans sa première année. Grandeur naturelle.

Fig. 2. Fragment grossi de la coupe transversale représentée fig. 1.

a. Écorce. — *b*. Couche ligneuse. — *c*. Moelle. — *d*. Couche de liber traversée par les rayons médullaires *x*.

Observation. La branche fig. 1, étant à sa première année de végétation, n'a qu'une couche de liber, *d*, et qu'une couche de bois, *b*. La couche de liber est formée, comme dans l'orme, pl. 1, fig. 5, de plusieurs feuillets séparés par des lames de tissu cellulaire.

Fig. 3. Coupe transversale d'une petite branche de *tilia europæa*, dans sa seconde année. Grandeur naturelle.

Fig. 4. Fragment grossi de la coupe transversale représentée fig. 3.

c. Moelle. — *b*. Couche ligneuse de la première année. — *f*. Couche ligneuse de la seconde année. — *d*. Couche de liber de la première année. — *g*. Couche de liber de la seconde année.

Observation. La branche, fig. 4, étant à sa seconde année, a deux couches de liber, *d* et *g*, et deux couches de bois, *b* et *f*. La couche de bois *b*, la couche de liber *d*, sont le pro-

duit de la première année. Ces deux couches étaient d'abord appliquées l'une contre l'autre, comme on les voit fig. 2, *b* et *d;* mais, dans le cours de la seconde année, la couche de liber *d* s'est éloignée de la couche de bois *b* de toute l'épaisseur de la couche de bois *f*, et de la couche de liber *g*. La couche de liber, *d*, n'a pu se porter en avant, sans que les mailles de son réseau s'élargissent. Il suffit de comparer la couche de liber *d* de la figure 4, à la couche de liber *d* de la figure 2, pour reconnaître cet effet, qui devient plus sensible encore dans la fig. 6, et surtout dans la fig. 8; et l'on remarquera qu'en même temps que les mailles s'élargissent, le tissu cellulaire qui les remplit, et qui est la continuation des rayons médullaires *x*, devient plus abondant.

Fig. 5. Coupe transversale d'une petite branche de *tilia europæa* dans sa troisième année. Grandeur naturelle.

Fig. 6. Fragment grossi de la coupe transversale représentée fig. 5.

c. Moelle. — *b*. Couche de bois de la première année. — *f*. Couche de bois de la seconde année. — *h*. Couche de bois de la troisième année. — *d*. Couche de liber de la première année. — *f*. Couche de liber de la seconde année. — *i*. Couche de liber de la troisième année.

Observation. Les couches de liber de la première et de la seconde année, *d* et *g*, se sont portées en avant pour faire place à la couche ligneuse *h* et à la couche de liber *i*, produits de la troisième année. Par conséquent il y a eu écartement des mailles des couches de liber *d* et *g*, et multiplication des cellules qui forment le tissu des rayons médullaires *x*, comme je l'ai expliqué en parlant de la fig. 4.

Fig. 7. Coupe transversale d'une branche de neuf ans, de grandeur naturelle.

Fig. 8. Fragment grossi de la coupe transversale représentée fig. 7.

Observation. On voit dans cette figure, neuf couches de bois superposées, produit de neuf années consécutives ; cependant il n'est plus possible de distinguer les différentes couches de liber, quoiqu'il s'en soit formé une chaque année ; mais ce qui est bien apparent, c'est l'élargissement constant des mailles m, et le développement du tissu cellulaire des rayons x, à mesure que les couches se portent en avant. Si, après un certain nombre d'années, l'écorce du tilleul, comme celle des autres arbres, ne se détruisait pas à sa superficie, on trouverait encore dans un tilleul de cent ans des vestiges des couches de liber, formées dans les premières années.

Les sommets s des angles que forme le liber sur la coupe transversale fig. 8, appartiennent à la couche de la première année, indiquée n° 1. Ils sont représentés dans les fig. 2, 4 et 6 par une portion correspondante de liber s, prise sur la couche n° 1. La comparaison des fig. 2, 4, 6 et 8 fait voir clairement que cette couche de liber n° 1 s'est éloignée chaque année de la couche ligneuse n° 1, et qu'à mesure que cette couche de liber se portait en avant, il y avait élargissement de ses mailles m. En effet, si nous prenons pour exemple la maille m', nous la voyons s'élargir de plus en plus, à partir de la fig. 2 jusqu'à la fig. 8 ; et si nous faisons la dissection de la couche de liber n° 1, telle qu'elle se trouve dans la fig. 8, nous reconnaissons que l'élargissement de cette maille m' s'est opéré

sans déchirement du tissu; d'où il faut conclure qu'il y a eu, depuis la première année jusqu'à la neuvième, dans la couche de liber n° 1, croissance du tissu cellulaire alongé qui forme le réseau, et augmentation de la masse de tissu cellulaire régulier qui remplit ses mailles.

Ce raisonnement est applicable également aux couches de liber n°s 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, et à toutes celles qui se forment durant la vie d'un tilleul. Ainsi l'on peut dire que la masse du liber croît chaque année, non-seulement en épaisseur par l'addition de nouvelles couches, mais encore en ampleur, par la multiplication du tissu de chaque couche. C'est ce que j'ai établi en peu de paroles, mais fort clairement je pense, dans la note que j'ai publiée en 1816, et que je transcrirai tout à l'heure littéralement.

Il ne paraît pas que les mailles du réseau augmentent en nombre dans le tilleul. Du moins, si cet effet a lieu, il est insensible; car si nous rapprochons par la pensée les sommets *s* de la figure 8, nous trouverons que leur réunion ne forme pas une masse plus considérable que celle qui existe en *s*, fig. 2.

Fig. 9. Coupe transversale d'une portion d'écorce d'un jeune *prunus cerasus*. Cette écorce n'a en réalité que 2 lignes et demie d'épaisseur.

a. Couche dense et comme cornée, qui paraît être un parenchyme endurci. — *b*. Enveloppe herbacée : elle est verte à la circonférence; mais cette couleur s'affaiblit dans l'intérieur, et est remplacée par une teinte jaunâtre qui rougit au contact de l'air. — *d*. Liber : il forme un réseau d'autant plus lâche, qu'il approche davantage de la circonférence. Il ne se

sépare pas en feuillets, et, si l'on s'en tenait à l'aspect qu'il présente dans sa coupe transversale fig. 9, on pourrait croire qu'il est composé de lames qui partent du bois et se dirigent vers l'épiderme, en s'inclinant à leur extrémité de droite à gauche; mais la coupe longitudinale tangentale prouve que ce liber est réticulé, comme tous les autres.

Fig. 10. Coupe longitudinale tangentale du liber du *prunus cerasus*. On voit nettement le réseau dont le liber est composé.

Si, vers le milieu de septembre, on arrache l'écorce du *prunus cerasus*, une portion des rayons médullaires qui remplissaient les mailles du liber reste adhérente à la superficie du bois, et y paraît sous la forme de petites touffes de duvet.

Fig. 11. Coupe transversale d'une portion d'écorce et de bois du tronc d'un *quercus robur*, d'un pied de diamètre.

a. Anciennes couches du liber rejetées à la circonférence : elles sont mortes et desséchées. — *b*. Couches plus récentes du liber. — *c*. Couche régénératrice ou cambium. — *d*. Bois.

Fig. 12. Coupe transversale d'une portion d'écorce et de bois d'un *malus communis*, de 9 pouces de diamètre.

a. Partie morte. — *b*. Couche de parenchyme verdâtre. — *c*. Dix-neuf couches ou feuillets de liber. — *d*. Couche de bois commençant à se développer. — *e*. Bois parfait.

Observation. On aperçoit la trace des rayons médullaires; ils sont très-déliés. Comme les dix-neuf couches de liber sont

évidemment le produit de plusieurs années de végétation, et que pourtant, même dans les plus vieilles couches, *g*, voisines de la partie morte *a*, les mailles ne sont pas moins étroites que dans les plus jeunes couches, *f*, voisines du bois, puisque les faisceaux de cellules alongées, dont sont formées les mailles des 19 couches, se montrent partout sur la coupe transversale, également rapprochés; je conclus que, dans le *malus communis*, à mesure que les anciennes couches se portent en avant et par conséquent prennent plus d'ampleur, les mailles, au lieu de s'élargir, se multiplient. Cette multiplication des mailles ne paraît pas avoir lieu dans l'*ulmus campestris*, le *tilia europæa*, le *fagus sylvatica*, le *betula alba*, etc.

Fig. 13. Coupe transversale d'une portion d'écorce et de bois du tronc d'un *fagus sylvatica*, de quatre pouces de diamètre.

a. Écorce. — *b*. Bois. — *c*. Couches du liber.

Observation. Les angles que dessine le liber sur la coupe transversale font assez connaître que ses mailles s'élargissent et se portent en avant.

Je termine ce Mémoire en faisant remarquer que, dans son Organographie, M. Decandolle a parlé de mon opinion sur l'origine du liber et du bois sans en avoir pris une parfaite connaissance. Il s'exprime en ces termes, tome I, page 209 de l'ouvrage cité : « M. Mirbel, qui a répété l'expérience de Du-« hamel, a conclu d'abord que le liber se changeait en aubier, « *puis il dit seulement que le liber se partage entre l'écorce et le* « *bois.* » J'ignore où M. Decandolle a pris ce qu'il me fait dire, mais ce n'est assurément pas dans mes écrits. Lorsqu'il me

fut démontré que j'avais tiré une fausse conséquence de l'expérience de Duhamel, j'avouai mon erreur, et j'admis que *la partie de la couche de cambium qui touche à l'aubier se change insensiblement en bois, et que celle qui touche au liber se change insensiblement en liber.* Cette manière de voir, résultat d'un grand nombre d'observations, est reproduite par M. Decandolle, sous la garantie de M. Dutrochet, qui n'a écrit sur ce sujet que long-temps après moi. Voici comme M. Decandolle s'exprime, page 211 du même ouvrage : « Il se forme à la « fois une couche d'aubier et une couche d'écorce, simplement « juxtaposées entre elles, et qui commencent par offrir l'appa- « rence d'une simple gelée; mais cette gelée n'est point un « simple suc déposé, c'est une matière qui présente déja des « traces d'organisation et l'apparence d'un jeune tissu. » Pour cette définition du cambium, M. Decandolle renvoie à ma note du Bulletin de la Société philomatique, ce qui doit faire supposer qu'il l'a lue ; mais s'il l'a lue, comment n'y a-t-il pas trouvé mon opinion sur le développement du liber, et pourquoi attribue-t-il cette opinion à M. Dutrochet, de préférence à moi, et me prête-t-il des idées qui me sont étrangères?

Enfin M. Decandolle avance, p. 220, que « *M. Dutrochet* « *est* le premier *qui ait fait remarquer que, sous le nom d'ac-* « *croissement des troncs en diamètre, nous réunissons réelle-* « *ment deux phénomènes distincts, savoir: l'accroissement en* « *dilatation des couches déja existantes, qu'il appelle accrois-* « *sement en largeur, et l'addition de nouvelles couches, qu'il* « *appelle accroissement en épaisseur.* » J'observerai ici que M. Decandolle aurait pu voir, dans le Mémoire de M. Dutrochet, aussi bien que dans ma note, que c'est moi qui ai démontré *le premier*, l'accroissement en largeur du système cortical.

Je vais transcrire ma note, telle qu'elle a paru en 1816; tout lecteur éclairé jugera qu'une grande force d'attention n'était pas nécessaire pour en pénétrer le sens.

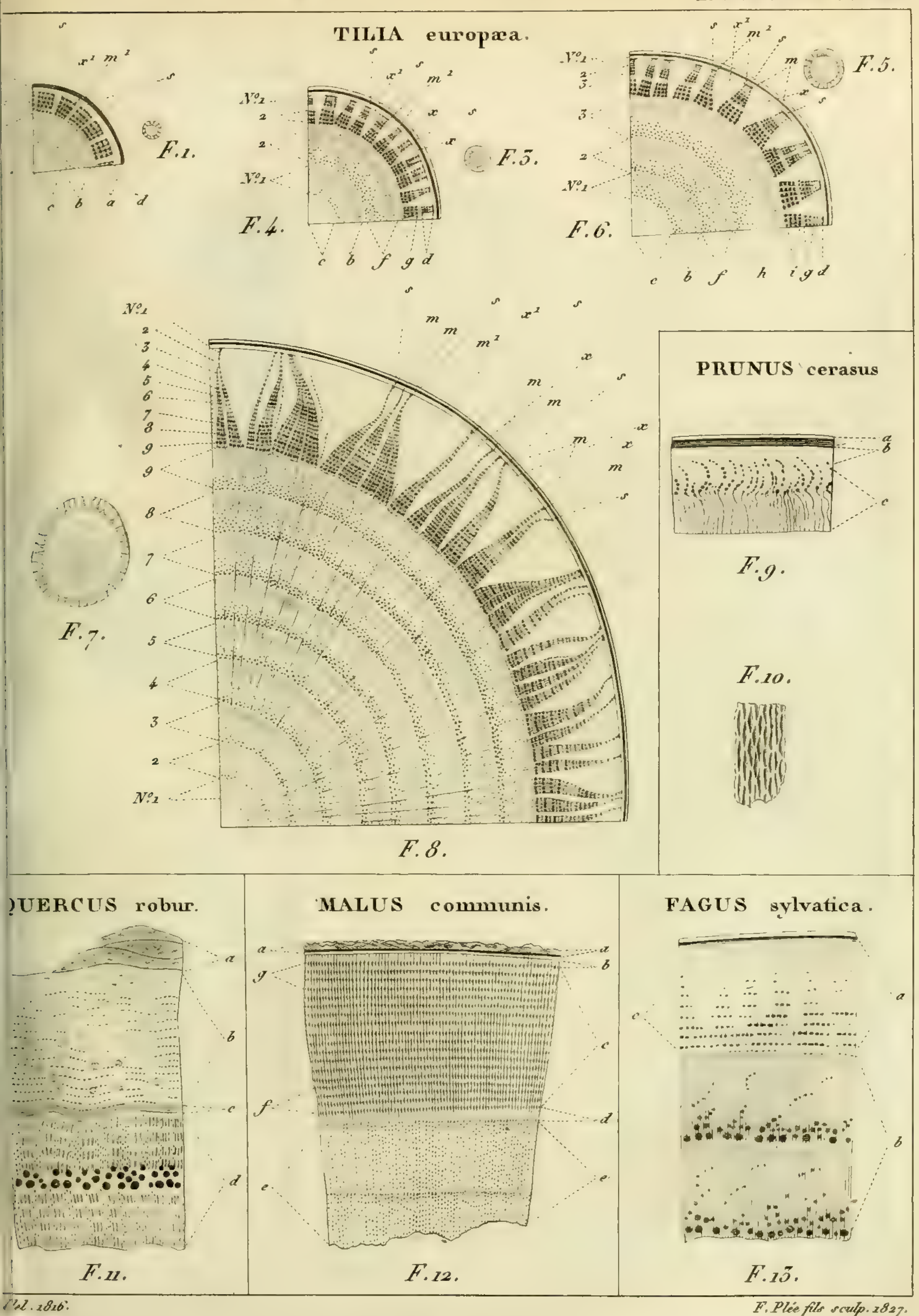
« J'ai long-temps soutenu que les feuillets du liber se trans-« formaient en bois. Parmi les anciens physiologistes, plu-« sieurs étaient de cet avis, d'autres le combattaient. Parmi « les physiologistes modernes, on a vu régner la même dissi-« dence dans les opinions. Entre ceux qui ont le plus forte-« ment combattu l'hypothèse que j'avais adoptée, je citerai « MM. du Petit-Thouars, Knight, Tréviranus et Keiser. Ils « avaient raison, j'étais dans l'erreur. Je déclare que mes der-« nières observations m'ont fait voir que le liber est constam-« ment repoussé à la circonférence, et que, dans aucun cas, « il ne se réunit au corps ligneux et n'augmente sa masse. J'é-« tais trop fortement préoccupé de l'opinion contraire pour y « renoncer sur de légères preuves: je suis donc maintenant « bien convaincu que *jamais le liber ne devient bois.*

« Il se forme, entre le liber et le bois, une couche qui est « la continuation du bois et du liber. Cette *couche régénéra-« trice* a reçu le nom de *cambium*. Le *cambium* n'est donc « point une liqueur qui vienne d'un endroit ou d'un autre: « c'est un tissu très-jeune qui continue le tissu plus ancien. Il « est nourri et développé par une sève très-élaborée. Le cam-« bium se développe, à deux époques de l'année, entre le bois « et l'écorce, au printemps et en automne. Son organisation « paraît identique dans tous ses points; cependant la partie « qui touche à l'aubier se change insensiblement en bois, et « celle qui touche au liber se change insensiblement en li-« ber. Cette transformation est perceptible à l'œil de l'obser-« vateur.

« Une question qui embarrasse les physiologistes, c'est de « savoir comment le *cambium*, substance de consistance muci- « lagineuse, a assez de force pour repousser l'écorce, et com- « ment, en la repoussant, il ne la désorganise pas totalement. « Le fait est que le *cambium* ne repousse point l'écorce. A « l'époque où il se produit, l'écorce elle-même tend à s'élar- « gir. Ses réseaux corticaux et son tissu cellulaire croissent; « il en résulte qu'elle devient plus ample dans tous ses points « vivants. Il se développe à la fois du tissu cellulaire régulier « et du tissu cellulaire alongé. La partie la plus extérieure « de l'écorce, la seule qui soit désorganisée par le contact « de l'air et de la lumière, et qui, par conséquent, ne puisse « plus prendre d'accroissement, se fend, se déchire et « se détruit. Elle seule est soumise à l'action d'une force « mécanique; le reste se comporte d'après les lois de l'or- « ganisation. En s'élargissant, l'écorce permet au *cambium* « de se développer; il forme alors, entre l'écorce et le bois, la « couche régénératrice, qui fournit en même temps un nou- « veau feuillet de liber et un nouveau feuillet de bois. La « couche régénératrice établit la liaison entre l'ancien liber et « l'ancien bois, et si, lors de la formation du *cambium*, l'é- « corce paraît tout-à-fait séparée du corps ligneux, ce n'est « pas, je pense, qu'il en soit réellement ainsi, mais c'est que « les nouveaux linéaments sont si faibles, que le moindre « effort suffit pour les rompre.

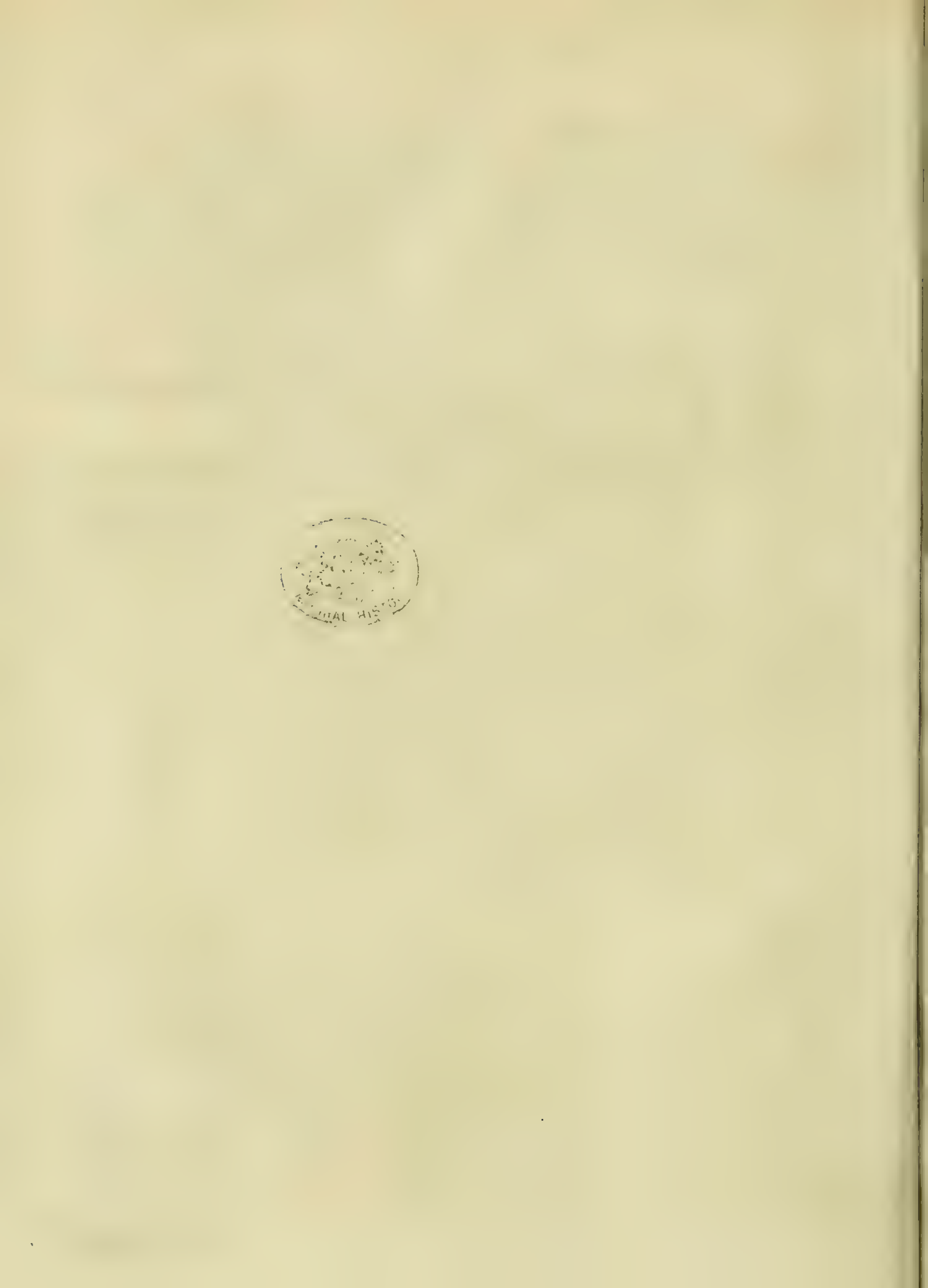
« L'accroissement du liber est un phénomène de toute évi- « dence. Dans le tilleul, les mailles du réseau s'élargissent, « mais ne se multiplient point, et le tissu cellulaire, renfermé » dans les mailles, devient plus abondant. Dans le pommier, « les mailles du réseau se multiplient et se remplissent d'un

« nouveau tissu cellulaire. Les écorces des différents genres « d'arbres, quoique ayant essentiellement la même structure, « offrent néanmoins des modifications assez remarquables « pour qu'elles méritent l'attention des physiciens. J'ai fait « sur ce sujet des recherches très-approfondies; j'ai disséqué « et dessiné le *tilia europæa*, le *castenea vesca*, le *betula al-* « *ba*, le *corylus avellana*, le *carpinus betulus*, le *populus* « *tremula*, l'*ulmus campestris*, le *fagus sylvatica*, le *quercus* « *robur*, le *prunus cerasus*, le *malus communis*, et j'ai noté « plusieurs différences très-curieuses. » [Mirbel, *Bulletin de la Société philomatique*, 1816, page 107.]

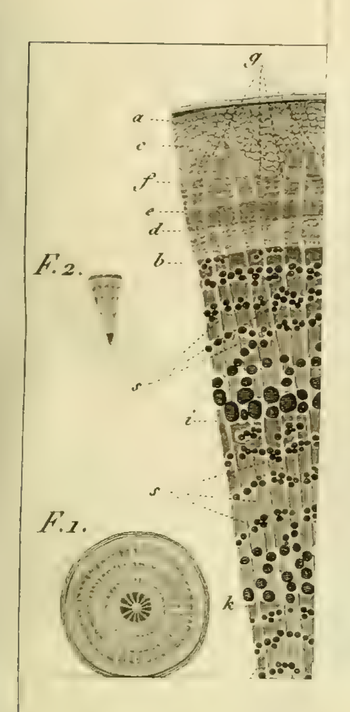


Del. 1816. F. Plée fils sculp. 1827.

Planche 2.



ANATOMIE



ANATOMIE D'UNE JEUNE BRANCHE D'ULMUS CAMPESTRIS.

(Orme commun.)

F. 1. F. 2. F. 3. F. 4. F. 5. F. 6. F. 7. F. 8. F. 9. F. 10. F. 11. F. 12. F. 13.

Michel del. 1816.

Planche 1.

TROISIÈME MÉMOIRE

SUR

LES CANAUX DE NAVIGATION,

CONSIDÉRÉS SOUS LE RAPPORT DE LA CHUTE ET DE LA DISTRIBUTION DE LEURS ÉCLUSES;

PAR M. P. S. GIRARD.

Lu à l'Académie Royale des Sciences, le 30 juin 1823.

(1) LA théorie que j'ai développée dans mes deux précédents Mémoires établit les relations qui existent entre la chute des écluses, la hauteur d'immersion des bateaux qui les traversent, la dépense d'eau occasionnée par leur passage, et enfin, les relations qui existent entre toutes ces quantités, et l'élévation ou l'abaissement du niveau de l'eau dans les biefs successifs que ces bateaux parcourent.

Il résulte de cette théorie, non-seulement que le transport d'un poids déterminé de matières se fera sur un canal quelconque avec une consommation d'eau d'autant moindre que la chute de ses écluses sera moindre elle-même, mais encore que, dans certains cas, l'on pourra, par le seul fait de la circulation des bateaux sur ce canal, faire remonter un certain

volume d'eau de ses biefs inférieurs dans son bief culminant.

Il reste, par conséquent, démontré qu'en opérant sur la chute des écluses une réduction convenable, on peut obtenir telle économie que l'on voudra sur la consommation d'eau que la navigation exige; et cette économie est la première de toutes celles qu'on doit rechercher, puisque, par elle seule, il devient possible d'ouvrir des communications navigables à travers des contrées où l'on serait forcé de renoncer à jamais à l'avantage de ces communications, si, pour les entretenir, il fallait un volume d'eau supérieur à celui que la nature y a mis à notre disposition.

(2) Cependant, quelque importante que soit l'économie d'eau sur les canaux de navigation, ce n'est pas la seule qu'on doive se proposer; l'étendue des sacrifices, auxquels il est permis de se déterminer pour l'obtenir, n'est point sans limite. Si, par exemple, dans cette vue, l'on dépensait des capitaux dont les intérêts fussent plus considérables que les revenus du canal, tels qu'on en aurait joui en se conformant, dans son exécution, aux règles pratiques qu'on a suivies jusqu'à présent, on conçoit qu'il serait avantageux de s'en tenir à ces règles; et notre théorie, sans rien perdre de la rigueur mathématique qui la caractérise, se rangerait parmi ces vérités spéculatives qu'il est toujours bon de connaître, mais qui n'ont d'application utile aux besoins de la vie sociale que dans des circonstances hypothétiques, ou, du moins, dans un nombre de cas très-restreints.

(3) Ces réflexions ont dû se présenter naturellement à l'esprit de ceux qui n'ont point eu l'occasion ou la volonté d'approfondir la matière, et ils ont dit :

Puisque l'économie d'eau que produirait l'adoption de la

nouvelle théorie des canaux navigables n'est due qu'à la réduction de chute de leurs écluses, et que, d'un autre côté, par l'effet de cette réduction, le nombre de ces écluses devient nécessairement plus grand entre deux points fixes, n'est-il pas à craindre, en multipliant ainsi ces ouvrages, d'augmenter tellement les dépenses de leur construction, que le montant n'en excède l'évaluation, que l'on peut toujours faire en argent, du volume d'eau qu'on aura économisé?

Cette objection mérite d'être examinée, et c'est à sa discussion qu'est exclusivement consacré le Mémoire que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

(4) L'établissement d'un canal de navigation exige l'exécution de deux sortes d'ouvrages:

Les uns sont relatifs aux fouilles, et aux mouvements de terre indispensables à la formation de son lit, suivant la distribution de sa pente et la section transversale qui lui est assignée; les autres, que l'on désigne généralement par la dénomination d'*ouvrages d'art,* consistent principalement en écluses, ponts, aquéducs, etc.

Les écluses seront les seuls ouvrages d'art que nous considérerons ici.

(5) Les fouilles et les mouvements de terre que nécessite l'ouverture d'un canal présentent ordinairement moins de difficultés que les ouvrages de maçonnerie et de charpente; mais ils exigent toujours une quantité de travail, ou de journées d'homme, c'est-à-dire une dépense d'argent plus ou moins considérable. Il convient donc de rechercher, d'abord, comment la chute et la distribution des écluses peuvent influer sur la dépense des *terrassements* d'un canal quelconque, entre deux points déterminés de sa longueur.

(6) Nous supposerons que la pente du terrain est uniforme entre ces deux points; ce qu'on pourra toujours admettre, sans sortir des cas qui se présentent le plus ordinairement.

Représentons, par la ligne AB [*fig.* 1re, nos 1, 2 et 3], le profil développé du terrain dans la direction d'une portion de canal.

La droite AL étant une ligne de niveau, il s'agit de racheter la pente totale LB du terrain donné au moyen d'un certain nombre d'écluses ab, cd, ef, de chutes égales.

La position de ces écluses, par rapport à la ligne de niveau, peut être assignée d'après une multitude de conditions, parmi lesquelles il faut distinguer les trois suivantes, dont toutes les autres se rapprochent plus ou moins:

1° Celle d'établir le lit du canal $bcde$ au-dessous du sol naturel, c'est-à-dire entièrement en déblai d'une écluse à l'autre; et alors la pente du terrain entre les deux extrémités d'un bief quelconque est rachetée par l'écluse d'*amont* de ce bief [*fig.* 1re, n° 1];

2° Celle d'établir le lit du canal au-dessus du terrain naturel, c'est-à-dire entièrement en remblai [*fig.* 1re, n° 2], et alors la pente d'un bief est rachetée par son écluse d'aval;

3° Enfin, celle d'établir le lit du canal, partie en déblais et partie en remblais; et, dans ce cas, il convient, comme il est aisé de s'en assurer, de rendre le cube de ceux-ci égal au cube de ceux-là : alors la pente d'un bief se trouve rachetée également par les deux écluses qui le terminent.

(7) La section transversale du canal étant supposée constante et rectangulaire, faisons :

La largeur constante du canal $=l$, la chute d'une écluse $=x$, la pente du profil AB sur l'unité de longueur $=c$.

Il est évident que la distance comprise entre deux écluses consécutives sera :

$$\frac{x}{c},$$

et que le cube des déblais à effectuer pour le creusement du bief *abc* [*fig.* 1re, n° 1] sera exprimé par

$$\frac{lx^2}{2c}.$$

Il est encore évident que cette masse de déblais doit être extraite de la fouille et transportée au dehors, à une certaine distance sur chaque rive, ce qui exige un nouveau travail, dont nous faisons abstraction ici pour plus de simplicité.

Le cube des remblais, dont le canal est supposé formé [*fig.* 1re, n° 2], sera également représenté par

$$\frac{lx^2}{2c}.$$

Enfin, dans le troisième cas [*fig.* 1re, n° 3], le cube des déblais et celui des remblais d'un même bief *bc* étant égaux entre eux, et proportionnels aux triangles *abo* et *ocd*, seront l'un et l'autre représentés par

$$\frac{lx^2}{8c}.$$

Et leur somme

$$\frac{lx^2}{4c}$$

ne se trouvera que la moitié du déblai ou du remblai total, dont les biefs *bc* sont formés [*fig.* 1re, nos 1 et 2].

(8) Attendu l'avantage *de moindre fouille*, qu'on obtient en faisant le déblai égal au remblai dans la longueur du bief

bc [*fig.* 1[re], n° 3], nous nous en tiendrons exclusivement à la considération de ce cas particulier.

Nous supposerons de plus, pour rendre cet avantage le plus grand possible, que le déblai abo servira à former le remblai ocd; le cube de la fouille à faire dans l'étendue entière du bief bc se réduira en effet alors à

$$\frac{lx^2}{8c}.$$

Mais le produit de cette fouille devant être employé en remblai, et transporté horizontalement à la distance

$$\frac{2x}{3c}$$

qui mesure l'intervalle des centres de gravité des deux triangles abo et ocd, ce transport exigera, en excédant de la dépense de force nécessaire pour opérer la fouille et la charge de la masse

$$\frac{lx^2}{8c},$$

une autre dépense de force évidemment représentée par

$$\frac{lx^2}{8c} \times \frac{2x}{3c}.$$

Faisant donc :

Le prix de la fouille et charge de l'unité de masse des terrassements.................................... $= p'$,

Le prix du transport de cette unité de masse sur l'unité de l'espace parcouru horizontalement....... $= p''$,

La dépense en argent des terrassements d'un bief quelconque sera exprimée par

$$\frac{lx^2}{8c}\left(p' + p'' \cdot \frac{2x}{3c}\right).$$

(9) Si maintenant l'on fait:

La pente totale BL, d'une portion donnée AB de canal. . . . . $=a$,

Le nombre des écluses d'égale chute qui doivent racheter cette pente. . . . . $=n$,

Enfin, la dépense en argent des terrassements de la portion donnée de canal AB. . . . . $=y$,

On aura la formule:

$$y=\frac{nlx^2}{8c}\left(p'+p''.\frac{2x}{3c}\right),$$

ou bien, à cause de $nx=a$,

$$y=\frac{alx}{8c}\left(p'+p''.\frac{2x}{4c}\right);$$

équation qui appartient à une parabole facile à construire, et de laquelle on conclut immédiatement que la dépense des terrassements nécessaires à l'établissement d'un canal de navigation diminue dans un plus grand rapport que le carré de la chute des écluses au moyen desquelles la pente entière de ce canal est rachetée.

(10). Nous n'avons point besoin de dire que les grandes tranchées au fond desquelles un canal doit être creusé quand il coupe une butte, de même que les hautes levées qui doivent soutenir son lit quand il traverse des vallées, sont des ouvrages, pour ainsi dire, hors de ligne, sur la dépense desquels la chute et la distribution des écluses ne peuvent exercer d'influence, le tracé du canal une fois arrêté.

Il faut toujours, quelque parti qu'on prenne sur la distribution de ces écluses, se déterminer à franchir, à l'aide de déblais ou de remblais plus ou moins considérables, les mon-

ticules et les vallons qu'on rencontre dans sa direction; ce n'est qu'après avoir descendu les uns ou élevé les autres à une hauteur convenable, et avoir en quelque sorte substitué au terrain naturel des plaines une plate-forme factice, que les règles déduites de quelque théorie que ce soit sur la construction des canaux peuvent trouver leur application.

(11) Faisant donc abstraction de ces déblais et remblais extraordinaires, qui deviennent inévitables dans certaines circonstances, nous disons, conformément à ce qui vient d'être démontré : 1° que la dépense des terrassements d'un canal de navigation est nécessairement variable suivant le mode de distribution et la chute de ses écluses;

2° Que cette dépense, en tant qu'elle provient de la fouille des terres, est proportionnelle à la chute partielle des écluses, ou ce qui revient au même, en raison inverse du nombre d'écluses établies pour racheter une pente donnée entre deux points fixes;

3° Que cette dépense, en tant qu'elle provient du mouvement des terres et de la transformation des déblais en remblais, parallèlement à l'axe du canal, est proportionnelle au carré de la chute partielle des écluses, ou, ce qui revient au même, en raison inverse du carré du nombre des écluses entre deux points donnés, de sorte que cette partie de la dépense devient quatre fois moindre quand la même pente est rachetée par un nombre d'écluses double.

D'où nous tirons cette conclusion générale que la réduction de chute des écluses qui procure, dans le service journalier de la navigation sur un canal, une économie d'eau dont nous avons précédemment assigné les limites, procure aussi, dans les dépenses de la fouille et du transport des terres néces-

saires au premier établissement de ce canal, une très-grande économie.

(12) Après avoir assigné les relations qui existent entre la dépense des terrassements d'un canal et la hauteur de chute de ses écluses, nous allons rechercher les relations qui existent entre cette hauteur de chute et la dépense de construction des écluses elles-mêmes.

Cette dépense de construction dépend des dimensions que l'on donne aux diverses parties de chaque écluse, et ces dimensions doivent être déterminées de manière à garantir la stabilité de cette espèce d'appareil en le rendant capable de résister aux efforts qui tendent à le détruire ou seulement à en altérer la forme.

(13) Les écluses des canaux de navigation rentrent, en effet, comme nous l'avons fait voir ailleurs, dans la classe des machines par l'intermède desquelles, à l'aide d'un certain volume d'eau qui tombe d'une hauteur donnée, on peut élever à la même hauteur, des fardeaux plus ou moins considérables; mais les écluses ont ce caractère particulier, que les efforts auxquels leurs diverses parties sont soumises ont une plus grande valeur pendant la suspension que pendant la durée de leur manœuvre, tandis qu'au contraire les pièces matérielles qui entrent dans la composition de la plupart des appareils destinés à transmettre ou à régler le mouvement, n'éprouvent jamais qu'au moment même de leur emploi, le plus grand effort auquel elles ont à résister.

(14) Les projections horizontales et verticales d'une écluse à sas sont représentées [*fig.* 2 et 3]. La première de ces projections est un espace rectangulaire compris entre deux parois fixes A B C D de maçonnerie ou de charpente [*fig.* 4 et 5],

érigées parallèlement à la direction du canal et entre deux portes perpendiculaires à cette direction *e f* et *g h*; mobiles autour d'axes verticaux projetés en *e* et *g*.

L'espace *e f g h* compris entre les portes *e f*, *g h* et les parois A B, C D, représente le plan du sas de l'écluse, et il doit être, comme on sait, rendu égal, autant que possible, à la projection horizontale des plus grands bateaux par lesquels le canal est fréquenté.

Les deux lignes *i* S, *lm* [*fig.* 3 et 5] sont, dans le plan vertical, les deux traces du fond du canal en amont et en aval de l'écluse.

(15) L'usage s'est conservé jusqu'à présent de prolonger le fond du bief supérieur dans l'intérieur du sas, et de le raccorder avec le bief inférieur par un mur de chute qui s'élève verticalement à une petite distance en arrière de la porte d'amont.

On se trouve obligé ainsi d'établir cette porte sur un massif de maçonnerie dont la dépense de construction augmente proportionnellement à la chute x des écluses.

On vient d'avoir l'heureuse idée de supprimer ce massif et le mur de chute qui le termine, en opérant au dehors de l'écluse le raccordement des deux biefs au moyen d'un plan incliné S V [*fig.* 3 et 5].

Pour mettre ce plan incliné à l'abri des dégradations, il doit être recouvert d'un pavage de maçonnerie ou d'un revêtement de pièces de charpente.

(16) Quant au plafond de l'écluse A B C D, compris entre ses murs verticaux AB, DC et ses épaulements d'amont et d'aval B B′, A A′, il doit être formé d'un radier ou massif de maçonnerie ou de charpente N O [*fig.* 3 et 5], qui, se liant à

la partie inférieure des murs verticaux de l'écluse pour ne former qu'un seul corps avec eux, doit être rendu tout-à-fait imperméable à l'eau.

(17) Tels sont, réduits à leur plus grande simplicité, les différents ouvrages dont une écluse à sas se compose; mais ce qui la constitue essentiellement, ce sont les deux portes *ef, hg*, par la manœuvre desquelles on intercepte ou on livre à volonté le passage du canal aux bateaux, et les pertuis *rs*, *r' s'* qui servent à introduire l'eau du canal de l'amont à l'aval de ces portes, de quelque manière d'ailleurs que ces pertuis soient pratiqués.

Il est évident, en effet, que le sas, compris entre les portes d'une écluse, peut varier dans sa capacité et le mode de sa construction, suivant qu'on est plus ou moins intéressé à économiser l'eau nécessaire à l'entretien de la navigation.

Ce sas pourrait être formé, par exemple, d'une partie de canal capable de contenir un ou plusieurs bateaux. Dans ce système de sas, qui est sans doute le plus simple de tous, on serait dispensé d'en revêtir les parois; mais alors le passage des bateaux entraînerait une dépense inutile d'eau et de temps qu'il importe toujours d'économiser.

(18) Nous allons maintenant assigner les dépenses en argent des divers ouvrages que nous venons de définir, d'après les dimensions qu'il convient de donner à chacun d'eux pour les rendre capables de résister aux efforts qu'ils supportent, en ne faisant varier, dans cette recherche, que la chute des écluses, dont la longueur et la largeur seront supposées constantes.

En général les prix des ouvrages dont il s'agit s'évaluent par la masse de ces ouvrages : ainsi le prix de la charpente

et de la maçonnerie s'estime au mètre cube, celui de la serrurerie au poids du fer, etc.

(19) Cela posé, faisons le prix réduit de l'unité de masse des portes d'écluse.. $=p'$

Leur prix total.. $=P'$

Le prix réduit de l'unité de masse des revêtements du sas et des bajoyers des deux portes........... $=p''$

Leur prix total.. $=P''$

Le prix réduit de l'unité de masse du radier des chambres de ces portes, et du sas................ $=p'''$

Leur prix total.. $=P'''$

Enfin comme ci-dessus, la chute de l'écluse..... $=x$.

Nous aurons d'abord les trois équations :

$$P'=p'F'(x)$$
$$P''=p''F''(x)$$
$$P'''=p'''F'''(x),$$

dans lesquelles les quantités $F'(x)$, $F''(x)$, et $F'''(x)$ représentent les masses respectives des portes d'écluses, des revêtements du sas et des radiers, déterminées d'après la condition d'équilibre, entre les efforts qui s'exercent contre ces portes, ces revêtements, et ce radier, et la résitance que ces différentes parties de l'écluse opposent à ces efforts.

La dépense totale d'une écluse sera donc :

$$\text{(I)}\ldots P'+P''+P'''=p'F'(x)+p''F''(x)+p'''F'''(x).$$

(20) Supposons maintenant que la pente totale a d'une portion de canal comprise entre deux points fixes soit rachetée par un nombre n d'écluses ayant toutes la même chute x, on

aura :

$$n = \frac{a}{x},$$

et la dépense de construction de toutes les écluses à établir sur cette portion de canal sera :

$$n.(\mathrm{P}' + \mathrm{P}'' + \mathrm{P}''') = \frac{a}{x}\left[p'\mathrm{F}'(x) + p''(x) + p'''\mathrm{F}'''(x)\right],$$

laquelle variera selon les valeurs de x, parmi lesquelles celle donnée par l'équation

$$(\mathrm{II}) \ldots . \; d.\left\{\frac{a}{x}\left[p'\mathrm{F}'(x) + p'\mathrm{F}''(x) + p'''\mathrm{F}'''(x)\right]\right\} = 0,$$

rendra évidemment la dépense $n\,(\mathrm{P}' + \mathrm{P}'' + \mathrm{P}''')$ la moindre possible, condition que nous nous proposons de remplir.

(21) La profondeur du canal étant un des principaux éléments des quantités que nous avons à déterminer, nous remarquerons, avant d'aller plus loin, qu'il faut entendre ici, par l'expression *profondeur du canal*, non pas la verticale comprise entre l'arête de sa berge et son plafond, mais la hauteur d'eau qu'il contient, laquelle a pour limite le plus grand tirant d'eau des bateaux qui doivent y naviguer. L'élévation des berges au-dessus du niveau de l'eau est, en effet, une sorte de dimension accessoire que l'on peut augmenter ou diminuer suivant les localités, sans que les circonstances purement relatives à la navigation en soient autrement modifiées. Cette élévation *arbitraire* des berges au-dessus de la surface de l'eau du canal ne peut donc être introduite parmi les quantités dont les rapports nécessaires constituent la théorie mathématique des canaux navigables.

(22) Cela posé, faisant la longueur de l'écluse... $=\mathrm{L}$
Sa largeur.............................. $=l$
La profondeur du canal..................... $=h$,

Les épaisseurs moyennes { des portes............. $=z'$, des revêtements........ $=z''$, du radier............ $=z'''$,

nous aurons

$$\mathrm{F}'(x)=2l(h+x)z',$$
$$\mathrm{F}''(x)=2\mathrm{L}(h+x)z''$$
$$\mathrm{F}'''(x)=l\mathrm{L}z'''.$$

L'équation (II) deviendra, par l'introduction de ces valeurs,

$$\text{(III)}\quad d\left\{\frac{a}{x}[2lp'(h+x)z'+2\mathrm{L}p''(h+x)z''+l\mathrm{L}p'''z''']\right\}=0,$$

dans laquelle il ne s'agit plus que de substituer aux quantités z', z'', z''', leurs expressions en fonctions de x, déduites de la condition de l'équilibre entre les efforts qui tendent à opérer la rupture ou seulement à altérer la stabilité des portes, des revêtements du sas, et du radier, et les résistances que ces diverses parties de l'écluse opposent à ces efforts.

(23) *Portes.* Les biefs supérieurs et inférieurs étant supposés pleins, comme ils le sont quand le canal est en activité, la charge d'eau que soutient la porte d'amont du côté du sas contre-balance en partie l'action de l'eau du bief supérieur contre cette même porte. En établissant, pour cet état de choses, l'équation d'équilibre entre la résistance de cette porte et l'effort qui tend à la rompre, on obtiendrait donc pour l'épaisseur z' une valeur qui serait trop faible dans tous les

cas où le bief supérieur restant plein, on serait obligé de mettre le bief inférieur à sec. Des circonstances accidentelles peuvent amener ce cas, le rendre même plus ou moins fréquent; c'est donc dans cette hypothèse que l'épaisseur moyenne des portes doit être déterminée, car il n'y a aucune distinction à faire entre celle d'amont et celle d'aval, puisque par la suppression du mur de chute, elles sont rendues d'une égalité parfaite, et que les efforts, auxquels elles peuvent être exposées, sont absolument les mêmes.

(24) Il faut considérer la porte dont nous cherchons l'épaisseur comme formée de pièces horizontales soutenues, à leurs extrémités, contre deux appuis ou feuillures e et f [*fig.* 2]. Ainsi elle se confondra avec un barrage à poutrelles, qui serait établi entre le bief supérieur et le sas. Il est évident qu'en la supposant fermée, et en faisant abstraction de la mobilité qui doit lui être donnée par des moyens convenables, elle se réduit, en effet, à un semblable barrage. Il nous serait facile, au surplus, si ce n'était pas nous écarter de l'objet de ce Mémoire, de montrer ici comment un pareil système d'éléments horizontaux peut être rendu mobile sans rien perdre de la solidité de son assemblage.

Rappelons-nous maintenant que, par les principes de statique, l'effort qui tend à rompre en son milieu, suivant un plan vertical, la porte d'écluse qui s'appuie sur ses deux feuillures e et f, a pour expression, en nommant π' la pesanteur spécifique de l'eau,

$$\frac{\pi' l^2}{16}(\lambda + x)^2.$$

On a d'ailleurs, par les théorèmes connus sur la résistance des solides, pour l'expression de la résistance de la porte

dans son plan de rupture

$$kz'z'(h+x),$$

k étant un coefficient constant déduit de l'expérience, l'équation d'équilibre est donc :

$$\frac{\pi' l^2}{16}(h+x)^2 = kz'z'(h+x),$$

d'où l'on tire immédiatement

$$z' = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{\pi'}{k}(h+x)}\,;$$

valeur qui, substituée dans l'expression de la dépense des deux portes, la transforme en celle-ci :

$$(\mathrm{IV})\ldots \mathrm{P}' = p'\mathrm{F}'(x) = 2lp'(h+x)\frac{l}{4}\sqrt{\frac{\pi'}{k}(h+x)}\cdot$$

(25) *Bajoyers et murs de sas.* Passons maintenant à la recherche de l'épaisseur moyenne z'' du revêtement du sas et des chambres des portes.

Quand le sas est rempli, la poussée de l'eau contre les revêtements du dedans au dehors de l'écluse contre-balance une partie de la poussée des terres qui agit contre ces mêmes revêtements dans une direction diamétralement opposée : ce cas est le plus favorable ; mais comme on est obligé quelquefois de vider le sas entièrement, ses revêtements, que nous supposerons de maçonnerie, doivent être assimilés à des murs de soutènement destinés à résister à la poussée des terres qui forment le terre-plain de l'écluse. Ce cas, dans lequel

ils sont soumis au plus grand effort qui puisse s'exercer contre eux, est donc le seul auquel il convienne de nous arrêter ici.

(26) La poussée des terres contre les obstacles qu'on leur oppose a été, depuis la fin du dix-septième siècle, l'objet de plusieurs théories et d'expériences nombreuses qu'il est hors de notre sujet de rapporter. Nous nous bornerons à rappeler qu'en faisant abstraction de la cohésion et du frottement qui retiennent les couches de terre les unes aux autres le long des plans inclinés, suivant lesquels elles tendent à glisser, et en supposant la pression horizontale qu'exerce contre le mur de soutènement sur l'unité de longueur le prisme de terre de plus grande poussée.................... $=Q$,

La pesanteur spécifique de ces terres .... $=\pi''$,

La pesanteur spécifique de la maçonnerie dont ce mur est construit.............................. $=\pi'''$,

Nous aurons d'abord, conformément aux théories de MM. Coulomb et Prony, lorsque la hauteur du mur est $h+x$,

$$Q=\pi''\frac{(h+x)^2}{2},$$

et, pour le moment de cette pression,

$$Q\,\frac{(h+x)}{3}=\pi''\frac{(h+x)^3}{6}.$$

En second lieu, si, pour augmenter les chances de stabilité du mur de soutènement, nous négligeons toutes les résistances qu'il oppose à la poussée des terres, autres que celle

qui provient de son propre poids, nous aurons

$$\frac{\pi''' z'' z''}{2}(h+x)$$

pour le moment de sa résistance au mouvement de rotation auquel il est sollicité autour de son arête intérieure, immédiatement au-dessus de sa fondation.

L'équation d'équilibre est donc

$$\pi'' \frac{(h+x)^3}{6} = \frac{\pi''' z'' z''}{2}(h+x);$$

d'où l'on tire

$$z'' = (h+x)\sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}};$$

valeur qui, substituée dans l'expression de la dépense des murs de sas et des bajoyers, donne

$$(\mathrm{V}) \ldots\ldots \mathrm{P}'' = p''\mathrm{F}''(x) = 2\mathrm{L}p''(h+x)^2\sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}}.$$

(27) *Radiers.* Il nous reste à déterminer l'épaisseur z''' du radier entre les deux extrémités de l'écluse.

Supposant toujours le bief supérieur rempli d'eau et le bief inférieur entièrement vide, on conçoit que l'eau dont la porte d'amont se trouverait chargée pourrait s'écouler au-dessous de cette porte, si le seuil contre lequel elle s'appuie ne présentait point une résistance suffisante, et ne faisait lui-même partie d'un massif imperméable et continu.

Il est essentiel d'établir ce massif sur un terrain solide, avec lequel il puisse se lier d'une manière intime; mais, dans la recherche de l'épaisseur qu'il convient de lui donner, il faut

supposer le cas le plus défavorable, celui où l'eau du bief supérieur se serait introduite entre le terrain naturel sur lequel l'ouvrage est assis, et le massif dont il s'agit.

(28) Or, dans cette hypothèse, on voit que la lame d'eau, qui est supposée s'être introduite entre le sol naturel et le dessous du radier, exerce, pour soulever celui-ci, un effort exprimé par

$$\pi' L l (h + x + z''').$$

Mais le radier oppose à son soulèvement par cet effort:

1° Son propre poids $= \pi''' L l z'''$;

2° Son adhérence aux soubassements des deux bajoyers opposés.

Dans la pratique ordinaire des constructions, les plans de joints, suivant lesquels s'exerce cette adhérence, se coupent en une ligne horizontale placée au-dessus du radier.

Ce radier se trouve ainsi encastré entre les deux bajoyers opposés comme un coin renversé, ce qui, en le supposant incompressible suivant sa largeur, augmente indéfiniment sa résistance au soulèvement vertical auquel il est sollicité par les eaux du bief supérieur.

Afin de soumettre cette résistance au calcul dans le cas le plus défavorable, nous supposerons cependant que le radier et les bajoyers adhèrent entre eux par des joints verticaux remplis de mortier.

(29) Maintenant, nommant a le poids capable de contrebalancer l'adhérence des mortiers sur l'unité de superficie, il est évident que la résistance du radier à son soulèvement,

en tant qu'elle provient de l'adhérence dont il s'agit, sera $2aLz'''$.

On aura donc pour l'équation d'équilibre entre les efforts opposés,

$$\pi' Ll(h+x+z''')=\pi''' Llz''' + 2aLz''';$$

d'où l'on tire

$$z'''=\frac{l\pi'(h+x)}{2a+l(\pi'''-\pi')},$$

valeur qui, substituée dans l'expression de la dépense du radier, donne

$$\text{(VI)}.......P'''=p''' F'''(x)=\frac{l\pi' p'''(h+x)}{2a+l(\pi'''-\pi')}.$$

(30) Remplaçons maintenant dans la formule (III) les quantités z', z'' et z''' par les valeurs que nous venons de trouver pour chacune d'elles ; et faisant ensuite

$$\frac{Ll^2\pi' p'''}{2a+l(\pi'''-\pi')}=A$$

$$\frac{2l^2p'}{4}\sqrt{\frac{\pi'}{k}}=B$$

$$2Lp''\sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}}=C;$$

elle deviendra

$$\text{(VII)}...d\left\{\frac{a}{x}\left[A(h+x)+B(h+x)^{\frac{3}{2}}+C(h+x)^2\right]\right\}=0,$$

et, après la différenciation,

$$\text{(VIII)}...Ah+B\left(\frac{2h-x}{2}\right)\sqrt{h+x}+C(h^2-x^2)=0.$$

C'est par conséquent de la solution d'une équation du

quatrième degré, qu'on tirera la valeur de la chute x propre à réduire au *minimum* la dépense de construction d'un certain nombre d'écluses égales, destinées à racheter une pente donnée entre deux points fixes d'un canal de navigation.

(31) On a dû remarquer que, pour obtenir l'expression (III) de la dépense de construction des bajoyers et murs de sas, nous avons formé l'équation d'équilibre entre leur résistance et la poussée du terre-plain de l'écluse, en supposant que l'axe horizontal, autour duquel les murs de sas et les bajoyers tendaient à se mouvoir, était placé dans le plan supérieur de leurs fondations : cette supposition nous a permis de considérer l'ouvrage, abstraction faite des fondations sur lesquelles il doit être érigé. Cependant, comme l'établissement de ces fondations peut être quelquefois l'occasion de dépenses considérables, il convient de montrer, avant d'aller plus loin, jusqu'à quel point la théorie peut servir à les évaluer, et comment la formule générale (VIII), à laquelle nous venons de parvenir, se trouverait modifiée par l'introduction de cette évaluation.

(32) L'objet des fondations est, comme on sait, de suppléer au défaut de consistance du sol naturel sur lequel les constructions doivent être assises. On conçoit, d'après cela, que le mode de les établir et la profondeur à laquelle on doit les descendre dépendent du degré de fermeté du terrain et de sa nature; elles rentrent ainsi au nombre des ouvrages dont il est impossible de prévoir d'avance les dimensions, et par conséquent la valeur. Ce qu'on peut affirmer généralement, c'est que les dépenses à faire pour l'établissement des fondations sont d'autant plus considérables, qu'on est obligé de les établir plus profondément : en effet, cette nécessité

n'exige pas seulement l'exécution d'une plus grande hauteur de maçonnerie, elle amène encore la chance de découvrir au fond des fouilles des sources d'eau plus ou moins abondantes, dont l'épuisement peut entraîner des dépenses au-dessus de toute appréciation préalable.

(33) Mais si la dépense totale qu'occasionne la fondation d'une écluse ne peut être assignée d'avance à l'aide de la théorie, et si par ce motif elle n'est pas de nature à figurer dans nos formules (VII) et (VIII), il est du moins incontestable que quelques-uns des éléments qui la composent peuvent y être introduits.

Considérons, par exemple, le cube de la maçonnerie qui forme cette fondation.

Il est évident d'abord que sa largeur perpendiculaire à l'axe de l'écluse doit toujours être proportionnelle à l'épaisseur moyenne des murs auxquels elle sert de base.

Quant à son épaisseur verticale, on conçoit qu'elle ne peut jamais être moindre que celle des radiers qui s'y appliquent suivant leur longueur.

En ayant égard à ces remarques, et en nommant p^{iv} le prix de l'unité de masse des fondations, et m un coefficient constant, on aura, pour l'expression de la moindre dépense nécessaire à la fondation d'une écluse,

$$2 . \mathrm{L} p^{iv} m z'' z''' = 2 \mathrm{L} p^{iv} \frac{m l \pi'}{2a + l(\pi''' - \pi')} \sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}} (h + x)^2 ;$$

d'où l'on voit que cette dépense, proportionnelle comme celle des bajoyers et murs de sas au carré de leur hauteur $(h + x)$, peut être introduite dans nos formules générales (VII) et (VIII) sans leur faire changer de forme : il ne s'agira, en ef-

fet, que d'y supposer le coefficient constant,

$$C=2L\sqrt{\frac{\pi'}{3\pi'''}}\left(p''+mp^{\text{iv}}\frac{\pi' l}{2a+l(\pi'''-\pi')}\right).$$

(34) Reprenons maintenant la formule

$$(\text{VIII})\ldots\ldots Ah+B\frac{(2h-x)}{2}\sqrt{h+x}+C(h^2-x^2)=0,$$

et remarquons que le second terme de son premier membre se rapporte à la dépense des portes de l'écluse : or cette dépense est toujours très-faible, eu égard à celle des revêtements verticaux et du radier. Ce second terme peut donc, sans inconvénient sensible, être négligé dans notre formule, qui devient alors

$$Ah+C(h^2-x^2)=0;$$

d'où l'on tire immédiatement

$$(\text{IX})\ldots\ldots\ldots x=\sqrt{h^2+\frac{Ah}{C}};$$

équation qui montre que le rapport de la chute des écluses de *moindre dépense*, à la profondeur des canaux sur lesquels elles sont construites, est le même que celui des coordonnées d'une hyperbole équilatère.

(35) Enfin, si, comme il est permis de le faire dans quelques circonstances, on néglige la dépense des radiers, notre formule (VIII) se réduira à

$$(\text{X})\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=h;$$

d'où il suit que la chute des écluses de *moindre dépense*, en bajoyers et murs de sas seulement, est précisément égale à la profondeur du canal.

(36) Dans la détermination de l'épaisseur moyenne z'' des revêtements verticaux de l'écluse, nous avons fait abstraction de la cohésion qui retient les couches de terre les unes aux autres, et de leur frottement tant sur elles-mêmes que sur la face postérieure des murs contre lesquels elles s'appuient; enfin de l'adhérence des mortiers qui entrent dans la composition de la maçonnerie. Nous avons ainsi obtenu pour la dimension z'', qu'il s'agissait de déterminer, une valeur plus grande que celle qu'on obtiendrait en tenant compte des diverses causes de résistance que nous avons négligées. Cette hypothèse, plus favorable qu'aucune autre à la stabilité des ouvrages, conduit encore, par les calculs les plus simples, aux résultats les plus faciles à retenir, et, sous ce double rapport, elle nous paraît plus qu'aucune autre applicable à la matière.

(37) Nous avons supposé jusqu'à présent que les revêtements du sas et les bajoyers des écluses étaient construits en maçonnerie. Lorsque des canaux traversent des pays boisés, ou des terrains d'alluvion dépourvus de carrières, il peut devenir plus économique d'exécuter ces revêtements et ces radiers en charpente. Nous allons rechercher quelle doit être alors la chute des écluses propres à racheter la pente d'une portion donnée de canal avec la moindre dépense possible.

Ces revêtements en charpente sont formés de montants verticaux, mn, $m'n'$, $m''n''$, etc. [*fig.* 4 et 5], également espacés entre eux et servant d'appui à des cours de madriers horizontaux lh, contre lesquels s'exerce la poussée du terre-plain de l'écluse : le revêtement en charpente est donc composé d'un certain nombre de travées mn, $m'n'$, $m'n'$, $m''n''$, etc., toutes égales entre elles, et dont par conséquent chacune

soutient une portion égale de la poussée du terre-plain de l'écluse.

(38) Les écluses de maçonnerie et de charpente étant composées des mêmes parties, nous aurons une expression générale de la dépense de celles-ci, précisément semblable à l'expression de la dépense de celles-là. Il faudra seulement substituer aux dépenses $p'F'(x)$, $p''F''(x)$, $p'''F'''(x)$ des portes, des revêtements, et des radiers de maçonnerie, les dépenses analogues $p_{\prime}F_{\prime}(x)$, $p_{\prime\prime}F_{\prime\prime}(x)$, $p_{\prime\prime\prime}F_{\prime\prime\prime}(x)$ des portes, des revêtements et des radiers de charpente, en observant que les dépenses $p_{\prime}F_{\prime}(x)$ et $p'F'(x)$ de la construction des portes sont les mêmes dans les deux hypothèses; on aura ainsi les formules:

$$(\text{XI})\ldots\ldots P_{\prime}+P_{\prime\prime}+P_{\prime\prime\prime}=p_{\prime}F_{\prime}(x)+p_{\prime\prime}F_{\prime\prime}(x)+p_{\prime\prime\prime}F_{\prime\prime\prime}(x);$$

$$(\text{XII})\ldots\ldots d.\left\{\frac{a}{x}[p_{\prime}F_{\prime}(x)+p_{\prime\prime}F_{\prime\prime}(x)+p_{\prime\prime\prime}F_{\prime\prime\prime}(x)]\right\}=0;$$

dans lesquelles il n'y a plus qu'à substituer aux quantités $F_{\prime}(x)$, $F_{\prime\prime}(x)$, $F_{\prime\prime\prime}(x)$ les masses des portes, des revêtements et du radier, déterminées par les équations d'équilibre entre les résistances de ces trois parties de l'ouvrage, et les efforts auxquels elles sont respectivement soumises.

(39) Conservons pour les dimensions de l'écluse les dénominations que nous leur avons précédemment assignées, et désignons par $p_{\prime}p_{\prime\prime}p_{\prime\prime\prime}$ les prix de l'unité de masse de charpente des portes, des revêtements et du radier.

Faisons de plus:

L'épaisseur moyenne des portes .... $= z_{\prime}$,

Les distances mm' et nn' des montants des revêtements et des entre-toises du radier.......... $= s$,

Leur largeur parallèle à l'axe de l'écluse ...... $= b$,

L'épaisseur d'un des montants mn .... $= z_{\prime\prime}$,
Celle des madriers auxquels ils servent d'appui. $= Z_{\prime\prime}$,
L'épaisseur d'une des entre-toises nq .... $= z_{\prime\prime\prime}$,
Celle des madriers du radier .... $= Z_{\prime\prime\prime}$.

La distance du milieu d'un montant mn et de l'entre-toise nq [*fig.* 5 et 4] au milieu du montant $m'n'$, et de l'entre-toise $n'q'$, immédiatement consécutifs .... $= s+b$,

Le nombre de travées comprises d'une tête de l'écluse à l'autre sera .... $= \frac{L}{s+b}$.

Enfin, le nombre des montants et des entre-toises........................ $= \frac{L}{s+b} + 1$.

Cela posé, on trouve aisément

$$F_{\prime}(x) = 2l(h+x)z_{\prime};$$
$$F_{\prime\prime}(x) = 2(h+x)\left[\left(\frac{L}{s+b}+1\right)bz_{\prime\prime} + LZ_{\prime\prime}\right];$$
$$F_{\prime\prime\prime}(x) = l\left[\left(\frac{L}{s+b}+1\right)bz_{\prime\prime\prime} + LZ_{\prime\prime\prime}\right];$$

et par conséquent, en faisant les réductions convenables:

$$\text{(XIII)}\quad d\left\{\frac{a}{x}\left\{2p_{\prime}l(h+x)z_{\prime} + b\left(\frac{L}{s+b}+1\right)(2p_{\prime\prime}(h+x)z_{\prime\prime} + lp_{\prime\prime\prime}z_{\prime\prime\prime}) + L(2p_{\prime\prime}(h+x)Z_{\prime\prime} + p_{\prime\prime\prime}lZ_{\prime\prime\prime})\right\}\right\} = 0;$$

de laquelle, après avoir substitué aux épaisseurs $z_{\prime\prime}$ et $Z_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime\prime}$ et $Z_{\prime\prime\prime}$ les valeurs qui leur conviennent, on tirera la valeur de x, propre à rendre la dépense cherchée $P_{\prime}+P_{\prime\prime}+P_{\prime\prime\prime}$ la moindre possible.

(40) *Portes.* Nous avons, comme ci-dessus (24),

$$z_{,}=\frac{l}{4}\sqrt{\frac{\pi'}{k}(h+x)}.$$

(41) *Revêtements verticaux.* L'effort horizontal des terres contre la portion de madriers $mm'\ nn'$, comprise entre deux poteaux montants consécutifs, pour rompre ces madriers en leur milieu suivant un plan vertical, a pour expression, comme il est aisé de s'en assurer,

$$\pi''\frac{(h+x)^2}{2}\ \frac{(s+b)^2}{8}.$$

La résistance de ce panneau de madriers dans son plan de rupture est

$$kZ_{,,}Z_{,,}(h+x),$$

k étant le même coefficient donné par l'expérience que nous avons déja employé (24). On a donc cette première équation d'équilibre

$$\pi''\left(\frac{h+x}{2}\right)^2\left(\frac{s+b}{8}\right)^2=kZ_{,,}Z_{,,}(h+x);$$

d'où l'on tire

$$Z_{,,}=\frac{(s+b)}{4}\ \frac{\sqrt{\pi''(h+x)}}{k}.$$

La pression des terres sur le panneau $mm'\ nn'$ de madriers se répartit également sur les deux poteaux montants mn et $m'n'$, entre lesquels il est renfermé; mais comme chacun des poteaux intermédiaires $m'n'$ supporte aussi la demi-pression qui a lieu contre le panneau contigu $m'n'\ m''n''$, la charge entière de chacun d'eux est en effet exprimée par

$$\pi''\frac{(h+x)^2}{2}(s+b),$$

et son effort pour opérer la rupture du poteau montant à son extrémité inférieure, en le supposant libre par en haut, sera

$$\pi'' \frac{(h+x)^3}{6}(s+b).$$

La résistance à cette rupture est

$$k z_{\prime\prime} z_{\prime\prime} b.$$

On a donc cette seconde équation d'équilibre :

$$\pi'' \frac{(h+x)^3}{6}(s+b) = k z_{\prime\prime} z_{\prime\prime} b;$$

d'où l'on tire

$$z_{\prime\prime} = (h+x)\sqrt{\frac{\pi''(s+b)(h+x)}{6kb}}.$$

(42) *Radier*. L'eau que nous supposons s'être introduite du bief supérieur sous le plancher de madriers formant le radier du sas, exerce verticalement de bas en haut, pour rompre en son milieu, suivant la largeur de l'écluse, l'un quelconque des panneaux qu'ils forment entre deux entre-toises consécutives, un effort exprimé par

$$\frac{\pi' l (h+x)(s+b)^2}{8}.$$

On a d'ailleurs, pour la résistance de ce panneau dans son plan de rupture,

$$k Z^2_{\prime\prime\prime} l;$$

et par conséquent, cette troisième équation d'équilibre,

$$\frac{\pi' l (h+x)(s+b)^2}{8} = k Z^2_{\prime\prime\prime} l,$$

qui donne

$$Z_{\prime\prime\prime}=\frac{(s+b)}{2}\sqrt{\frac{\pi'(h+x)}{2k}}.$$

Enfin, la pression verticale de l'eau contre un panneau quelconque du radier se répartissant également de part et d'autre sur chaque entre-toise qui sépare deux panneaux consécutifs, l'effort pour rompre l'une quelconque de ces entre-toises sera

$$\frac{\pi' l^2}{4}\frac{(h+x)(s+b)}{2};$$

mais sa résistance a pour expression

$$k z_{\prime\prime\prime} z_{\prime\prime\prime} b:$$

on a donc cette quatrième équation d'équilibre;

$$\frac{\pi' l^2}{4}\frac{(h+x)(s+b)}{2}=k z_{\prime\prime\prime} z_{\prime\prime\prime} b;$$

d'où l'on tire

$$z_{\prime\prime\prime}=\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\pi'(h+x)(s+b)}{2bk}}.$$

Substituons dans l'équation (XIII) les valeurs de $Z_{\prime\prime} z_{\prime\prime}$ $Z_{\prime\prime\prime} z_{\prime\prime\prime}$ que nous venons de trouver, en observant que les poteaux montants et les entre-toises de l'extrémité de l'écluse ne doivent rigoureusement avoir que la moitié de la largeur des autres; ce qui donne

$$\frac{L}{s+b}$$

pour le nombre des poteaux montants et les entre-toises de la largeur b, et faisons

$$2\frac{p_{\prime\prime} b L}{s+b}\sqrt{\frac{\pi''}{k}\frac{(s+b)}{6.b}}=A,$$

$$\frac{2p_{,}l^{2}}{4}\sqrt{\frac{\pi'}{k}}+2\mathrm{L}p_{,,}\frac{(s+b)}{4}\sqrt{\frac{\pi''}{k}}=\mathrm{B},$$

$$l\left[p_{,,,}\frac{l}{2}\left(\frac{\mathrm{L}}{s+b}\right)\sqrt{\frac{\pi'}{k}\frac{(s+b)}{2b}}+\mathrm{L}p_{,,,}\frac{(s+b)}{2}\sqrt{\frac{\pi'}{2k}}\right]=\mathrm{C};$$

Elle se présentera sous cette forme :

$$(\mathrm{XIV})..\ d\left\{a\sqrt{\frac{h+x}{x}}\left[\mathrm{A}(h+x)^{2}+\mathrm{B}(h+x)+\mathrm{C}\right]\right\}=0,$$

d'où l'on tire, après avoir effectué la différentiation indiquée ,

$$(\mathrm{XV})\quad \mathrm{A}(x-2h)(h+x)^{2}+\mathrm{B}(x-2h)(h+x)-(x+2h)\mathrm{C}=0;$$

ainsi, la valeur de x dépend de la solution d'une équation du troisième degré.

(43) Si, comme nous l'avons fait plus haut, en traitant des écluses de maçonnerie, on néglige ici la dépense des portes, le coefficient constant B se réduira à un seul terme :

$$2p_{,,}\mathrm{L}\frac{(s+b)}{4}\sqrt{\frac{\pi''}{k}},$$

sans que d'ailleurs la formule (XV) subisse aucune altération.

(44) Nous nous bornerons, dans ce qui va suivre, à la seule dépense des revêtements verticaux et des radiers des écluses de charpente.

On a supposé jusqu'à présent que la distance $s+b$ des poteaux montants du revêtement du sas et des entre-toises était donnée *à priori*. Cependant, quand aucune condition indispensable ne détermine cette distance, il y a une observation importante à faire.

Il est évident en effet que, pour une profondeur de canal et pour une chute quelconque, la poussée des terres contre

un panneau ou travée de madriers $mn\ m'n'$, et par conséquent contre les poteaux montants du revêtement qui le soutiennent, sera d'autant moindre, que ces poteaux seront placés à une moindre distance les uns des autres ; mais en même temps le nombre des travées deviendra plus considérable sur la longueur de l'écluse. Il y a donc *un espacement* de poteaux et d'entre-toises qui rend le cube, et par conséquent le prix de ces travées le moindre possible, en supposant, ce qui s'écartera toujours peu de la vérité, $p_{\prime\prime}=p_{\prime\prime\prime}$: cet espacement doit donc être déterminé préalablement d'après cette condition.

(45) Le cube de la charpente qui entre dans la construction des revêtements verticaux et du radier de l'écluse a pour expression :

$$\text{(XVI)}\ldots\frac{bL}{s+b}\left\{\begin{array}{l} 2(h+x)^2\sqrt{\frac{\pi''}{k}\frac{(s+b)(h+x)}{6b}} \\ +\frac{l^2}{2}\sqrt{\frac{\pi'}{k}\frac{(s+b)(h+x)}{2b}} \end{array}\right\} + L\left\{\begin{array}{l} 2\frac{(h+x)}{4}(s+b)\sqrt{\frac{\pi''}{k}(h+x)} \\ +\frac{l}{2}(s+b)\sqrt{\frac{\pi'}{k}\frac{(h+x)}{2}} \end{array}\right\}$$

regardant $h+x$ comme une quantité constante et faisant

$$bL\left\{\begin{array}{l} 2(h+x)^2\sqrt{\frac{\pi''}{k}\frac{(h+x)}{6.b}} \\ +\frac{l^2}{2}\sqrt{\frac{\pi'}{k}\frac{(h+x)}{2b}} \end{array}\right\}=M;$$

$$L\left\{\begin{array}{l} 2\frac{(h+x)}{4}\sqrt{\frac{\pi''}{k}(h+x)} \\ +\frac{l}{2}\sqrt{\frac{\pi'}{k}\frac{(h+x)}{2}} \end{array}\right\}=N;$$

ce cube deviendra

$$\frac{M}{\sqrt{s+b}}+N(s+b);$$

et, par la condition du *minimum*,

$$-\frac{M}{2(s+b)^{\frac{3}{2}}}+N=0,$$

d'où l'on tire l'espacement cherché :

$$(s+b)=\left(\frac{M}{2N}\right)^{\frac{2}{3}};$$

substituant cette valeur de $(s+b)$ dans l'expression du cube de charpente que nous venons de trouver, nous aurons :

$$\text{(XVII)} \ldots\ldots\ldots \frac{M}{\sqrt{s+b}}+N(s+b)=\frac{3}{2}(2NM^2)^{\frac{1}{3}}.$$

(46) Le prix de toutes les écluses qui rachèteront la pente de la portion donnée du canal sera donc

$$\frac{ap_{\prime\prime}}{x}\left(\frac{3}{2}(2NM^2)^{\frac{1}{3}}\right);$$

et l'on aura, par la condition du *minimum* de dépense,

$$\text{(XVIII)} \ldots\ldots d.\left[\frac{ap_{\prime\prime}}{x}\left(\frac{3}{2}(2NM^2)^{\frac{1}{3}}\right)\right]=0;$$

d'où l'on tire

$$(\text{XIX}) \ldots\ldots\ldots x = \frac{3\text{MN}}{\text{M}\frac{d\text{M}}{dx} + 2\text{N}\frac{d\text{M}}{dx}}.$$

Enfin, substituant aux quantités

$$\text{M}, \text{N}, \frac{d\text{M}}{dx}, \frac{d\text{N}}{dx}$$

leurs valeurs, on parviendra, toutes réductions faites, à une équation du quatrième degré, d'où l'on tirera la valeur de x.

(47) Cette détermination devient beaucoup plus simple, en faisant abstraction de la dépense du radier.

Alors, en effet,

$$\text{M} = b\text{L}\left(2(h+x)^2\sqrt{\frac{\pi''(h+x)}{k.6b}}\right)$$

$$\text{N} = \text{L}.\left((h+x)\sqrt{\frac{\pi''}{k}\frac{(h+x)}{4}}\right);$$

et, par conséquent,

$$3\text{MN} = 3b\frac{\text{L}^2\pi''}{k}(h+x)^4\sqrt{\frac{1}{6b}}$$

$$\frac{\text{M}d\text{N}}{dx} = \frac{3b\text{L}^2}{2}\frac{\pi''}{k}(h+x)^3\sqrt{\frac{1}{6b}}$$

$$2\text{N}\frac{d\text{M}}{dx} = \frac{10b\text{L}^2}{2}\frac{\pi''}{k}(h+x)^3\sqrt{\frac{1}{6b}},$$

donc,

$$\frac{3\text{MN}}{\frac{\text{M}d\text{N}}{dx} + \frac{2\text{N}d\text{M}}{dx}} = x = 6.\frac{(h+x)}{13},$$

donc enfin,

$$(\text{XX}) \ldots\ldots\ldots x = \frac{6h}{7}.$$

(48) Nous avons trouvé précédemment, pour la chute propre à rendre la dépense des bajoyers et murs de sas d'une écluse de maçonnerie la moindre possible,

$$(\text{X}) \ldots\ldots\ldots \quad x = h.$$

Ces deux expressions de x, qui sont de la plus grande simplicité, montrent que, pour réduire au *minimum* la dépense de construction des revêtements verticaux d'une suite d'écluses de maçonnerie ou de charpente destinées à racheter une pente donnée, *la chute de ces écluses ne doit jamais surpasser la profondeur d'eau du canal sur lequel elles sont construites.*

(49) On connaît d'ailleurs, par nos précédents Mémoires, le rapport qui existe entre la dépense d'eau de ces écluses, leur chute et le plus grand tirant d'eau des bateaux qui les traversent, c'est-à-dire la profondeur du canal. On pourra donc toujours, dans des circonstances données, déterminer cette chute de manière à concilier l'économie dans la construction des ouvrages avec l'économie d'eau nécessaire à la navigation; car celle-ci est comme celle-là susceptible d'une évaluation en argent.

(50) L'équation

$$(\text{V}) \ldots\ldots\ldots \text{P}'' = 2\text{L}p''(h + x)^2 \sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}},$$

exprimant, comme on l'a vu, la dépense de construction des bajoyers et des murs de sas d'une écluse de maçonnerie, il est clair que l'on aura, pour la dépense y d'un nombre n d'écluses égales, destinées à racheter la pente a entre deux points fixes d'un canal de navigation :

$$nP''=y=\frac{a}{x}\left(2Lp''(h+x)^2\sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}}\right),$$

ou plus simplement en faisant $2Lp''\sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}}=c$,

$$y=\frac{ac}{x}(h+x)^2;$$

équation dont les deux membres sont entre eux comme les coordonnées d'une hyperbole : ainsi, à la même dépense y correspondent toujours deux valeurs inégales de la chute x.

Supposant, par exemple, $x=\frac{1}{2}h$, et $x=2h$, on trouve également :

$$y=\frac{9}{2}ach.$$

Ainsi, la dépense de construction de quatre écluses, ayant chacune pour chute la demi-profondeur du canal, serait la même que la dépense de construction d'une seule écluse qui aurait pour chute le double de cette profondeur.

(51) En général, si à une seule écluse dont la chute est x, on substitue un nombre n d'écluses dont la chute soit $\frac{x}{n}$, on aura, pour la dépense de l'écluse unique,

$$P''=2Lp''(h+x)^2\sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}},$$

et pour la dépense de n écluses qui rachètent la même pente,

$$(P'')=2Lp''n\left(h+\frac{x}{n}\right)^2\sqrt{\frac{\pi''}{3\pi'''}}.$$

Supposant

$$P''=(P''),$$

on aura

$$(h+x)^2 = n\left(h+\frac{x}{n}\right)^2;$$

d'où l'on tire

$$x = h\sqrt{n};$$

expression de la chute d'une seule écluse, telle que la dépense de sa construction soit exactement équivalente à la dépense de construction d'un nombre quelconque n d'écluses, qui toutes ensemble rachètent la même chute.

(52) Au moyen de la formule précédente, nous avons dressé, pour les dix premiers nombres naturels, les seuls dont les circonstances ordinaires puissent jamais réclamer l'emploi, la table suivante, qui donne la chute d'une seule écluse x, et les chutes partielles $\frac{x}{n}$ d'un nombre n d'écluses de maçonnerie de *dépense équivalente :*

n	x	$\frac{x}{n}$.
1	1,0000 h	1,0000 h
2	1,4142 h	0,7071 h
3	1,7319 h	0,5773 h
4	2,0000 h	0,5000 h
5	2,2360 h	0,4472 h
6	2,4492 h	0,4082 h
7	2,6467 h	0,3781 h
8	2,8284 h	0,3535 h
9	3,0000 h	0,3333 h
10	3,1623 h	0,3162 h

(53) Nous pourrions faire à la plupart des canaux de navigation, qui ont été exécutés en France ou ailleurs, l'application des principes théoriques qui sont l'objet de nos différents Mémoires, et montrer comment, en appliquant ces principes, on eût obtenu, sous le double rapport de la dépense de leur construction et du volume d'eau qu'ils consomment, des avantages dont ils sont dépourvus. Mais, pour ne point mériter le reproche d'aller chercher chez les autres des exemples d'imperfection que l'on trouve dans des ouvrages qui nous sont propres, nous nous bornerons à appliquer notre théorie au canal de Saint-Denis, tel que nous l'avons projeté en 1811.

(54) Dans ce canal, le plus grand tirant d'eau des bateaux, c'est-à-dire sa profondeur effective, ... $= h = 1^{m},50$.

La chute de ses écluses................. $= x = 2^{m},60$.

Substituant ces valeurs numériques de h et de x dans la table précédente, on trouve que trois écluses de $0^{m},866$ de chute chacune auraient occasioné une dépense de construction précisément égale à celle d'une seule écluse de $2^{m},60$ de chute.

(55) De plus, les dépenses pour la fouille et la charge seulement des terrassements d'un canal de navigation dont les extrémités sont fixes, étant proportionnelles aux chutes des écluses qui y sont établies, on voit que les dépenses des terrassements du canal de Saint-Denis auraient été diminuées dans le rapport de 3 à 1, par le seul fait de la réduction de la chute de ses écluses dans le rapport de $2^{m},60$ à $0^{m},866$.

(56) Quant à la dépense d'eau nécessaire à la navigation du canal de Saint-Denis, dans les deux hypothèses que nous comparons,

Faisons le tireau d'eau d'un bateau montant.... $= t_{,}$;
Celui d'un bateau descendant .... $= t_{,,}$;
La superficie d'un sas $=S=(7^{m},80)\,[40^{m}]=312$ mètres.

Et considérons le cas le plus défavorable de la navigation, celui où les bateaux montent et descendent isolément, à certains intervalles les uns des autres,

La dépense d'eau pour la montée d'un bateau sera.................................. $S(x+t_{,})$;

Celle pour la descente d'un autre........... $S(x-t_{,,})$;

Par conséquent, la dépense d'eau qui aura lieu pour cette montée et cette descente sera $2Sx+S[t_{,}-t_{,,}]$;

Et la chute x étant réduite au tiers, elle se réduira à........................ $\frac{2Sx}{3}+S(t_{,}-t_{,,})$;

La différence de ces deux dépenses d'eau dans les deux systèmes de chute, ou l'économie du second sur le premier, est donc de $\frac{4Sx}{3}$, ou en nombres dans le cas présent, de 1082 mètres cubes.

(57) On a supposé que le mouvement de la navigation montante et descendante serait de trois bateaux par jour sur le canal de Saint-Denis; l'économie journalière eût donc été de 3246 mètres cubes.

On a supposé encore que ce mouvement de trois bateaux par jour consommerait 5714 mètres cubes d'eau; ainsi, cette consommation se serait trouvée réduite à 2468 mètres.

L'économie que l'on aurait faite eût donc été plus que suffisante pour doubler l'activité de la navigation sur le canal de St.-Denis, et, par conséquent, pour en doubler le revenu sans nuire à aucun autre service.

(58) Si les circonstances ne permettaient pas de faire à la navigation cet emploi du volume d'eau économisé, il est évident qu'il resterait disponible pour tout autre usage, lequel deviendrait la source d'un revenu quelconque.

Admettant, par exemple, que cette économie journalière de 3,246 mètres cubes d'eau devînt l'objet de concessions particulières à raison d'une redevance annuelle de 50 francs par mètre cube, prix des concessions déja faites des eaux du bassin de la Villette, dans les différents quartiers de Paris, on en obtiendrait un revenu de 162,300 fr., dont le capital équivaut à plus de trois millions. Or, pour se mettre à même d'obtenir ce revenu, il suffirait, comme nous l'avons démontré, d'opérer sur la chute des écluses une réduction qui, en tenant compte des chances éventuelles de la pratique, n'occasionnerait jamais qu'une très-légère augmentation de dépenses, eu égard à ce capital.

(59) Terminons ce Mémoire par le résumé succinct des propositions qu'il contient.

L'ouverture d'un canal s'opère toujours par des fouilles et des mouvements de terre plus ou moins considérables, soit qu'on en établisse le lit dans une tranchée à une certaine profondeur au-dessous du terrain naturel, soit qu'on l'établisse au-dessus de ce terrain, sur des levées factices plus ou moins hautes. Ces déblais et ces remblais, ainsi que leurs transports à des distances déterminées, sont désignés généralement sous le nom de *terrassements*.

Les ponts, les aquéducs, les écluses, et généralement toutes les constructions de maçonnerie ou de charpente indispensables à l'établissement d'un canal navigable, sont désignés sous le nom d'*ouvrages d'art*.

Les *terrassements* et les *ouvrages d'art* d'un canal navigable constituent deux espèces distinctes de travaux, que nous avons considérées séparément.

Quant aux premières, il est essentiel de remarquer que certains terrassements sont d'une exécution nécessaire pour l'établissement d'un canal artificiel entre deux points fixes et suivant une direction donnée : ainsi il faudra ouvrir une tranchée profonde ou pratiquer un percement souterrain si cette direction passe du bassin d'une rivière dans le bassin d'une autre ; il faudra de même établir le lit du canal sur un remblai plus ou moins élevé si cette direction traverse quelque vallée.

La distribution et la chute des écluses n'ont par conséquent d'influence sur la valeur des terrassements qu'à compter de la surface moyenne du sol naturel ou factice au-dessus ou au-dessous duquel le lit du canal doit être établi.

(60) Cela posé, si l'on divise la dépense totale des terrassements d'un canal de navigation en deux parts, l'une occasionnée par la fouille et la charge des terres, l'autre par leur transport parallèlement à l'axe du canal, on trouve que la première de ces dépenses partielles est proportionnelle à la chute des écluses, et la seconde au carré de cette chute ; d'où il suit que la dépense totale des terrassements d'un canal quelconque diminue toujours plus rapidement que la chute des écluses ne décroît, de sorte que cette chute étant réduite au tiers, la dépense dont il s'agit devient nécessairement plus de trois fois moindre ; ce qui aurait eu lieu, par exemple, au canal de Saint-Denis si chaque écluse de $2^{m},60$ eût été réduite à $0^{m},866$ de chute.

(61) Passant ensuite aux ouvrages d'art et bornant notre

examen à celui des écluses de la chute desquelles les ponts sur le canal et les aquéducs au-dessous sont évidemment indépendants, nous avons distingué les diverses parties de cet ingénieux appareil par l'objet spécial que chacune d'elles est destinée à remplir.

(62) Nous avons cité, à cette occasion, l'idée heureuse conçue récemment par M. Forey, ingénieur en chef du département de la Côte-d'Or, de supprimer les murs de chute des écluses, en donnant la même hauteur à leurs portes d'amont et d'aval (1). La suppression de ce mur simplifie les constructions, en diminue les frais, et les met à l'abri de plusieurs chances de détérioration. Le mérite de cette idée, qui ne peut manquer de la faire accueillir généralement un peu plus tôt ou un plus tard, réside dans sa simplicité même. Cependant depuis l'invention des écluses qui remonte aujourd'hui à près de quatre siècles, elle n'était venue à l'esprit d'aucun ingénieur. N'est-il pas permis d'en conclure qu'il reste encore quelques améliorations à trouver dans la pratique de certains arts, et que l'autorité de l'exemple ne doit pas les rendre stationnaires?

(63) Si les efforts que doivent soutenir les diverses parties d'une écluse ne sont ni évalués, ni pris en considération pour en régler les dimensions, on conçoit qu'on peut trouver de

(1) M. Pattu, ingénieur en chef du département du Calvados, nous a assuré avoir eu la même idée étant encore élève des ponts et chaussées, en 1798. Mais le projet qui lui mérita un premier prix au concours d'architecture hydraulique de cette année ne s'est point encore retrouvé dans les archives de notre école. Le mérite d'une nouvelle découverte sur ces matières doit appartenir à ceux qui la publient.

l'économie dans la dépense des constructions en diminuant le nombre des écluses, ou, ce qui revient au même, en augmentant leur chute entre les deux extrémités d'une portion donnée de canal.

(64) Mais il ne doit point en être ainsi. Comme dans toute autre machine dont les divers éléments doivent être rendus capables de résister aux efforts respectifs qui s'exercent sur eux, les diverses parties d'une écluse doivent avoir les dimensions qui les rendent capables de soutenir les plus grands efforts auxquels elles sont exposées. Ces efforts sont toujours certaines fonctions de la chute de cette écluse. Afin d'acquérir plus de sécurité, nous les avons déterminées dans les hypothèses physiques les plus défavorables: établissant ensuite l'équation d'équilibre entre l'un de ces efforts et la résistance que lui oppose la partie de l'appareil contre laquelle il s'exerce, nous avons assigné la forme et la dimension de celle-ci; ce qui en détermine le volume et par conséquent la valeur en argent, car le prix de ces sortes d'ouvrages s'estime en raison du cube des matériaux qu'on y emploie.

(65) Après avoir fait séparément les mêmes calculs sur toutes les parties de l'écluse, qui d'ailleurs se réduisent à trois, nous avons formé la somme des trois valeurs auxquelles ces calculs nous ont conduits, et nous avons eu l'expression rigoureuse de la dépense nécessaire pour la construction d'un de ces ouvrages.

(66) La dépense d'une écluse étant assignée, comme on vient de le dire, la dépense d'une série d'écluses égales à construire sur une longueur de canal prise entre deux points fixes devient évidemment proportionnelle à leur nombre. Ce nombre est lui-même en raison inverse de la chute de chacune

d'elles; et comme cette chute est la seule quantité variable qui entre dans l'expression de la dépense totale à laquelle on parvient, nous avons déduit immédiatement de cette expression, par l'application de la méthode ordinaire de *maximis* et *minimis*, la valeur de cette variable, propre à rendre la moindre possible la dépense totale dont il s'agit.

(67) La valeur la plus générale de la chute d'une écluse de maçonnerie, qui donne ce *minimum* de dépense, se tire d'une équation du quatrième degré; mais, attendu que les portes d'écluses sont toujours très-peu coûteuses en comparaison de leurs radiers et de leurs murs verticaux, on peut, sans erreur sensible, négliger ce prix des portes, et alors la chute du *minimum* de dépense se déduit d'une équation du second degré.

(68) Cette chute devient précisément égale à la profondeur de canal, ou, en d'autres termes, au plus grand tirant d'eau des bateaux qui doivent y naviguer lorsque, dans l'évaluation de la dépense, on ne tient compte que des revêtements verticaux de l'écluse, lesquels en forment toujours la partie la plus dispendieuse.

La simplicité remarquable de cette expression de la chute propre au *minimum* de dépense la rend facile à retenir; il n'est pas moins digne de remarque que le plus grand tirant d'eau des bateaux employés jusqu'ici sur nos canaux de navigation intérieure ne s'élevant guère au-dessus de $1^m,30$, les chutes de $2^m,50$ à 3^m qu'on est dans l'usage de donner aux écluses, se trouvent à peu près doubles de celles qu'elles devraient avoir pour que les dépenses de leur construction fussent les moindres possibles.

(69) Ce que nous venons de dire s'applique au cas où les écluses sont entièrement construites en maçonnerie, conformé-

ment à l'usage qui s'en est généralement établi en France et en Angleterre; mais là où les bois sont abondants, et dans les pays tels que la Hollande où l'on ne trouve point de carrières, il peut devenir sinon rigoureusement indispensable, du moins très-avantageux, de construire les écluses en charpente: la discussion de ce système rentrait, par conséquent, dans l'objet de notre Mémoire.

(70) L'expression de la résistance qu'opposent les diverses parties d'une écluse aux efforts qui s'exercent sur chacune d'elles n'est pas la même quand elle est construite en maçonnerie et quand elle est construite en charpente; par conséquent, les équations d'équilibre qui servent à déterminer les dimensions de ces diverses parties sont différentes dans l'un et l'autre mode de construction. Cependant l'application de la méthode de *maximis* et *minimis* à l'expression la plus générale de la dépense en argent d'un certain nombre d'écluses construites en charpente sur une portion donnée de canal conduit à une équation du troisième degré; d'où l'on tire, comme dans le cas précédent, la valeur de la chute de ces écluses convenable au *minimum* de dépense.

(71) A la vérité, on ne parvient à cette équation qu'en supposant donné d'avance l'intervalle ou l'espacement des poteaux montants et des entre-toises qui servent d'appui aux madriers horizontaux dont, à proprement parler, se compose le revêtement de l'écluse; mais il suffit d'une légère attention pour reconnaître qu'à moins d'être obligé de s'assujétir à des conditions particulières, l'espacement dont il s'agit doit aussi devenir lui-même l'objet d'une question préliminaire.

Il est évident, en effet, que plus les poteaux montants du revêtement de l'écluse seront rapprochés les uns des autres,

moins ils devront avoir d'équarrissage, et moins aussi les madriers horizontaux auxquels ils servent d'appui devront avoir d'épaisseur, puisqu'ils auront une moindre quantité de terres à soutenir entre deux poteaux consécutifs. D'un autre côté, par le fait du rapprochement de ceux-ci, ils deviennent nécessairement plus nombreux; l'augmentation du nombre des poteaux montants, et la réduction simultanée tant de leur épaisseur que de celle des madriers auxquels ils servent d'appui, établissent donc dans l'évaluation du cube de la charpente de l'écluse une compensation qui suit une certaine loi, et, par conséquent, il existe un espacement de ces poteaux montants tel, que le cube de la charpente du revêtement devient un *minimum* : il convient donc d'assigner d'abord cet espacement.

(72) La solution de cette question est susceptible d'une multitude d'applications utiles; elle indique, par exemple, à quelle distance les solives d'un plancher de charpente doivent être placées les unes des autres pour que ce plancher soit rendu le plus léger possible en conservant la faculté de résister avec la même force à l'action d'une charge donnée, répartie, suivant une certaine loi, sur tous les points de sa surface; elle indique aussi quel doit être, dans la construction des bateaux de rivière, l'écartement des courbes ou membrures sur lesquelles le bordage est cloué, pour que ce bateau acquière la plus grande légèreté sans rien perdre de la résistance que son fond et ses parois doivent opposer à la pression de l'eau dans laquelle il est immergé. Il suffit de citer ces deux cas particuliers du problème que nous avons été conduits à résoudre, pour en faire sentir l'importance. Des cas analogues se présentent fréquemment dans les différents arts de construction; et quoique les lois théoriques de la résistance des

solides puissent s'y appliquer immédiatement avec beaucoup d'avantage, cette application n'avait point encore été faite.

L'intervalle des poteaux montants du revêtement ayant été ainsi déterminé, si on l'introduit dans l'expression générale de la dépense en argent occasionnée par la construction d'un certain nombre d'écluses rachetant une pente donnée, et que l'on suppose nulle la différentielle de cette expression, on obtient une équation du quatrième degré, d'où l'on tire la valeur de la chute qu'il faut donner aux écluses en charpente, afin de rendre la moindre possible la dépense de leur établissement.

(73) Nous sommes parvenus à cette valeur de la chute des écluses en comprenant dans l'expression générale de cette dépense en argent l'expression particulière de celle qui provient de la construction de leurs radiers, c'est-à-dire de leurs revêtements horizontaux; mais, par la nature même de la résistance des bois dont ils sont composés, les dimensions de ces bois et par conséquent leurs prix doivent être en même temps fonction de la profondeur du canal et de la largeur des écluses: or cette largeur des écluses est indépendante de leur chute; et comme celle-ci est le seul élément que nous considérions, il convient de ne considérer aussi que la dépense des revêtements verticaux, la seule qui dépende de cet élément.

Faisant donc abstraction de toute autre dépense, on trouve que, pour la réduire au *minimum*, il faut que la chute des écluses en charpente soit précisément égale aux $\frac{6}{7}$ de la profondeur du canal. On se rappelle que, pour des écluses de maçonnerie, cette chute, dans la même hypothèse, doit être égale à cette profondeur entière.

(74) Nous avons déterminé, dans nos précédents Mémoires,

l'influence qu'exerce la chute des écluses sur le volume d'eau exigible pour le maintien de la navigation, et dans celui-ci la dépense en argent occasionnée par la construction de ces ouvrages.

L'économie d'eau que l'on obtient est, comme on l'a vu, d'autant plus considérable au passage des écluses, que leur chute est plus faible, tandis que le *minimum* de dépense de leur construction correspond toujours à une chute déterminée. Si donc, à dessein d'économiser l'eau, on abaissait la chute des écluses au-dessous de la limite correspondante au *minimum* de dépense de leur construction, on achèterait, en effet, par un sacrifice d'argent, le volume d'eau dont on obtiendrait ainsi la faculté de disposer; il est donc d'une nécessité préalable d'en évaluer le prix. Or ce prix est incontestablement le capital du revenu que l'on acquiert par l'emploi du volume d'eau économisé, soit à l'extension journalière de la navigation, soit au prolongement annuel de sa durée. Nous avons cru devoir rendre ce calcul sensible en l'appliquant au canal de Saint-Denis.

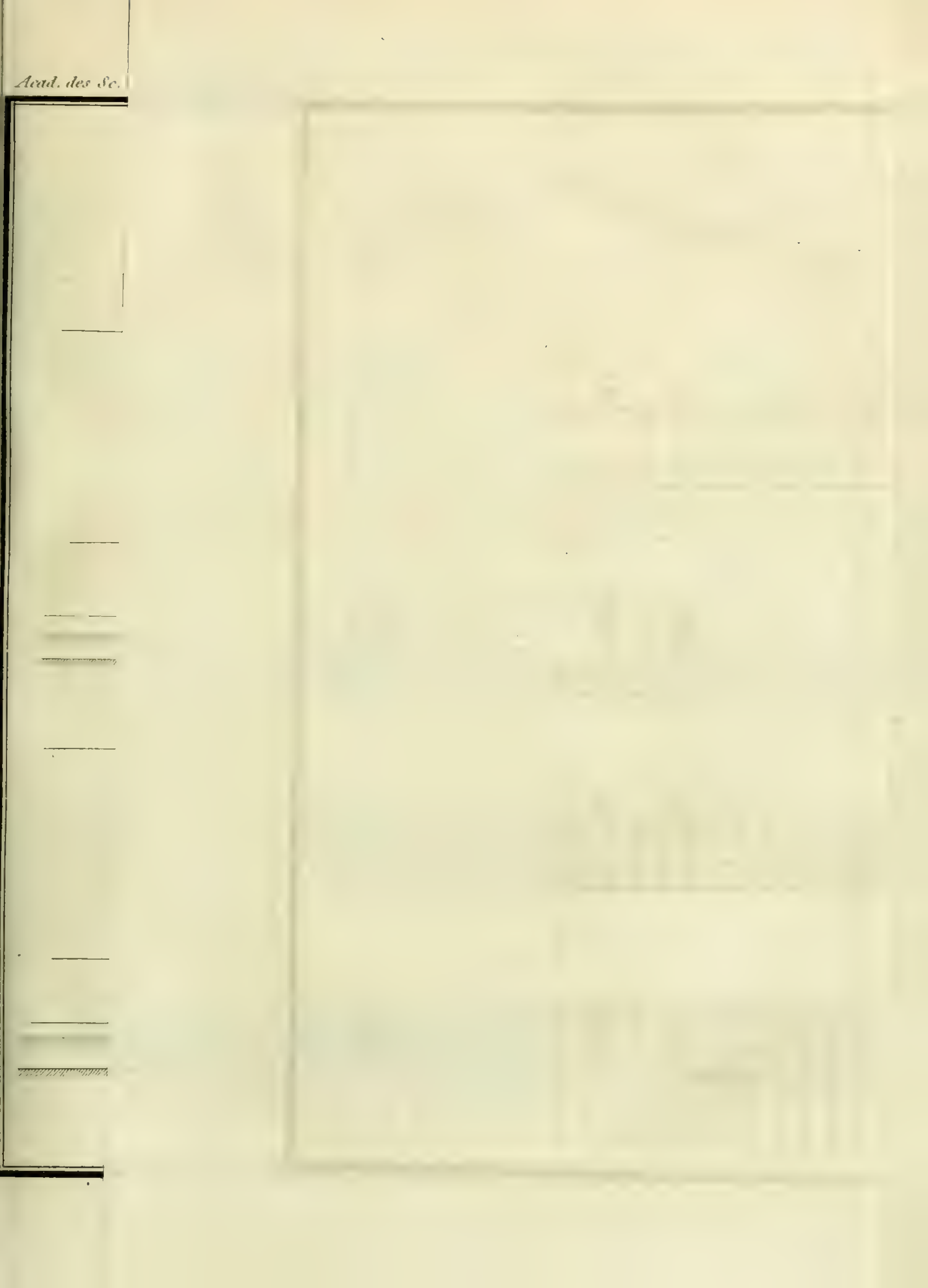
(75) L'équation qui exprime le rapport de la chute des écluses à la dépense de leur construction, est celle d'une hyperbole rapportée à l'un de ses grands diamètres; la même dépense correspond toujours, par conséquent, à deux chutes différentes en-deçà et au-delà de celle qui rend cette dépense la moindre possible. On trouve, par exemple, que cette dépense reste la même dans les écluses de maçonnerie quand leur chute est égale à la moitié de la profondeur du canal, ou quand elle est double de cette profondeur, c'est-à-dire dans ce cas particulier, soit qu'on construise quatre écluses, soit qu'on en construise une seule de chute quadruple.

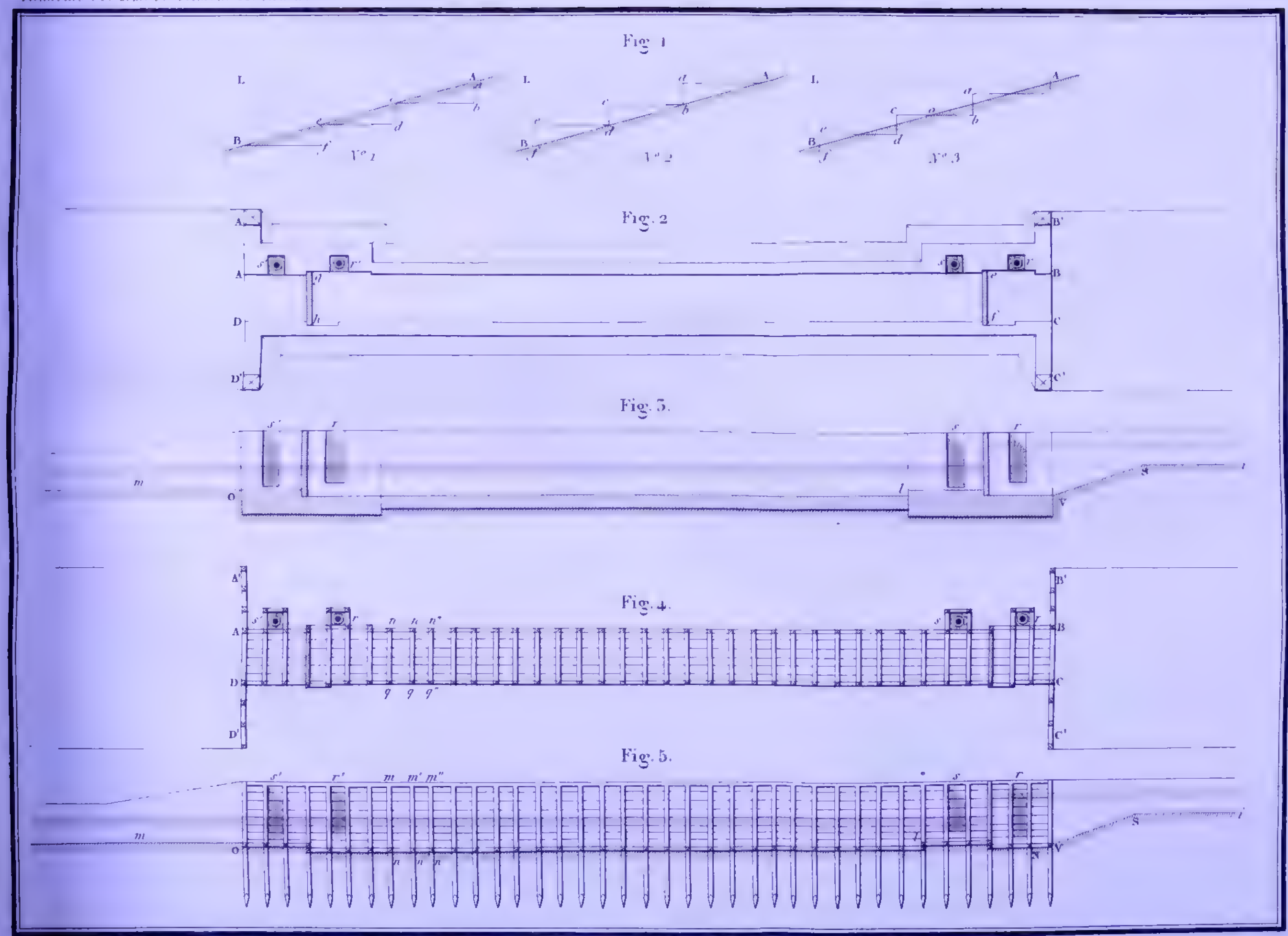
(76) En général, on peut toujours former une équation de deux expressions identiques, l'une de la dépense à faire pour la construction d'une seule écluse, l'autre de la dépense à faire pour la construction d'un certain nombre d'écluses qui rachèteraient la même pente. Cette équation apprend que le nombre cherché des chutes partielles est égal au carré de la chute totale divisé par le carré de la profondeur du canal : nous donnons une table de ces chutes d'écluses équivalentes pour les dix premiers nombres naturels. Enfin nous faisons de l'un des termes de cette table une application au canal de Saint-Denis, et nous trouvons que si les chutes de ses écluses, que nous avions fixées à $2^{m},60$, eussent été réduites au tiers, c'est-à-dire à $0^{m},866$ millim., la dépense de leur construction n'en fût pas devenue plus grande ; tandis que sur la quantité d'eau consacrée au service de la navigation, on en aurait économisé un volume suffisant pour en doubler l'activité au besoin, et par conséquent pour en augmenter le revenu dans la même proportion.

(77) Les recherches théoriques qui sont l'objet de ce Mémoire nous ont conduits à ce résultat remarquable, savoir : que la réduction de chute des écluses, loin d'augmenter la dépense de leur établissement, peut, dans beaucoup de circonstances, contribuer à diminuer cette dépense, en même temps qu'elle opère dans toutes, sur le volume d'eau nécessaire à l'entretien de la navigation, une économie plus ou moins considérable, la plus importante et la première de celles qu'on doit se proposer d'obtenir.

(78) Ces recherches présentent une nouvelle application de la méthode ordinaire de *maximis* et *minimis* à des questions relatives à l'art des constructions. Notre savant confrère,

M. Coulomb, donna, il y a près de cinquante ans, en s'occupant de questions de la même nature, les premiers exemples de cette application; elle peut être utile dans une multitude de cas, que les ingénieurs instruits de tous les corps sauront aisément discerner, et l'usage qu'ils en feront les conduira plus infailliblement qu'aucune autre voie à perfectionner les règles et les procédés des différents arts qu'ils exercent.


Acad. des Sc.


Fig. 1
N° 1
N° 2
N° 3
Fig. 2
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.

MÉMOIRE

SUR

LA COMÈTE PÉRIODIQUE DE 6 ANS $\frac{3}{4}$.

PAR M. DE DAMOISEAU.

Lu à l'Académie royale des Sciences, le 9 avril 1827.

Le 27 février 1826, au soir, à Josephstadt en Bohême, M. Biéla aperçut dans le Bélier une petite nébulosité ronde, dont il estima la position : le lendemain 28, il resta convaincu qu'il avait découvert une comète, dont le noyau s'était avancé depuis la veille d'un degré vers l'est, et paraissait avoir augmenté en éclat et en grandeur ; il compara la comète avec l'étoile nº 28 du catalogue de Bode, pour en avoir la position ; il l'observa encore le 3 et le 12 mars. M. Gambart, de son côté, découvrit cette comète à Marseille le 9 mars, et continua à l'observer les jours suivants. La nouvelle de cette découverte s'étant répandue, elle fut observée, dès le 10 mars, à Gottingue par M. Harding, à Altona par M. Clausen, et successivement dans presque tous les observatoires de l'Europe, et disparut vers le commencement de mai. On fut bientôt en état, avec les premières observations, d'entrevoir, par

le calcul des orbites paraboliques, que les éléments de la nouvelle comète avaient une grande ressemblance avec ceux des comètes de 1772 et 1806. Cette hypothèse, tout en indiquant une même comète dans ces trois apparitions, s'écartait beaucoup des observations, comme cela devait arriver; mais MM. Clausen et Gambart, après quelques essais, ont trouvé chacun séparément une ellipse qui représente les observations assez exactement pour ne laisser aucun doute sur l'identité de ces trois comètes.

Voici l'ellipse de M. Clausen, calculée d'après les observations du 28 février, de M. Biéla; du 14 mars, de M. Harding; et du 28, qu'il a faite lui-même :

Passage au périhélie 1826 mars 18,49237; temps moyen d'Altona.

Longitude du périhélie......	109°.53'.29",7	équin. moy. janv. 1826.
Longitude du nœud asc....	251 .27 .19 ,9	
Inclinaison................	13 .32 .52 ,0	
Excentricité......	0,745569	
½ grand axe.......	3,54494	
Révolution...	2438 jours.	

M. Gambart a calculé deux ellipses, l'une pour 1826 et l'autre pour 1806:

	1826	1806
Passage au périh.	1826 mars 18,9688 t. m. de Paris....	1806 janv. 2J,4807 compté de minuit. ....
Longit. du périhél...	109°.51'.32".................	109°.32'.23"
Longit. du nœud asc.	251 .26 . 9	251 .15 .15
Inclinaison.........	13 .33 .15	13 .38 .45
Excentricité........	0,7470093	0,7457842
½ grand axe........	3,56705..................................	
Révolution.....	6ans,737..................................	

La révolution moyenne 2460 jours, qui établit l'identité de la comète de 1806, devrait s'élever à 2469 jours pour établir celle de la comète de 1772. Cette anomalie de révolution ne peut être expliquée que par l'altération qu'a dû causer, dans le mouvement de la comète, l'action de Jupiter, qui en a passé assez près en 1782 et en 1794. L'identité une fois admise, pour annoncer le temps du prochain retour de la comète, il faut nécessairement avoir égard aux perturbations dues à l'action des planètes dans l'intervalle des passages aux périhélies de 1806 et de 1826, et dans l'intervalle de ce dernier passage à celui de 1832; année qui sera remarquable par les réapparitions des deux comètes à courte période, de 1819 et de 1826.

De 1806 à 1826, la plus grande proximité de Jupiter à la comète n'a été, en février 1807, que de trois fois la distance moyenne de la terre au soleil; mais la terre, au périhélie de 1806, n'en était éloignée que de 0,18 de cette distance: aussi son action, ayant commencé avec la période, a été assez puissante pour produire presque la moitié de l'effet de Jupiter sur l'anomalie moyenne de la comète. Voici ce que donne la théorie, pour les perturbations de cette anomalie et du moyen mouvement diurne pendant cette période:

	Moy. mouv. diur.	Anom. moy.
♃	+ 1″,4497	+ 0°.45′.39″,94
♁	+ 0 ,1811	+ 0 .22 .10 ,72
♄	— 0 ,0317	— 0 . 2 .45 ,95
	+ 1″,5991	+ 1°. 5′. 4″,71

Si on désigne par n et n' les moyens mouvements diurnes

aux périhélies de 1806 et de 1826, l'intervalle entre les deux passages étant de $7380^j,4881$, on aura

$$n = \frac{360^\circ \times 3 - 1^\circ.5'.4'',71}{7380,4881} = 8'.46''7943 - 0'',5291 = 8'.46'',2652$$

$$n' = 8'.46'',2652 + 1'',5991 = 8'.47'',8643.$$

Il est facile de conclure de ces résultats, que l'effet des perturbations pendant cette période a été tel, que la révolution moyenne $2460^j,1627$ qui y répond était trop petite de $2^j,4730$, et trop grande de $4^j,9865$, pour convenir respectivement aux périhélies de 1806 et de 1826. Ainsi, dans le calcul des observations, on doit employer pour 1806 une ellipse de $2462^j,6360$, et pour 1826 une ellipse de $2455^j,1762$.

Dans la période actuelle, Jupiter s'approchera de la comète, en mai 1831, à 1,17, distance moyenne de la terre au soleil; et son influence, qui durera un temps assez considérable, sera surtout remarquable par rapport aux nœuds de l'orbite. Le minimum de distance de la terre à la comète ayant lieu vers le périhélie de 1832, son action ne sera que très-peu sensible; il en est de même à l'égard de Saturne, qui restera constamment à une grande distance de la comète. Le calcul des perturbations du moyen mouvement diurne et de l'anomalie moyenne a donné pour cette période :

	Moy. mouv. diur.	Anom. moy.
♃	+ 5'',5745	+ 1°.28'.50'',94
♂	+ 0 ,0332	— 0 . 0 .34 ,69
♄	— 0 ,0311	— 0 . 3 .14 ,83
	+ 5'',5766	+ 1°.25'. 1'',42

Au moyen de ces résultats, on trouve ensuite, en nom-

mant T l'intervalle du passage au périhélie de 1826 au passage futur, et n'' le moyen mouvement diurne au périhélie de 1832,

$$T = \frac{360^\circ - 1^\circ.25'.1'',42}{8'.47'',8643} = 2455^j,1762 - 9^j6642 = 2445^j,5120;$$

$$n'' = 8'.47'',8643 + 5'',5766 = 8'.53'',4409.$$

On voit que l'action des planètes sera de diminuer de 9^j,6642 la révolution propre au périhélie de 1826, et de 14^j,6507 la révolution moyenne de 1806 à 1826. Si donc l'on suppose que la comète ait passé au périhélie en 1826 le 18,9688 mars, son retour au périhélie prochain aurait lieu en 1832 le 27,4808 novembre.

Les altérations qu'éprouveront les éléments de l'orbite pendant cette dernière période, ont été déterminés ainsi qu'il suit :

Variation des nœuds sur l'écliptique		—	3°.13'.45''
Variation de la long. du périhélie	sur l'orbite de 1826.	+	10'.24''
	sur l'orbite mobile.	+	5'.13''
Variation de l'inclinaison de l'orbite		—	20'. 2''
Variation de l'excentricité			0,0047388

En partant des éléments de 1826 de M. Gambart, on a formé, avec ces variations, les éléments suivants pour 1832 :

Passage au périhélie 1832 novembre 27,4808 t. moy. au mer. de Paris compté de minuit.

Longitude du périhélie	109°.56'.45''
Longitude du nœud ascendant	248 .12 .24
Inclinaison	13 .13 .13
Excentricité	0,7517481
$\frac{1}{2}$ grand axe	3,53683

28.

Voici une éphéméride pour faciliter la recherche de la comète lors de sa réapparition :

TEMPS MOYEN A PARIS COMPTÉ DE MINUIT.	ASCENSION DROITE.	DÉCLINAISON BORÉALE.	DISTANCE de ♂ à ♁.	DISTANCE de ♂ au ☉.
1832 août 4,648	35°.46′	28°.44′	1,533	1,828
21,260	46 50	32 28	1,235	1,657
sept. 5,308	60 0	35 25	0,990	1,500
18,934	76 2	36 49	0,798	1,359
oct. 1,291	95 0	35 26	0,659	1,234
12,542	109 12	30 54	0,573	1,127
22,858	110 50	25 51	0,537	1,038
nov. 1,416	112 1	20 37	0,546	0,969
10,403	114 26	15 58	0,586	0,918
19,006	118 29	12 4	0,645	0,888
27,415	124 2	8 44	0,715	0,878

RECHERCHES

SUR

La manière de discuter les analyses chimiques pour parvenir à déterminer exactement la composition des minéraux.

PAR M. F. S. BEUDANT.

Lu à l'Académie Royale des Sciences, le 31 mars 1828.

Ce qu'il y a de plus important aujourd'hui, dans la minéralogie, est bien certainement l'interprétation des analyses chimiques, qui déterminent la composition des diverses substances minérales. Déja les travaux de M. Mitscherlich, en nous faisant connaître que divers oxides sont susceptibles de se remplacer mutuellement dans les combinaisons, et souvent sans qu'il y ait de changements bien marqués dans les caractères extérieurs, ont jeté un grand jour sur des analyses compliquées, dont jusqu'alors on ne savait que penser. Aujourd'hui ces mêmes analyses peuvent être discutées avec la plus grande facilité, et l'on parvient à calculer les quantités numériques des diverses substances, à bases ou acides différents, qui se trouvent mélangées, à reconnaître par conséquent celle qui domine, et par suite à classer convenable-

ment le mélange dans les méthodes minéralogiques, surtout dans celles qui sont fondées sur le principe électro-négatif. Ce travail important a fait disparaître, pour toujours, la grande scission qui existait entre les minéralogistes et les chimistes; il a réuni les deux sciences, qui désormais marcheront toujours ensemble, et à tel point qu'il sera souvent difficile d'établir leurs limites.

Cependant, malgré ces travaux, il existe encore des points qui présentent des difficultés, et qui ont fourni des objections à ceux des minéralogistes qui ont continué à suivre à peu près les anciens errements : elles ont même fait attaquer, d'une manière spécieuse, les bases même de nos raisonnements, c'est-à-dire la théorie même des proportions définies. Ces difficultés consistent en ce que, dans presque toutes les analyses de substances minérales, même dans les plus récentes, dans celles qui sont faites avec toute la précision que l'on a su y mettre depuis quelque temps, il existe très-fréquemment quelques matières surabondantes ; d'où il résulte qu'on ne peut discuter ces analyses sans laisser quelques principes à nu, ou sans trouver quelques restes, qui présentent une multitude de combinaisons que rien de positif ne nous autorise à admettre. Dans presque tous les silicates, par exemple, on remarque avec étonnement une surabondance de silice, surtout lorsqu'on admet dans le calcul les nouvelles données, qui résultent des recherches de M. Berzelius, sur la composition de cet oxide. On a été obligé de supposer que la silice étant extrêmement répandue dans la nature, existant fréquemment seule, sans combinaison, se trouvait accidentellement mêlée avec toutes les substances.

Il faut bien avouer que cette supposition est tout-à-fait hypothétique, et qu'elle a besoin d'être soumise à la sanction de l'expérience pour acquérir quelques probabilités. C'est dans la vue de trouver quelques raisons positives pour l'admettre, ou de découvrir quelques vérités qu'on puisse y substituer, que je me suis livré depuis quatre ans à des recherches nombreuses, dont je vais présenter ici les résultats. J'ai commencé mes recherches par des expériences sur les sels, et j'ai été conduit ensuite à des recherches sur les matières minérales elles-mêmes. Je suis ainsi parvenu à des résultats qui me paraissent avoir quelque importance, en ce qu'ils font disparaître toutes les erreurs apparentes que l'on remarquait, qu'ils montrent que les objections spécieuses qu'on en avait tirées contre la théorie des proportions définies, tiennent à ce qu'on ne savait pas discuter convenablement les analyses minérales, et enfin en ce qu'ils donnent réellement de nouvelles forces aux principes fondamentaux qui nous dirigent aujourd'hui.

§ Ier. — *Expériences sur les sels.*

Mes premières recherches sur les sels ont eu lieu particulièrement sur des sulfates, des carbonates et des nitrates cristallisables. J'ai reconnu, comme je m'y attendais, d'après les recherches de tant de chimistes, que ces sels renfermaient toujours les mêmes proportions d'acide et de base, pourvu toutefois qu'on ait eu la précaution, dans différents cas, de les priver, autant que possible, des particules liquides qui se trouvent souvent logées entre les

couches d'accroissement des cristaux. En vain j'ai ajouté à la solution tantôt surabondance d'acide, tantôt surabondance de base, j'ai toujours obtenu des cristaux qui présentaient à l'analyse les mêmes proportions, à moins qu'il ne se fût formé, ce qui arrive quelquefois, d'autres combinaisons, qui sont également en proportions définies, et s'annoncent toujours par des caractères extérieurs différents.

Dans les différents cas où la solution renfermait surabondance d'acide ou de base, j'ai toujours trouvé quelques variations lorsque je négligeais la précaution de briser les cristaux, et de les dessécher sur du papier joseph avant de les analyser. Cela tenait évidemment à ce que le liquide interposé était précisément celui de la solution qui renfermait surabondance d'un des principes. Cette circonstance m'a donné l'idée d'opérer sur des sels dont les acides même fussent cristallisables, tels que les borates, citrates, tartrates, oxalates, etc. Je trouvais à cela deux avantages, l'un que les portions de liquide logées entre les couches, venant à se dessécher, laisseraient l'acide cristallisé dans les petites cavités, où l'on pourrait alors l'apercevoir; l'autre que l'acide, pouvant lui-même cristalliser, se mêlerait peut-être plus aisément avec le sel dans lequel il entrait : je me trouvais d'ailleurs tout-à-fait dans les circonstances qui peuvent accompagner la formation ou la cristallisation des silicates.

En opérant avec ces sortes de sels, j'ai obtenu, en effet, des variations dans les proportions, toutes les fois que j'ai laissé sécher naturellement les cristaux sans leur enlever les portions de liquide qu'ils renfermaient entre leurs couches. Mais, dans un assez grand nombre d'analyses que j'ai faites des sels ainsi formés, j'ai toujours observé que ces

variations se trouvaient dans des limites extrêmement resserrées; en sorte qu'il n'y avait jamais que quelques millièmes d'acide surabondant : très-rarement j'ai vu ces différences se montrer dans les centièmes. J'ai observé de même que ces variations disparaissaient, lorsqu'en retirant les cristaux du liquide où ils s'étaient formés, j'avais soin de les briser et de les bien dessécher dans le papier joseph.

De quelques manières que je m'y sois pris, je n'ai jamais obtenu de variations que je pusse rapporter à un autre genre de mélange, que celui qui résulte de l'interposition du liquide entre les couches. L'acide et les sels ont toujours cristallisé séparément, sans se mélanger ensemble dans le même cristal; il n'y a de mélange que par groupement dans les masses, que j'ai toujours évité de prendre pour l'analyse, parce que dans les minéraux ce ne sont pas des masses ainsi mélangées que l'on prend pour opérer, mais bien des parties choisies et mécaniquement pures. Une circonstance assez remarquable, c'est que l'on parvient plutôt à faire mélanger dans la même cristallisation deux acides différents, qu'à faire mélanger un acide déterminé avec le sel dans lequel il entre comme partie constituante.

Ces expériences me paraissent prouver assez clairement que la surabondance de silice, qu'on observe dans un grand nombre de silicates, ne doit pas tenir à un mélange de cet acide, comme on a été conduit à le supposer. Il semble, en effet, qu'il en doit être de la silice comme des acides cristallisables de mes expériences, et qu'elle ne doit pouvoir se mélanger que par suite de l'interposition du liquide entre les couches d'accroissement, ce qui placerait les variations dans des limites très-rapprochées. Il faut donc chercher une autre

cause pour expliquer la surabondance de silice dans les silicates, qui est fréquemment très-notable.

Comme, dans beaucoup de cas, on peut penser que les silicates se sont formés plutôt par la voie sèche que par la voie humide, j'ai eu l'idée d'en former quelques-uns par la fusion, tantôt en prenant des proportions exactement définies, tantôt en mettant une légère surabondance d'acide ou de base. J'avais préparé sous ce point de vue une série d'expérience assez nombreuse; mais j'en ai fait très-peu, d'un côté, parce que des circonstances particulières m'en ont empêché, d'un autre, parce que les premiers essais m'ont conduit à la même conclusion que les expériences que j'avais faites par la voie humide; et enfin, ce qui a été la cause déterminante pour m'empêcher de continuer, parce que, dans le même temps, j'étais conduit à d'autres idées qui me paraissaient devoir expliquer les variations observées, qui m'ont ramené à des expériences sur les sels, et m'ont ensuite forcé de me livrer à des analyses de minéraux.

Dans le peu d'expériences que j'ai faites par la voie sèche, voici ce qui est arrivé. Les essais dans lesquels j'avais mis des proportions définies pour faire tel ou tel composé, ont parfaitement réussi; ceux au contraire dans lesquels j'avais mis un peu de silice surabondante, dans l'espérance qu'elle se mélangerait avec le corps défini auquel elle était ajoutée, n'ont pas produit un atome du corps que je m'étais proposé de former : à la place de ce corps, il s'en est fait deux, nettement séparés dans le creuset, entre lesquels les éléments se sont partagés de manière que dans chacun d'eux ils étaient en proportions définies.

D'après ce résultat, je devais conclure que, par la voie

sèche, la silice n'était pas plus susceptible de se mélanger avec un corps déterminé, que les autres acides ne s'étaient mélangés dans les expériences par la voie humide; par conséquent, en admettant que les silicates naturels ont été formés par le feu, on ne peut pas davantage concevoir la surabondance de silice qu'ils présentent si fréquemment.

Dans le temps où j'obtenais ce dernier résultat, j'avais d'autres expériences commencées sur les sels. Des essais antérieurs m'avaient fait voir que tous les sels quelconques, qui se trouvaient dans la même solution, étaient susceptibles de se mélanger entre eux, surtout lorsqu'on faisait cristalliser rapidement. Les sels de même acide et surtout ceux de même formule atomique se mélangent en toutes proportions; ceux d'acide, différents lorsqu'ils ne sont pas isomorphes, se mélangent de manière que l'un est toujours fortement dominant, et les autres en faibles proportions. J'avais aussi reconnu que plus les sels étaient compliqués, plus facilement ils se mélangaient, en sorte que les sels doubles, même de nature tout-à-fait différente, ne peuvent être obtenus purs lorsqu'ils cristallisent avec d'autres dans une même solution. Enfin j'avais remarqué que les mélanges se faisaient encore plus facilement, lorsque les sels se formaient dans une solution, que quand on les y mettait déja tout formés; en sorte que, par de doubles décompositions, on obtient des mélanges extrêmement variés, et même un grand nombre qu'on ne peut avoir autrement.

Ces faits étaient très-importants pour établir la discussion des analyses minérales sur des bases solides, et rendre très-probables les mélanges de diverses matières que ces discussions conduisent à admettre. Mais plus tard je com-

pris que c'était également à des mélanges de cette espèce, qu'on devait attribuer les variations qu'on observait dans les proportions des principes d'un corps déterminé. En effet, tous les sels étant susceptibles de se mélanger entre eux lorsqu'ils sont dans la même solution, il doit arriver, quand un sel déterminé se mélange d'une petite quantité d'un autre sel de même acide, mais d'un ordre plus élevé, qu'on trouve dans l'analyse une surabondance d'acide, si l'on suppose, n'étant conduit par rien à penser autrement, que les deux sels sont du même ordre. Réciproquement on doit trouver, dans la même supposition, surabondance de base, lorsqu'à un sel déterminé, il se mélange un sel de même acide d'un ordre inférieur.

Or ces circonstances n'avaient pu se manifester dans les expériences que j'avais faites; j'avais dû naturellement employer pour le plus grand nombre de ces expériences les sels qui se trouvent le plus communément dans le commerce, et, par une singularité assez remarquable, presque tous les sels que l'on peut ainsi se procurer sont du même ordre. Par conséquent quelques mélanges que j'aie pu obtenir des sels de même acide, les analyses ont toujours dû présenter exactement des quantités d'acide relatives à un seul ordre de sels. Cependant, en examinant de nouveau les analyses que j'avais faites, je vis que les quantités d'eau auraient pu, dans tout autre cas, donner lieu de croire qu'il y avait des variations dans les quantités de ce liquide; ce qui tient à ce que les sels du commerce, quoique de même ordre par rapport à l'acide, ne le sont pas sous le rapport de l'eau qu'ils renferment. Mais cette circonstance avait dû nécessairement m'échapper, parce que connaissant d'avance

tous les sels qui se trouvaient dans la solution, je ne pouvais faire aucune fausse supposition pour calculer les mélanges, et dès-lors je devais toujours arriver à des résultats exacts.

Ayant conçu les idées que je viens d'exposer, je fis de nouvelles expériences sur les sels. Cette fois, je les préparai de manière à ce que, par double décomposition ou autrement, il pût se former des sels solubles de même acide de différents ordres. J'analysai ensuite les cristaux obtenus, en les choisissant avec soin de manière à ne pas avoir de mélange par groupement. L'expérience répondit pleinement à mon attente; j'obtins des carbonates et des sulfates de soude, avec la cristallisation et les autres caractères extérieurs propres au bicarbonate (sous-deuto-carbonate) ou au trisulfate (deuto-sulfate) de cette base, dans lesquels l'analyse montrait surabondance d'acide et manque d'eau. J'obtins également des sulfates de fer et de cuivre, des tartrates de potasse, des sels doubles de diverses espèces, avec les caractères propres à une espèce déterminée, et qui offraient des circonstances semblables. Je suis même parvenu à faire varier les proportions d'un grand nombre de manières, en faisant cristalliser la solution avec plus ou moins de lenteur ou de rapidité, ce qui permettait aux sels de divers ordres de se mélanger plus ou moins facilement.

Après avoir obtenu ces résultats, qui me paraissaient très-concluants, j'imaginai, afin de les rendre encore plus évidents, de calculer les analyses pour déterminer les quantités relatives des sels de divers ordres qui se trouvaient mélangés. C'était en effet un complément nécessaire de la théorie à laquelle ces expériences conduisaient; car ayant trouvé par

exemple, dans une analyse de cristaux de bicarbonate de soude, les proportions

Acide carbonique........	0,157	tenant oxigène	0,114	: 2 +
Soude.................	0,220	....	0,056	: 1
Eau..................	0,623	....	0,554	: 10 —
	1,000			

j'expliquais bien la surabondance d'acide et le manque d'eau, par les circonstances de mon expérience (1), en admettant qu'il s'était mélangé dans les cristaux une petite quantité du tricarbonate de soude que j'avais ajoutée à la solution (2);

(1) J'avais employé ici le bicarbonate artificiel et le tricarbonate naturel de Barbarie dont j'avais des échantillons très-purs; j'avais fait dissoudre l'un et l'autre dans l'eau, et c'est de la solution que j'ai obtenu les cristaux de bicarbonate dont je viens de présenter l'analyse.

(2) Le bicarbonate de soude (que je nomme toujours ainsi parce qu'il renferme deux atomes d'acide) se compose de

Acide carbonique............	0,1538
Soude.....................	0,2183
Eau......................	0,6279

D'après la formule $\ddot{So}\,\ddot{C}^2 + 20\,Aq$.

Le tricarbonate dont la formule est $\ddot{So}\,\ddot{C}^3 + 4\,Aq$, est formé de

Acide carbonique...........	0,4014
Soude....................	0,3799
Eau.....................	0,2185

D'après ces deux compositions, on voit que, s'il y a mélange du second sel avec le premier, l'analyse doit présenter augmentation d'acide et diminution d'eau.

mais la chose devenait bien plus positive, si je pouvais parvenir, par la discussion de l'analyse, à déterminer ce qu'il y avait de chacun des sels. Or, en cherchant à faire ce partage, j'ai reconnu que la méthode de discussion que j'avais suivie jusqu'alors, dont j'ai déja donné une idée dans mon Traité de Minéralogie, était tout-à-fait insuffisante, et je fus obligé de la compléter: malheureusement elle se trouve par là un peu plus compliquée; mais elle est alors applicable à tous les cas, et d'ailleurs ne sort pas des éléments ordinaires du calcul.

Je ne parlerai pas, pour l'instant, de la méthode que j'ai été obligé de suivre, et que j'ai encore étendue depuis; j'en ferai un paragraphe séparé, où je donnerai les détails nécessaires relatifs aux différents cas que je connais, en les éclaircissant par des exemples. Ici il me suffit de dire que je suis parvenu à calculer toutes les analyses des sels mélangés que j'avais obtenus dans mes dernières expérien-

---

Nota. Les tables de proportion de M. Berzelius sont devenues d'un tel usage et d'une telle importance, que c'est un devoir pour tous ceux qui s'en servent de corriger les fautes qui ont pu se glisser dans cet immense travail. Je profiterai de la circonstance pour signaler deux fautes qui se trouvent page 21 : l'une est relative au *carbonas natricus ;* dans la colonne +E, il faut lire 58,57 au lieu de 60,17, et dans la colonne —E, il faut lire 41,32 au lieu de 39,83.

L'autre faute, dans la ligne suivante, est relative au *carbonas natricus cum aquâ.* Dans la colonne *poids de l'atome*, il faut lire 3581,15 au lieu de 3597,77. Dans la colonne +E, il faut lire 21,83 au lieu de 21,73, et dans la colonne —E, 15,38 au lieu de 15,31. Enfin dans la colonne *eau*, il faut lire 62,79 au lieu de 62,96.

ces, de manière à déterminer positivement les quantités relatives des divers sels réunis sous la même cristallisation, sans avoir aucun reste électro-positif ou électro-négatif. L'analyse que je viens d'indiquer, par exemple, se réduit au mélange suivant :

Bicarbonate de soude........	$\ddot{S}o\,\ddot{C}^{2} + 20\,Aq$	0,987
Tricarbonate de soude.......	$\ddot{S}o\,\ddot{C}^{3} + 4\,Aq$	0,013
		1,000

Après ces expériences, je ne doutai plus qu'il n'en fût dans les substances minérales précisément comme dans les sels que je venais de faire. Je ne fus plus étonné de voir surtout les variations d'acide ou de base se manifester particulièrement dans les silicates, parce que d'un côté ce sont les sels naturels les plus nombreux, de l'autre ce sont ceux qui offrent, et peuvent même offrir, le plus de diversité dans les degrés de saturation par les diverses bases. On peut encore ajouter que ce sont les sels minéraux qui se sont trouvés le plus fréquemment dans la nécessité de cristalliser ensemble, et par conséquent dans les circonstances les plus propres à déterminer des mélanges extrêmement variés.

J'étais donc conduit à appliquer la même méthode de discussion aux analyses des substances minérales, et particulièrement aux silicates; mais il se présenta une nouvelle difficulté. Il est clair que si je suis parvenu à discuter facilement les analyses des sels de mes dernières expériences, c'est parce que je connaissais d'avance les sels que j'avais employés, ou ceux qui pouvaient se former par double décomposition résultant de leur action mutuelle.

J'avais par là des données positives sur ce qui pouvait être mélangé dans tel ou tel sel, et je ne pouvais errer en aucune manière. Or il n'en fut plus de même lorsque je voulus discuter quelques-unes des nombreuses analyses minérales que nous possédons; j'ignorais le plus souvent ce qui pouvait avoir existé dans la solution où la substance avait cristallisé, et par conséquent quelle sorte de mélange il pouvait s'y trouver. J'étais réduit à me jeter à l'aventure dans le vague des suppositions, à faire successivement divers essais de calcul, qui le plus souvent ne menaient à rien. Je n'ai eu de résultats assez clairs que pour quelques analyses, dont les auteurs avaient donné quelques détails sur les substances qui accompagnaient celles qu'ils avaient examinées, ce qui fournissait des données sur ce que l'on devait supposer à l'état de mélange.

Pour pouvoir appliquer ma méthode de discussion, en évitant ces difficultés, j'imaginai de faire de nouvelles analyses, non plus d'une substance prise isolément, ce qui ne m'aurait pas plus avancé, mais de toutes les substances que je pouvais trouver réunies ensemble sur un même groupe. Par ce moyen, j'apprenais à connaître au moins quelques-unes des substances qui se trouvaient en présence au moment de la cristallisation, et j'approchais autant que possible d'avoir les données nécessaires pour les calculs subséquents. Les résultats que j'ai obtenus par ce travail sont assez clairs, assez positifs, pour être maintenant assuré que toutes les analyses que nous possédons se calculeraient avec la plus grande facilité, rentreraient complètement dans les lois que nous connaissons, si nous avions des données semblables à celles que je me suis procurées, sur les substances qui accompagnaient

celles qu'on a particulièrement examinées. Je ne doute nullement que, par de tels moyens, toutes les anomalies que nous connaissons ne disparaissent à l'avenir; il ne faut pour cela que noter exactement toutes les substances bien connues qui se trouvent associées à telle ou telle espèce qu'on examine, et analyser en même temps celles dont la composition n'est pas exactement déterminée. Mon travail fait déja disparaître, par exemple, l'anomalie qui résulte de la présence de l'alumine dans certaines variétés d'amphibole et de pyroxène, sans recourir à l'hypothèse que cet oxide est en remplacement de la silice; hypothèse qu'il faudrait commencer par prouver, et qui ne rend pas même raison de l'anomalie, parce qu'elle ne suffit pas pour discuter exactement les analyses, comme on le verra pour plusieurs de celles que nous allons citer.

Je vais maintenant donner le travail d'analyses minérales auquel je me suis livré, et qui m'a presque entièrement occupé depuis deux ans. J'en discuterai les résultats, d'abord en faisant abstraction des matières accompagnantes, puis en les prenant en considération, et faisant les calculs d'après les méthodes que j'indiquerai plus loin. J'espère qu'après la comparaison des résultats de ces deux modes de discussion, on ne balancera pas à admettre les conclusions que j'ai adoptées, et qu'à l'avenir on suivra la même marche pour toutes les analyses qu'on pourra faire.

§ II. *Recherches analytiques sur les substances minérales.*

1re SÉRIE D'ANALYSES.

Un groupe cristallin que j'avais à ma disposition présentait deux substances assez différentes par les caractères extérieurs; savoir, des cristaux d'un vert sombre en prismes rhomboïdaux, d'environ 124d, qu'on pouvait regarder comme de l'actinote; et une matière partie fibreuse, partie granulaire, d'un vert clair, que j'étais porté à regarder comme de l'épidote thallite. J'ai séparé les deux substances avec le plus de soin possible, en ne prenant rigoureusement pour l'une que des portions de cristaux, et pour l'autre que les parties granulaires les plus éloignées de la partie cristalline du groupe. J'ai soumis ces matières séparément à l'analyse, et j'en ai obtenu les résultats suivants:

a. Matière cristalline regardée comme actinote.

N° 1	Silice............	0,531	tenant oxigène 0,2758	:	9 +
	Alumine	0,041	 0,0191		
	Chaux...........	0,106	 0,0297	:	1
	Magnésie.........	0,104	 0,0402	:	3 +
	Bioxide de fer.....	0,218	 0,0496		
		1,000			

b. Matière granulaire d'un vert clair.

N° 2	Silice............	0,424	tenant oxigène 0,21996	:	3 —
	Alumine	0,273	 0,12751	:	2 —
	Chaux...........	0,109	 0,03062		
	Magnésie.........	0,011	 0,00426	:	1
	Bioxide de fer.....	0,183	 0,04167		
		1,000			

En comparant les quantités d'oxigène fournies par les différents oxides, on voit dans la première analyse que si on prend l'oxigène de la chaux pour unité, celui des autres bioxides réunis est à peu près 3, et celui de la silice à peu près 9 : on a par conséquent assez sensiblement les rapports que l'on connaît dans les amphiboles. Cependant on remarque que la somme des quantités d'oxigène de la magnésie et de l'oxide de fer est un peu plus de trois fois l'oxigène de la chaux, et que l'oxigène de la silice est un peu plus de 9; enfin l'alumine n'est pas employée dans cette comparaison.

Dans la seconde analyse, on voit qu'en prenant pour unité la somme des quantités d'oxigène fournies par les bioxides, l'oxigène de l'alumine se rapproche d'être 2, et celui de la silice 3 : ce sont donc à peu près les rapports qui constituent l'épidote; mais il manque de la silice, et surtout beaucoup d'alumine (1).

---

(1) Il n'est pas inutile de faire remarquer que j'ai adopté pour la composition de la silice, les données qui résultent des dernières recherches de M. Berzelius. J'ai admis 277,50 pour le poids de l'atome de silicium, d'où il résulte que le poids de l'atome de silice doit être représenté par 577,50, cet oxide renfermant 3 atomes d'oxigène, et la composition en poids par

Oxigène..........	51,95
Silicium..........	48,05
	100,00

C'est d'après ces données que j'ai calculé les quantités d'oxigène que renferme la silice dans les différentes analyses.

En adoptant ce changement, il en résulte que les différents silicates simples qui entrent dans la composition des minéraux ne sont plus tout-à-

Néanmoins il est assez probable que les deux substances analysées sont, tant d'après les analyses mêmes que d'après les caractères extérieurs, l'une de l'amphibole, l'autre de l'épidote, dans lesquelles il se trouve quelques matières accidentelles. En discutant ces analyses isolément, on peut de la première tirer une certaine quantité d'amphibole qui serait un mélange d'actinote et de trémolite, et on aurait un reste qu'on pourrait employer à son gré d'une manière ou d'une autre, en prenant celle qui paraîtrait la plus convenable. Cette analyse pourrait être représentée de la manière suivante :

Amphibole	Actinote	0,55	0,93
	Trémolite	0,38	
Trisilicate de fer			0,01
Silicate trialumineux			0,05
			0,99 (1).

Cette composition a l'avantage de ne rien laisser de libre, et, sous ce rapport, elle semble, au premier moment, avoir un grand degré de probabilité : cependant nous allons bientôt voir qu'on peut discuter l'analyse d'une manière plus probable encore, et qui est certainement la véritable.

---

fait formés comme l'indiquent les tables de proportion de M. Berzelius ; mais pour faciliter la vérification des calculs, qui vont nous occuper, j'ai réuni les compositions des silicates simples, dont nous avons besoin, dans un tableau à la fin de mes recherches sur les minéraux.

(1) La petite erreur que l'on trouve ici, et que l'on aura de même dans tous les modes de calcul, provient des décimales négligées dans l'établissement des quantités d'oxigène que renferment les différents oxides.

La seconde analyse considérée isolément peut aussi être discutée de manière à en tirer une certaine quantité d'épidote, qui sera un mélange de zoïsite et de thallite; mais de quelque manière qu'on s'y prenne pour le surplus, il restera toujours une certaine quantité de silice surabondante, et en définitive on aura le résultat suivant:

Épidote	Zoïsite	0,417	0,896
	Thallite	0,479	
(1)	Bisilicate de magnésie		0,027
	Bisilicate de fer		0,070
	Silice surabondante		0,006
			0,999

La surabondance de silice, quoiqu'elle soit peu considérable, qu'elle rentre peut-être dans la limite des mélanges que nous avons reconnus possibles par les expériences sur les sels, rend cependant ce résultat moins satisfaisant que celui que nous avons tiré de la première analyse.

Telle est la manière dont on peut considérer ces analyses lorsqu'on les regarde comme isolées; mais les deux substances que nous avons examinées se trouvant associées, on peut présumer qu'elles ont pu se mélanger entre elles, et dès-lors il convient d'essayer si cette supposition satisferait à la question. Or, en calculant d'après cette idée, on trouve que la première analyse peut être considérée comme représentant

(1) On peut, si l'on veut, considérer ces deux combinaisons comme constituant du pyroxène, en regardant cette substance comme n'étant simplement qu'un bisilicate, analogue à la wollastonite, ainsi que la plupart des analyses semblent le prouver.

un mélange d'amphibole et d'épidote, ainsi qu'il suit:

Amphibole	Actinote.............	0,479	0,863
	Trémolite............	0,384	
Épidote...	Thallite.............	0,106	0,136
	Zoïsite..............	0,030	
			0,999

La seconde analyse peut être considérée comme offrant un mélange semblable, dans lequel seulement c'est l'épidote qui est la matière dominante. Dans cette supposition, on trouve par le calcul

Épidote...	Thallite.............	0,527	0,898
	Zoïsite..............	0,371	
Amphibole	Actinote.............	0,060	0,102
	Trémolite............	0,042	
			1,000

Ces deux derniers résultats me paraissent tellement satisfaisants, que je n'hésite pas à les regarder comme certains. Si tous les minéralogistes-chimistes les admettent avec moi, on en tirera déja une conséquence très-remarquable : c'est l'explication de la présence de l'alumine dans diverses analyses d'amphibole, et par suite une preuve de ce que j'ai déja avancé relativement à cette substance. Cette même circonstance, par mélange d'autres matières, se représentera encore dans plusieurs autres analyses.

IIe SÉRIE D'ANALYSES.

Ici j'ai opéré sur les substances que renfermait une masse cristalline de l'île Saint-Jean dans les Antilles, rapportée ja-

dis par Richard. On y reconnaissait une matière verte bacillaire, une autre de même couleur à structure granulaire, et des cristaux rougeâtres en dodécaèdres rhomboïdaux passant au trapézoèdre. D'après les caractères extérieurs, je considérais les deux premières substances comme de l'épidote, et la troisième comme appartenant au groupe grenat. Les analyses ont fourni les données suivantes :

a. Matière verte bacillaire.

N° 3	Silice	0,409	tenant oxigène	0,21247	: 3 —
	Alumine	0,289		0,13499	: 2 —
	Chaux	0,162		0,04550	: 1
	Bioxide de fer	0,140		0,03188	
		1,000			

b. Matière verte granulaire.

N° 4	Silice	0,410	tenant oxigène	0,21299	: 3 —
	Alumine	0,289		0,13499	: 2 —
	Chaux	0,156		0,04382	: 1
	Magnésie	0,007		0,00271	
	Bioxide de fer	0,138		0,03142	
		1,000			

c. Cristaux rougeâtres dodécaèdres.

N° 5	Silice	0,403	tenant oxigène	0,20936	: 2 +
	Alumine	0,234		0,10930	: 1 +
	Chaux	0,210		0,05899	: 1
	Magnésie	0,037		0,01432	
	Bioxide de fer	0,116		0,02641	

On voit, par les quantités d'oxigène, que les deux premières

analyses se ressemblent, au point qu'il est bien évident qu'elles appartiennent à une même substance. Or, pour que cette substance fût de l'épidote, il faudrait que la silice, l'alumine et les bases bioxides fussent telles, que les quantités d'oxigène se trouvassent dans les rapports 3, 2 et 1 ; mais ici les bases bioxides sont surabondantes, et la silice l'est elle-même par rapport à l'alumine.

Dans la troisième analyse, les quantités d'oxigène de la silice, de l'alumine et des bases bioxides se rapprochent assez des rapports 2,1 et 1, qui constituent le grenat; mais on remarque que la silice et l'alumine sont un peu surabondantes.

Cependant les rapports ne sont pas tellement éloignés de ceux qu'on devrait avoir, qu'en considération des caractères extérieurs on ne puisse admettre que les deux premières substances appartiennent à l'épidote et la troisième au grenat, et que toutes trois sont seulement mélangées de matières étrangères. En considérant ces analyses isolément, on tirerait des premières une certaine quantité d'épidote, qui serait un mélange de zoïsite et de thallite, avec des silicates de fer et de magnésie, savoir, pour les premières :

Épidote	Zoïsite	0,6195	0,9373
	Thallite	0,3178	
Silicate de fer			0,0624
Silice surabondante			0,0002
			0,9999

et pour la seconde,

Épidote	Zoïsite........	0,598	0,940
	Thallite........	0,342	
Silicate de magnésie...............			0,012
Silicate de fer....................			0,049
			1,001

La troisième analyse donne une certaine quantité de grenat, qui est un mélange de grossulaire, d'almandin, et de grenat magnésien, avec un peu de silicate d'alumine et de silice surabondante, comme il suit :

Grenat	Grossulaire......	0,5634	0,9604
	Almandin........	0,2742	
	Magnésien.......	0,1228	
Silicate d'alumine.................			0,0389
Silice surabondante................			0,0006
			0,9999

Ces résultats sont très-admissibles, et, pour des analyses isolées, je ne balancerais pas à les adopter; mais ici nous pouvons avoir des résultats plus admissibles encore, parce qu'ils sont fondés en raison : le même échantillon présentant de l'épidote et du grenat, il est assez naturel de penser que les deux sortes de substances sont mélangées, et en essayant cette supposition, on trouve, pour la première analyse, la composition suivante :

Épidote	Zoïsite.........	0,432	0,805
	Thallite........	0,373	
Grenat.	Grossulaire.....	0,131	0,194
	Almandin.......	0,063	
			0,999

Pour la seconde analyse, on a

Épidote	Zoïsite.........	0,475	0,795
	Thallite........	0,320	
Grenat.	Grossulaire......	0,087	0,204
	Almandin........	0,093	
	Magnésien......	0,024	
			0,999

Enfin, pour la troisième analyse, on trouve

Grenat.	Grossulaire......	0,501	0,871
	Almandin	0,247	
	Magnésien	0,123	
Épidote	Zoïsite..........	0,090	0,129
	Thallite.........	0,039	
			1,000

Il n'y a point de restes, point d'erreurs, et il me paraît que ces résultats sont réellement ceux de la nature. Il y a ici une circonstance qu'il n'est pas inutile de remarquer : c'est l'absence du grenat magnésien dans l'épidote bacillaire, et sa présence, au contraire, dans l'épidote granulaire et dans les cristaux dodécaèdres. Or l'épidote granulaire a cristallisé d'abord, puisque c'est cette variété qui supporte les autres matières, et de plus, par suite de sa structure, il est à croire qu'elle a cristallisé rapidement; par conséquent il paraît que dans la nature, précisément comme dans les laboratoires, les mélanges se font d'autant plus facilement, que la solution est plus concentrée, et que, quand il s'est fait un premier dépôt, les matières de formules différentes s'isolent plus facilement les unes des autres. Ici le grenat magnésien, au moment

de la seconde cristallisation, s'est plutôt uni avec le grossulaire et l'almandin, qui sont de même formule, qu'avec l'épidote dont la formule est différente.

IIIe SÉRIE D'ANALYSES.

Dans cette partie de mon travail, j'ai examiné des substances qui composaient une masse cristalline de Csiklova, dans le Bannat, dans laquelle on distinguait :

a. Des cristaux légèrement verdâtres, translucides, offrant à l'intérieur quelques nuages opaques et plus blancs : ils étaient assez mal conformés, et m'ont paru cependant se rapporter à un prisme à bases carrées, et pouvoir être regardés comme de l'idocrase.

b. Une substance blanche, lamelleuse dans un sens, se clivant assez bien en prismes rhomboïdaux, et qui avait tous les caractères de la wollastonite.

c. Une matière d'un blanc-jaunâtre, légèrement nacrée, à fibres fines, un peu souples, contournées et parallèles, que j'ai regardée comme de la trémolite.

d. Une autre matière fibreuse, à fibres roides, cassantes, droites, divergentes, et d'un blanc mat, qui était en très-petite quantité, et dont j'ai eu à peine assez pour l'analyse.

e Carbonate de chaux, gris bleuâtre, clivable en rhomboèdres, formant en quelque sorte la pâte qui unissait les autres substances.

f. Une matière noire opaque, à poussière brune, en très-petits grains, ou poussière, disséminée dans toutes les substances, mais en très-petite quantité.

g. Une matière verte, également en très-petite quantité et

en petits grains, dont la réunion colorait plus particulièrement quelques portions de la wollastonite.

Les substances principales ont été choisies avec soin, les quatre premières ont été ensuite traitées à froid par l'acide hydrochlorique faible, afin d'enlever tout le carbonate de chaux; chacune d'elles a été ensuite triée de nouveau, puis réduite en poussière et traitée encore par l'acide. Enfin le résidu a été bien lavé, desséché pendant plusieurs jours par l'exposition au soleil, puis au feu dans un creuset de platine. Je me suis assuré que l'acide hydrochlorique ne renfermait aucune portion de silice, et par conséquent qu'il n'y avait point eu de silicate attaqué.

Toutes ces matières analysées séparément ont fourni les résultats suivants :

a. Matière regardée comme idocrase.

N° 6	Silice	0,411	tenant oxigène	0,2135	: 2 +
	Alumine	0,212		0,0990	: 1 —
	Chaux	0,371		0,1042	: 1
	Magnésie	0,006		0,0023	
	Péroxide de fer	traces			
		1,000			

b. Matière regardée comme wollastonite.

N° 7	Silice	0,531	tenant oxigène	0,2758	: 2 +
	Chaux	0,451		0,1267	: 1
	Magnésie	0,018		0,0069	
		1,000			

c. Matière fibreuse regardée comme trémolite.

N° 8	Silice	0,595	tenant oxigène	0,3091	: 9 + (Silice et Alumine)
	Alumine	0,014		0,0065	
	Chaux	0,123		0,0345	: 1
	Magnésie	0,268		0,1037	: 3
	Péroxide de fer	traces			
		1,000			

d. Matière fibreuse d'un blanc mat.

N° 9	Silice	0,616	tenant oxigène	0,3199	: 3 —
	Chaux	0,361		0,1014	: 1 (Chaux et Magnésie)
	Magnésie	0,023		0,0089	
		1,000			

e. Carbonate de chaux.

N° 10	Acide carbonique	0,432
	Chaux	0,466
	Magnésie	0,067
	Matières insolubles (1)	0,035
		1,000

ce qui correspond à

Carbonate de chaux	0,837
Carbonate de magnésie	0,138
Matières insolubles	0,035
	1,000

(1) Ces matières insolubles étaient formées d'une poussière noire, mêlée de petites aiguilles cristallines blanches, sans doute analogues aux matières fibreuses précédentes.

f. Matière en poussière noire.

N'ayant pu obtenir qu'une très-petite quantité de cette matière par la dissolution du carbonate de chaux, et n'ayant pu d'ailleurs la purger complètement des petites aiguilles cristallines blanches que le même carbonate renferme, je ne regarde l'analyse que comme approximative; elle a fourni

N° 11	Silice	0,39
	Péroxide de fer	0,26
	Chaux	0,35
		1,00

Peut-être cette matière est-elle une mélanite mélangée de quelque silicate de chaux.

g. Matière verte disséminée.

Je n'ai pu parvenir à isoler cette matière; je me suis dès-lors borné à essayer les parties de wollastonite les plus colorées par elle : j'ai reconnu de l'oxide de fer (probablement bioxide), de la silice, de l'alumine et de la chaux. Je pense que l'alumine et l'oxide de fer appartiennent à cette matière verte, qui est peut-être de la thallite.

En examinant ces analyses, on voit que la première peut être rapportée à la formule des grenats, qui est aussi celle de ce qu'on nomme idocrase, parce que la somme des quantités d'oxigène que renferment les trioxides est à peu près trois fois la somme de celles qui sont fournies par les bioxides. Cependant il y a une erreur sur l'alumine, qui est en trop petite quantité pour que son oxigène soit égal à celui qui est donné par la chaux et la magnésie : la silice, au contraire,

est un peu trop forte. Ainsi il y a nécessairement quelque mélange. En discutant cette analyse isolément, on en peut tirer une certaine quantité de grossulaire, avec des bisilicates de chaux et de magnésie, et un peu de silice surabondante, comme il suit :

Grenat grossulaire ou idocrase..........	0,9457
Bisilicate de chaux (wollastonite).......	0,0387
Bisilicate de magnésie..................	0,0104
Silice surabondante.....................	0,0051
	0,9999

Dans la seconde analyse, le rapport entre l'oxigène de la silice et la somme de l'oxigène des bases est à peu près celui de 2 à 1 ; par conséquent la substance peut être rapportée à la wollastonite. Cependant il y aurait alors une assez grande quantité de silice surabondante. En discutant cette analyse isolément, on peut en tirer, comme résultat le plus probable,

Wollastonite...............	0,938
Trisilicate de magnésie........	0,058
Silice surabondante..........	0,003
	0,999

Dans la troisième analyse, on remarque que la quantité d'oxigène de la silice réunie à celui que présente l'alumine, la quantité d'oxigène de la chaux, la quantité d'oxigène de la magnésie, forment à peu près les rapports 9, 1 et 3. On pourrait donc considérer cette analyse comme se rapportant à une trémolite dans laquelle une portion de la silice est remplacée par de l'alumine, et dans laquelle la discussion ferait admettre en outre un peu de bisilicate de magnésie

surabondant, ainsi qu'un peu de silice. Le calcul donnerait :

Trémolite pure	0,967
Aluminate double de même formule	0,022
Bisilicate de magnésie	0,001
Silice surabondante	0,009
	0,999

La quatrième analyse présente plus de difficultés : d'un côté, la silice est en trop grande quantité pour que la matière puisse être regardée comme une réunion de bisilicates ; d'un autre, la quantité de cette substance est trop faible pour en faire des trisilicates. En prenant cette analyse isolément, on ne peut faire avec les données qu'elle présente qu'un trisilicate de chaux, et un bisilicate de magnésie ; après quoi, il reste encore un peu de magnésie surabondante, savoir :

Trisilicate de chaux	0,946
Bisilicate de magnésie	0,050
Magnésie surabondante	0,003
	0,999

Voilà quels sont les résultats que l'on peut obtenir, en considérant toutes ces analyses isolément ; mais si on vient à les discuter les unes par les autres, en partant de l'observation que les substances qui les ont fournies sont associées entre elles, réunies sur le même groupe, on parvient à des résultats tout différents. Il est en effet assez naturel de penser que ces diverses substances sont mélangées entre elles, et ces mélanges sont beaucoup plus probables que ceux que l'on est forcé d'admettre dans les calculs précédents, dont l'adoption ne peut être fondée sur rien. Or, en calculant d'après

cette supposition, on parvient à des résultats qui me paraissent ne devoir laisser aucun doute sur leur réalité. La première analyse fournit alors le mélange suivant :

Grossulaire ou idocrase.......	0,946
Wollastonite................	0,033
Trémolite..................	0,021
	1,000

La seconde analyse est transformée en

Wollastonite...............	0,876
Trémolite..................	0,066
Trisilicate de chaux.........	0,058
	1,000

La troisième se prête merveilleusement à la même discussion, et, au lieu de la complication qu'on trouve en la discutant isolément, fournit le mélange suivant :

Trémolite.......................			0,942
Grenat	Magnésien......	0,042	0,058
	Grossulaire.....	0,016	
			1,000

Enfin, la quatrième analyse offre aussi exactement :

Trisilicate de chaux.......	0,907
Wollastonite.............	0,009
Trémolite...............	0,084
	1,000

Ces résultats sont sans contredit beaucoup plus simples que les précédents, et il est impossible de ne pas croire que

ce sont ceux même de la nature, puisqu'on ne trouve, comme mélange dans chaque substance, que les matières mêmes qui existaient sur le groupe, et qui y ont cristallisé séparément.

On voit encore ici un autre exemple de ce que j'ai avancé relativement aux amphiboles qui renferment de l'alumine; et cet exemple est d'autant plus important, que l'alumine y est en quantité telle qu'on pouvait réellement croire qu'elle se trouvait en remplacement de la silice, et par conséquent tendrait à confirmer les idées qu'on a eues jusqu'ici à l'égard de cette substance. La nouvelle discussion nous montre au contraire, avec toutes les probabilités qu'on peut désirer, je dirais même avec certitude, que l'alumine provient ici du mélange des grenats.

D'après ces détails, il est clair que les principales substances du groupe que nous avons examiné sont:

1° Une idocrase, ou un grossulaire, mélangée de wollastonite et de trémolite;

2° De la wollastonite, mélangée de trémolite et de trisilicate de chaux;

3° De la trémolite mélangée de grenat;

4° Du trisilicate de chaux en aiguilles cristallines agglomérées, qui n'avait encore été observé que par Hisinger dans ce qu'on a nommé la pierre calcaire d'Œdelfors, qui se trouve ici mélangé de wollastonite et de trémolite;

5° Du carbonate de chaux mélangé de carbonate de magnésie.

IVe SÉRIE D'ANALYSES.

Une masse cristalline du Zillerthal m'ayant offert diverses

substances entremêlées les unes avec les autres, quoique assez faciles à séparer, en y mettant un peu de soin, m'a donné l'idée d'examiner encore chacune d'elles en particulier pour comparer ensuite les résultats. J'ai extrait de cette masse:

a. Du quarz hyalin;

b. Une matière vitreuse, compacte, translucide, de couleur hyacinthe, que j'ai regardée comme du grenat;

c. Une matière partie blanche, partie bleuâtre, en fibres courbes assez fortes, que j'ai regardée comme du disthène;

d. Une matière verte, grossièrement fibreuse, que j'ai considérée comme de l'actinote;

e. Une matière blanche, nacrée, opaque, en paillettes élastiques empilées les unes sur les autres, qui devait se rapporter au groupe indéfini des micas.

Après avoir choisi les fragments un à un, les avoir examinés avec le plus grand soin, j'ai soumis chaque matière à l'analyse, et j'en ai obtenu les résultats suivants:

a. Quarz hyalin.

N° 12	Silice	0,997
	Alumine	0,002
	Oxide de titane	traces
	Chaux	traces
	Oxide de fer	traces
		0,999

L'oxide de titane provient probablement de très-petites aiguilles brunes que l'on voit disséminées çà et là dans le quarz, et qui, d'après les essais, appartiennent en effet à cette substance. L'alumine, la chaux et le bioxide de fer sont

probablement les bases de quelques silicates, impossibles à calculer, et qui sont sans doute aussi dissséminés.

b. Matière de couleur hyacinthe, considérée comme grenat.

N° 13	Silice	0,439	tenant oxigène 0,22806	: 2 +
	Alumine	0,200	0,09342	: 1
	Chaux	0,178	0,05000	: 1 +
	Magnésie	0,045	0,01741	
	Bioxide de fer	0,118	0,02687	
	Bioxide de manganèse	0,018	0,00395	
	Perte	0,002		
		1,000		

c. Substance regardée comme disthène.

N° 14	Silice	0,316	tenant oxigène 0,16416	: 1
	Alumine	0,678	0,31667	: 2 —
	Chaux	0,002	0,00056	
	Potasse	0,002	0,00034	
	Acide fluorique	traces		
		0,998		

d. Matière regardée comme actinote.

N° 15	Silice	0,531	tenant oxigène 0,27585	: 9 +
	Alumine	0,017	0,00794	
	Chaux	0,114	0,03203	: 1 +
	Magnésie	0,078	0,03019	: 3
	Bioxide de fer	0,256	0,05819	
	Bioxide de manganèse	0,002 ?	0,00044	
	Potasse	traces		
	Acide fluorique	traces		
	Perte	0,002		
		1,000		

e. Matière micacée.

	Silice	0,513	tenant oxigène	0,26650
	Alumine	0,319		0,14900
	Magnésie	0,031		0,01200
N° 16	Chaux	0,052		0,01461
	Potasse	0,062		0,01051
	Acide fluorique	0,021		0,01527 (1)
	Perte	0,002		
		1,000		

La première de ces analyses ne présente aucun sujet de discussion, puisqu'à l'exception de l'alumine, qui est déja en très-petite quantité, les divers oxides ne sont pas définis.

Dans la seconde analyse, on voit que l'oxigène de l'alumine approche d'être égal à la somme des quantités d'oxigène des bases bioxides; mais l'oxigène de la silice est un peu plus du double, de sorte qu'on pourrait considérer cette matière comme un grenat mélangé de silice. En discutant l'analyse isolément, on trouve qu'elle doit former :

Grenat	Grossulaire	0,478	
	Almandin	0,272	0,899
	Magnésien	0,149	
Silicate de fer			0,005
Silicate de manganèse			0,026
Silice surabondante			0,070
			1,000

(1) Je regarde ici l'acide fluorique comme renfermant de l'oxigène, parce qu'il en résulte plus de facilité dans les calculs; mais je ne doute pas que cette substance ne soit un corps simple.

Dans la troisième analyse, on voit que l'oxigène de l'alumine approche d'être le double de l'oxigène de la silice; de sorte que la substance doit être réellement du disthène, mais mélangé avec quelque matière étrangère. En discutant cette analyse isolément, on trouve :

Disthène..................	0,9827
Trisilicate de chaux.......	0,0050
Trisilicate de potasse......	0,0039
Silice surabondante	0,0060
	0,9976

Dans la quatrième analyse, on peut, à la rigueur, admettre comme approximatif que la somme des quantités d'oxigène fournies par la magnésie, le bioxide de fer, le bioxide de manganèse, est à l'oxigène de la chaux dans le rapport de 3 à 1, et à l'oxigène de la silice dans le rapport de 3 à 9; par conséquent, on peut regarder la matière à laquelle elle se rapporte comme étant de l'amphibole; mais la chaux et la silice se trouvent en trop grande quantité, et de plus, l'alumine n'est pas employée. En extrayant l'amphibole, il reste du silicate de chaux, du silicate d'alumine et de l'alumine surabondante, comme il suit:

Amphibole	Trémolite.....	0,288	0,954
	Actinote......	0,661	
	Manganésien...	0,005	
Silicate de chaux...................			0,014
Silicate d'alumine...................			0,028
Alumine surabondante..............			0,002
			0,998

Quant à la matière micacée dont la cinquième analyse est

l'objet, on n'en peut rien tirer, quelque supposition que l'on fasse. Si on regarde l'acide fluorique comme combiné avec la chaux, ce qui ne me paraît guère probable ici, les bioxides, l'alumine et la silice se trouveraient en telles quantités, que les portions d'oxigène qui leur correspondent pourraient être considérées comme étant dans le rapport des nombres 1, 6 et 12, ce qui donnerait la formule

$$4\dddot{A}\dddot{S}i + \left.\begin{matrix}\ddot{M}a\\ \ddot{P}o\end{matrix}\right\} \dddot{S}i^4$$

Mais je suis loin de croire que ce soit là la composition réelle de ce mica.

Si, au lieu de considérer ces analyses isolément, on profite de la connaissance de l'association des diverses matières, qui conduit à penser qu'elles peuvent s'être mélangées les unes avec les autres pendant la cristallisation, on peut parvenir à d'autres résultats qui sont beaucoup plus satisfaisants que les précédents. En prenant cette observation en considération, on trouve que la seconde analyse peut être transformée comme il suit :

Grenat...	Grossulaire..........	0,433	0,827
	Almandin..........	0,217	
	Manganésien..........	0,096	
	Magnésien (1).....	0,081	
Amphibole	Trémolite..........	0,079	0,146
	Actinote..........	0,067	
Disthène?..........			0,027
			1,000

1) J'ai fait ici du grenat magnésien pour avoir le plus possible de sub-

La troisième analyse ne se prête pas aussi bien au calcul que la précédente : la présence de la potasse et les traces d'acide fluorique peuvent bien faire soupçonner qu'il y a un mélange d'une petite quantité de mica; mais l'acide étant indéterminé, il est impossible de mettre le problème en équation. Cependant, par une méthode de tâtonnement approximatif, que je donnerai plus loin, parce qu'elle peut fournir quelques idées dans des cas analogues, je suis parvenu à un résultat qui doit être bien près du véritable, et j'ai trouvé que l'analyse pouvait prendre la forme suivante :

Disthène.............	0,968
Mica..............	0,031
	0,999

Si ce n'est pas là le véritable résultat, il a du moins l'avantage de satisfaire à l'analyse, d'être beaucoup plus simple que celui que nous avons obtenu ci-dessus, et plus en harmonie avec les substances que présente la masse cristalline.

La quatrième analyse présente aussi quelques difficultés par suite des traces d'acide fluorique, qui annoncent également le mélange d'une certaine quantité de mica. Ce qui se présente de plus simple est évidemment de négliger ces traces d'acide, que nous n'aurions peut-être pas aperçues, si, par suite de la présence du mica sur le groupe, nous n'avions imaginé de les chercher avec soin : on parvient alors à un

---

stances de cette formule; mais le calcul laisse une indétermination, comme nous en verrons des exemples dans la théorie de la discussion, et l'on peut indifféremment employer la magnésie à faire du grenat ou à faire un peu plus de trémolite.

résultat qui approche sans doute beaucoup de celui de la nature. Mais, après avoir obtenu ce résultat, j'ai eu l'idée de pousser plus loin l'exactitude par une méthode de tâtonnement analogue à celle que j'ai employée pour l'analyse précédente : je suis alors arrivé au résultat que je vais présenter ici, sauf à l'établir plus loin par une discussion approfondie; j'en ai conclu que la substance analysée est un mélange de

Amphibole	Actinote.......	0,647	0,932
	Trémolite......	0,285	
Grenat....	Grossulaire	0,026	0,043
	Almandin......	0,012	
	Manganésien...	0,005	
Matière micacée....................			0,024
			0,999

Cette analyse nous offre encore un exemple de l'explication, très-probablement véritable, de la présence de l'alumine dans les amphiboles : ici cette substance appartient aux grenats et au mica.

Conclusions de ces diverses analyses.

Telles sont les recherches que j'ai cru devoir faire pour établir mon opinion : je pense qu'elles sont suffisantes pour démontrer positivement, qu'il en est des substances minérales précisément comme des sels que j'ai employés dans mes expériences, et que toutes celles qui se sont trouvées dans la même solution se sont mélangées les unes avec les autres au moment de la cristallisation, et plus ou moins, suivant les circonstances diverses qui l'ont accompagnée. Ces recher-

ches font voir également qu'on peut appliquer aux mélanges minéraux le mode de calcul que j'ai employé pour les mélanges de sels. Par ce moyen, on parvient à séparer les diverses matières que l'analyse a nécessairement confondues, et à ramener cette analyse à une forme claire, précise, qui présente avec une très-grande probabilité, je pourrais même dire avec certitude, lorsqu'on a des données suffisantes, la composition du minéral. Par conséquent, on doit arriver de cette manière à avoir une détermination précise de l'espèce à laquelle on doit rapporter telle ou telle substance qu'on a analysée.

Ce fait important une fois bien établi par un nombre suffisant d'expériences sur les minéraux mêmes, et ici j'ai douze analyses comparables dont le résultat de la discussion est parfaitement clair, il n'est plus aussi indispensable de faire pour une seule substance autant d'analyses que j'y ai été obligé, lorsqu'il fallait vérifier la manière de voir à laquelle j'avais été conduit. Maintenant il suffira souvent, pour pouvoir discuter convenablement l'analyse d'une substance, d'avoir noté avec soin toutes celles qui lui sont associées dans la nature. Si ces matières accompagnantes sont bien connues dans leurs lois de composition, il ne sera pas toujours nécessaire de les analyser, au moins exactement; il suffira de les essayer pour savoir quelles sont les bases qui dominent, afin de déterminer quelles sont celles que l'on doit soustraire de la substance qu'on a particulièrement à examiner. Si l'on ne connaissait pas ces substances dominantes dans tel ou tel minéral associé à celui qu'on a particulièrement en vue, il n'en résulterait pas même une erreur bien grave : on serait seulement dans le cas d'admettre en mélange une substance

de telle base, tandis que peut-être on en devrait admettre une autre, de même formule, d'une base différente. Mais, quelle que soit la base, on n'en saurait pas moins quelles sont les formules mélangées et quelle est la formule qui domine dans le mélange; cela suffit pour expliquer les divergences apparentes de l'analyse sous le rapport des proportions définies, et classer convenablement la matière. On n'a besoin d'analyser exactement les matières accompagnantes que dans le cas où leur composition est douteuse, comme, par exemple, lorsqu'il s'agit des matières micacées; car alors il serait impossible d'établir aucune discussion raisonnable.

Il suit de là qu'on peut très-bien discuter des analyses isolées, pourvu qu'on ait quelques renseignements sur les espèces de substance qui accompagnent celles dont on a l'analyse. C'est ainsi que j'ai pu discuter les analyses suivantes, qui se trouvaient accompagnées de renseignements suffisants, soit parce que les auteurs les ont donnés, soit parce qu'on sait d'une manière générale quelles sont les diverses substances que l'on trouve dans la localité d'où celle qui a été analysée a été tirée.

Applications à quelques analyses de pyroxène.

J'avais fait depuis long-temps, bien avant même d'avoir les idées de discussion auxquelles je suis conduit, l'analyse d'un pyroxène d'ala, qui m'avait fourni

N° 17	Silice.............	0,523 tenant oxigène	0,2717	: 2 +
	Alumine..........	0,007	0,0033	
	Chaux...........	0,242	0,0679	
	Magnésie.........	0,099	0,0383	: 1
	Bioxide de fer....	0,128	0,0291	
		0,999		

où l'on peut voir en gros le rapport de 1 à 2 entre l'oxigène des oxides électro-positif et celui des oxides électro-négatif; mais il y a cependant quelques divergences. Or ce pyroxène, en petits cristaux d'un vert foncé, reposait sur une roche de grenat rougeâtre, parsemée elle-même de pyroxène blanchâtre; par conséquent il était à présumer que c'était à ces grenats qu'appartenait l'alumine de l'analyse. En la discutant d'après cette observation, j'ai trouvé que la substance devait renfermer

Pyroxène ou mélange de	$\ddot{C}a^3 \dddot{S}i^4$	0,471	0,941
	$\ddot{M}^3 \dddot{S}i^4$	0,230	
	$\ddot{F}^3 \dddot{S}i^4$	0,240	
Trémolite			0,024
Grenat			0,033
			0,998

J'ignore d'où vient la trémolite; j'ai été conduit à la chercher ici, en voyant qu'après avoir extrait le grenat, les restes n'étaient pas dans le rapport qui constitue le pyroxène, et que la silice était surabondante, ce qui indiquait un mélange de silicate d'un ordre plus élevé; dès-lors la trémolite, qui renferme un trisilicate, se présentait naturellement. Il est possible qu'il y ait quelques petits cristaux d'amphibole dans la roche, quoique je n'en aie pas aperçu; car, dans une analyse même de cette roche, j'en ai également trouvé des traces (voyez le § suivant). Il paraît, en général, que le mélange du pyroxène et de l'amphibole est assez commun, comme on le verra encore dans les analyses suivantes, même sans que les deux substances soient réunies sur le même groupe.

D'après cette analyse et le résultat de la discussion, je suis persuadé qu'il en est des pyroxènes comme des amphiboles, que l'alumine qu'on y trouve parfois provient d'un mélange de quelque silicate alumineux, et qu'elle n'est pas en remplacement de la silice, comme on l'avait aussi pensé. Par suite de cette réflexion, j'ai essayé de discuter plusieurs des analyses de pyroxènes que nous possédons; mais je n'ai rien pu tirer de la plupart d'entre elles, ce qui tient sans doute à ce qu'on ne connaît pas exactement les matières qui sont associées à ces substances. J'ai en vain essayé la supposition d'un mélange de grenat, de wernerite, d'épidote, sans parvenir à aucun résultat. Le pyroxène de Sahla est le seul qui se soit prêté à la discussion, en y supposant un mélange de grenat que l'on rencontre dans la même localité, et dont l'analyse a été faite par M. Bredberg. M. Henry Rose a tiré de cette variété de pyroxène la composition suivante :

N° 18	Silice	0,5486	tenant oxigène	0,2849
	Chaux	0,2357		0,0662
	Magnésie	0,1649		0,0638
	Protoxide de fer	0,0444		0,0101
	Oxide de Manganèse	0,0042		0,0009
	Alumine	0,0021		0,00098

et je trouve par le calcul que ce doit être un mélange de

Pyroxène ou mélange de	$\dot{C}a^3 \dddot{S}i^4$	0,4690	0,9061
	$\dot{M}^3 \dddot{S}i^4$	0,3545	
	$\dot{F}^3 \dddot{S}i^4$	0,0826	
Grenat	Manganésien	0,0096	0,0104
	Almandin	0,0008	
Trémolite			0,0830
			0,9995

Je ne sais pas si c'est bien là le résultat de la nature; mais du moins cette supposition satisfait mieux que toutes les autres que l'on peut faire, puisqu'il n'y a aucun reste, aucune substance que l'on ne connaisse déja parmi les minéraux, et qu'on ne trouve même à Sahla : il faut cependant en remettre la vérification à des observations futures. On aura également à décider si le grenat mélangé est de l'espèce que nous avons supposée : pour cela, il faudra faire l'analyse des grenats que l'on peut rencontrer à Sahla avec le pyroxène. Nous avons l'analyse d'un grenat de Sahla par M. Bredberg; mais, d'un côté, j'ignore si ce grenat se trouve avec le pyroxène; et de l'autre, je n'en connais que la formule dans laquelle M. Wachmeister a admis du péroxide de fer que l'analyse de M. Rose ne renferme pas. Les bases bioxides de ce grenat sont la chaux et la magnésie, de sorte que les oxides de manganèse et de fer, que j'ai admis pour faire les grenats de l'analyse qui nous occupe, devraient peut-être rentrer dans le pyroxène. Tout cela est heureusement très-peu important, théoriquement parlant, la chose principale étant de savoir que la substance renferme une grande quantité de pyroxène de diverses bases, avec un peu d'un grenat quelconque et de l'amphibole que l'on peut prendre aussi à base quelconque.

Après avoir cherché à discuter quelques analyses de pyroxène, où l'on avait trouvé de l'alumine, j'ai imaginé de voir si l'on pourrait vérifier une opinion émise par M. Henry Rose, relativement à certaines variétés de pyroxène de Sahla, qui ont si peu de dureté, qu'ils se laissent souvent rayer par l'ongle. Ce savant chimiste a conclu de l'inspection des lieux, des caractères minéralogiques de la matière, de sa pro-

priété de blanchir par l'action du feu en plein air, et de noircir, au contraire, par l'action du feu en vase clos, en même temps qu'elle donne de l'eau d'une odeur empyreumatique, que ces sortes de pyroxène devaient être mélangés de serpentine ou de *speckstein*. Il a fait des analyses pour vérifier cette supposition, et il en a conclu qu'elle était vraie; mais cette conclusion porte sur la grande quantité de magnésie qu'il a trouvée et sur la présence de l'eau : or elle ne peut avoir le degré de certitude que l'on doit désirer, qu'autant qu'on sera parvenu à séparer les matières par le calcul, et à dire quelle est la quantité de pyroxène qui s'y trouve. Tant que ce calcul n'est pas fait, la conclusion reste nécessairement dans le vague : aussi trouve-t-on dans le Mémoire de M. Henry Rose les expressions vagues de serpentine ou de speckstein, sous lesquelles on confond peut-être dix substances différentes. Pour compléter le travail de M. Henry Rose, j'ai soumis ses analyses au mode de calcul que j'ai imaginé pour mes expériences, et je vais en donner le résultat.

Dans une de ses analyses, M. Henry Rose a trouvé

N° 19	Silice..........	0,6065	tenant oxigène 0,3150
	Chaux..........	0,0497	 0,0139
	Magnésie........	0,2520	 0,0975
	Protoxide de fer...	0,0418	 0,0095
	Oxide de manganèse	0,0078	 0,0017
	Eau............	0,0438	 0,0389
		1,0016	

En la discutant suivant ma méthode, je trouve qu'elle présente un mélange de pyroxène avec une substance de la for-

mule $\dot{M}\dddot{S}i^2 + Aq$, formule qui diffère de toutes celles qui sont admises dans les serpentines ou les specksteins. Cette substance se rapporterait à l'espèce à laquelle j'ai conservé le nom de talc, si elle ne renfermait un atome d'eau. Elle diffère de la magnésite par cette même quantité d'eau, aussi bien que de la substance à laquelle M. Berzélius a conservé le nom de stéatite (1). Je parviens aux quantités numériques suivantes :

Pyroxène ou mélange de	$\dot{C}a^3\dddot{S}i^4$	0,1032	0,374
	$\dot{M}^3\dddot{S}i^4$	0,1782	
	$\ddot{F}^3\dddot{S}i^4$	0,0784	
	$\dot{M}a^3\dddot{S}i^4$	0,0143	
$\dot{M}\dddot{S}i^2 + Aq$	Si	0,4031	0,623
	M	0,1803	
	Aq	0,0392	
Eau hygrométrique			0,004
			1,001

J'ai supposé ici que tout le fer appartient au pyroxène ; cependant il est possible qu'il y en ait un peu dans le silicate magnésien comme matière colorante : mais ce sont là des minuties de détails qu'on ne pourra établir que par une analyse directe de la matière magnésienne, en la prenant dans les parties pures, si toutefois il en existe à Sahla.

(1) Je dois remarquer que cette stéatite de M. Berzélius, dont la formule est $2\dot{M}\dddot{S}i^2 + Aq$, diffère tout-à-fait de la substance à laquelle j'ai conservé ce nom dans mon traité, dont la formule est $\dot{M}^3\dddot{S}i^4 + 6Aq$. C'est par conséquent encore une autre espèce dans cet immense groupe magnésien.

L'analyse d'une autre variété a fourni au même chimiste

N° 20	Silice	0,5808	tenant oxigène	0,3017
	Chaux	0,1124	....	0,0316
	Magnésie	0,2228	....	0,0862
	Protoxide de fer	0,0530	....	0,0120
	Alumine	0,0047	....	0,00219
	Eau	0,0311	....	0,02766
		1,0048		

En la discutant de la même manière, j'ai trouvé le même mélange, plus une certaine quantité de grenat, et je parviens aux quantités numériques suivantes :

Pyroxène ou mélange de	$\dot{C}a^3\dddot{S}i^4$	0,234	0,597
	$\dot{M}^3\dddot{S}i^4$	0,284	
	$\dot{F}^3\dddot{S}i^4$	0,079	
$\dot{M}\dddot{S}i^2 + Aq$	Si	0,243	0,376
	M	0,109	
	Aq	0,024	
Grenat almandin			0,019
Eau hygrométrique			0,008
			1,000

Il reste à décider si c'est bien l'almandin qui est ici mélangé, ou si ce n'est pas une autre espèce de grenat. Il est à présumer que c'est plutôt un grenat de chaux, et peut-être de magnésie, comme l'indique la formule tirée de l'analyse de M. Bredberg ; l'oxide de fer rentrerait alors dans le pyroxène, ou peut-être dans le trisilicate magnésien.

Enfin, une troisième analyse du même auteur a fourni les

données suivantes :

N° 21	Silice	0,5830	tenant oxigène	0,30286
	Chaux	0,0989		0,02780
	Magnésie	0,2422		0,09370
	Oxide de manganèse	0,0068		0,00149
	Protoxide de fer	0,0424		0,00960
	Alumine	0,0011		0,00051
	Eau	0,0311		0,02766
		1,0055		

et je trouve par le calcul que ce doit être un mélange de

Pyroxène ou mélange de	$\dot{M}^3\dddot{Si}^4$	0,3604	0,6537
	$\dot{Ca}^3\dddot{Si}^4$	0,2059	
	$\dot{F}^3\dddot{Si}^4$	0,0749	
	$\dot{Ma}^3\dddot{Si}^4$	0,0125	
$\dot{M}\dddot{Si}^2+Aq$	Si	0,1597	0,2623
	M	0,0715	
	Aq	0,0311	
Talc, $\dot{M}\dddot{Si}^2$, (serpentine de Berzélius)			0,0838
Grenat almandin			0,0052
			1,0050

Ainsi, l'opinion de M. Henry Rose se trouve vérifiée et précisée ; et cela nous fait voir de nouveau qu'une matière peut encore conserver quelques-uns de ses caractères, quoiqu'elle se trouve mélangée d'une très-grande quantité d'une autre.

Application à quelques analyses d'amphiboles.

Les observations que j'ai faites sur les amphiboles me conduisant à voir que l'alumine qu'on y trouve quelquefois n'est pas du tout en remplacement de la silice, j'ai cherché à calculer quelques-unes des analyses d'amphiboles qui ont été faites par différents auteurs; mais faute d'avoir des renseignements précis, je n'ai pu discuter que deux des analyses de M. Bonsdorff, et ce sont celles des deux grammatites d'Aker. Ce chimiste a indiqué ces matières comme se trouvant accompagnées de spinelle, de mica, et de paranthine compacte (wernerite compacte); et il était naturel de penser que l'une ou l'autre de ces matières se trouvait mélangée avec celle qu'il a analysée.

La grammatite sombre lui a fourni

N° 22	Silice	0,4721	tenant oxigène 0,2452
	Alumine	0,1394	0,0651
	Magnésie	0,2186	0,0846
	Chaux	0,1273	0,0357
	Oxidule de fer	0,0228	0,0052
	Oxidule de manganèse	0,0057	0,0012
	Acide fluorique	0,0090	0,0065
	Eau	0,0044	
		0,9993	

En la discutant d'après les renseignements fournis par l'auteur, je trouve qu'on peut la considérer comme renfermant une petite quantité de spinelle avec un peu de pyroxène, en admettant toutefois que l'acide fluorique est combiné

avec de la chaux, pour former le fluate de chaux ordinaire. Je trouve pour chaque substance les quantités suivantes :

Amphibole	Trémolite.........	0,704	0,770
	Actinote..........	0,059	
	Manganésien......	0,007	
Pyroxène.	$\ddot{Ca}^3 \dddot{Si}^4$..........	0,020	0,026
	$\ddot{M}^3 \dddot{Si}^4$..........	0,006	
Spinelle, $\ddot{M} \dddot{A}^4$	....		0,167
Fluate de chaux	....		0,032
Eau hygrométrique	....		0,004
			0,999

La grammatite claire du même lieu a fourni au même auteur :

N° 23	Silice..............	0,5624	tenant oxigène	0,2921
	Alumine	0,0432	....	0,0202
	Magnésie...........	0,2413	....	0,0934
	Chaux..............	0,1295	....	0,0364
	Oxidule de fer......	0,0100	....	0,0023
	Oxidule de manganèse	0,0026	....	0,0006
	Acide fluorique......	0,0078	....	0,0057
	Eau...............	0,0050		
		1,0018		

En discutant cette analyse, on voit qu'en y supposant du spinelle, on n'arrive pas à un résultat exact; mais la supposition d'un mélange de wernerite satisfait complètement, et l'on trouve

Amphibole	Trémolite	0,6863	0,7066
	$\ddot{F}\dddot{S}i^2+\ddot{M}^3\dddot{S}i^4$	0,0203	
Pyroxène.	$\dot{M}^3\dddot{S}i^4$	0,1249	0,1430
	$\dot{F}^3\dddot{S}i^4$	0,0132	
	$\dot{M}a^3\dddot{S}i^4$	0,0049	
Wernerite			0,1190
Fluate de chaux			0,0260
Eau hygrométrique			0,0050
			0,9996

Cependant, la seconde espèce d'amphibole qu'on est obligé d'admettre, et qui, sans être impossible, ne s'est pas encore présentée naturellement, m'a fait chercher si on ne pouvait pas calculer cette analyse autrement; j'ai imaginé de voir si elle ne renfermerait pas à la fois du spinelle et de la wernerite, et j'ai trouvé, en faisant ce calcul, qu'elle pouvait être considérée comme un mélange de

Trémolite	0,8542
Wernerite $6\dddot{A}\dddot{S}i+\left.\begin{matrix}\dot{C}a\\ \dot{M}\\ \dot{F}\end{matrix}\right\} 3\,\dddot{S}i^2$	0,0863
Spinelle	0,0133
Pyroxène $\dot{F}^3\dddot{S}i^4$, $\dot{M}a^3\dddot{S}i^4$	0,0148
Fluate de chaux	0,0281
Eau hygrométrique	0,0050
	1,0017

Il y a ici plusieurs solutions possibles, parce que l'on trouve

plus d'inconnues qu'on ne peut établir d'équations; mais les limites des solutions sont assez resserrées, comme on le verra dans la théorie de la discussion, où je donnerai cet exemple de calcul. J'ai adopté ici la solution qui donne à peu près le maximum de wernerite.

Dans la discussion de ces deux analyses d'amphibole, j'ai admis que l'acide fluorique était combiné avec la chaux; mais cela est tout-à-fait hypothétique, et il serait bien possible qu'il se trouvât dans quelque autre substance, peut-être dans le mica, dont je n'ai pu supposer l'existence dans la discussion, parce que je n'en connais nullement la composition.

On voit, par tous les exemples que renferme ce paragraphe, que les analyses des substances minérales peuvent présenter beaucoup plus de clarté et de précision qu'elles n'en ont eu jusqu'ici, et que, comme je l'ai avancé, on peut espérer de voir disparaître les nombreuses anomalies qu'on y remarque. A la vérité, il faut, pour atteindre ce but, un peu plus de travail qu'on n'en a eu jusqu'ici, par suite des compositions comparatives, qu'il faudra souvent se procurer, pour les minéraux associés à celui qu'on a spécialement en vue; mais c'est un fort léger inconvénient, lorsqu'on peut espérer par là d'arriver à une détermination assez positive de telle ou telle espèce, pour qu'on ne puisse rien y objecter. Cela nous montre aussi de nouveau que ce n'est que dans quelques cas fort restreints qu'on peut se fier à une seule analyse pour établir une espèce, puisque nous voyons si souvent des mélanges qui peuvent nous induire facilement en erreur.

On voit aussi combien il est important de bien étudier les associations des minéraux, puisque c'est par là qu'on peut

éclairer la discussion, qui, sans cela, devient tout-à-fait impossible, et par suite laisse la spécification dans le plus grand vague. C'est une nouvelle raison, jointe à tant d'autres que nous avons déja, pour que les naturalistes se livrent de plus en plus à ce genre de recherches, et ne se bornent pas, comme il arrive le plus souvent, à acheter des minéraux chez les marchands, par lesquels ils n'ont le plus ordinairement que des renseignements très-inexacts.

§ III. *Recherches chimiques sur les roches composées.*

Jusqu'ici une analyse de roche composée était tout-à-fait insignifiante, par la raison qu'on trouvait en bloc les différents éléments que la nature avait partagés entre les diverses substances qui constituent cette roche. Ce n'était qu'en étudiant les roches sur place, en observant les différents passages entre les points où les éléments étaient distincts et ceux où la masse devenait compacte, qu'on acquérait quelques idées sur la nature de ces diverses parties. On formait ainsi quelques groupes, auxquels on rattachait bien ou mal les matières qui présentaient à peu près les mêmes caractères extérieurs. Mais on conçoit combien les déterminations doivent devenir vagues par de tels moyens, combien d'erreurs il a dû en résulter et en résultent encore tous les jours. Actuellement je crois que les analyses de roches, aidées des considérations minéralogiques, peuvent devenir d'une très-grande utilité, parce que, d'après le travail que je viens de faire, on sera souvent en état, par le calcul, de confirmer les idées qu'on se sera formées sur place, ou de les détruire en y substituant quelques vérités. C'est dans l'idée de donner

quelques exemples de ces applications, que j'ai fait diverses analyses, dont je vais rapporter quelques-unes.

Roche de grenat d'Ala.

Les montagnes des environs d'Ala présentent, au milieu des micaschistes, des couches peu épaisses d'une roche d'un blanc-rougeâtre, dont j'avais observé le passage jusqu'à des masses granulaires évidemment formées de grenat rougeâtre et de pyroxène d'un blanc-verdâtre. J'avais dès-lors considéré cette roche comme étant un mélange intime de ces substances, et depuis j'en ai fait l'analyse pour voir si mon opinion était fondée; j'en ai tiré

N° 24	Silice	0,467	tenant oxigène 0,2426
	Alumine	0,116	0,0542
	Chaux	0,326	0,0916
	Magnésie	0,056	0,0216
	Bioxide de fer	0,035	0,0079
	Oxide de manganèse	traces	
		1,000	

En discutant cette analyse, j'ai vu mon hypothèse se vérifier complètement; car on peut regarder l'échantillon qui m'a servi comme formé de

Grenat grossulaire			0,519
Pyroxène ou mélange de	$\dot{Ca}^3\dddot{Si}^4$	0,273	0,468
	$\dot{M}^3\dddot{Si}^4$	0,129	
	$\dot{F}^3\dddot{Si}^4$	0,065	
Trémolite			0,014
			1,001

Le calcul fait seulement découvrir une petite quantité de trémolite que je n'avais pas aperçue dans la roche, et qui probablement est mélangée ici avec le pyroxène, comme il arrive fréquemment : c'est aussi ce que nous avons observé dans le pyroxène vert d'Ala, dont nous avons vu plus haut l'analyse (n° 17) et la discussion.

Grünstein compacte de la vallée d'Hodritz, près Schemnitz.

Dans mon voyage en Hongrie, j'ai cru remarquer des passages évidents entre la siénite parfaitement caractérisée et des porphyres à pâte verte compacte, remplie de petits cristaux que je regardais comme du feldspath. De même j'avais vu des passages entre ces porphyres et des roches compactes homogènes, de couleur verte, que j'ai regardées comme des mélanges intimes de feldspath et d'amphibole, comme de véritables grünsteins des géologues allemands. J'ai analysé depuis une de ces roches compactes, d'une des localités où le passage au porphyre et à la siénite m'avait paru le plus évident, et je l'ai choisie parmi les roches que j'ai rapportées de la vallée d'Hodritz, près Schemnitz. Cette roche m'a fourni

N° 25	Silice	0,632	tenant oxigène	0,3283
	Alumine	0,142		0,0663
	Chaux	0,025		0,0070
	Magnésie	0,020		0,0077
	Bioxide de fer	0,058		0,0131
	Potasse	0,112		0,0189
	Soude	0,012		0,0031
	Eau	003		
		1,004		

Le calcul de cette analyse m'a conduit à admettre le mélange suivant :

Feldspath			0,672
Albite			0,103
Amphibole	Trémolite	0,076	0,227
	Actinote	0,151	
Eau hygrométrique			0,003
			1,005

Par conséquent, la conjecture que j'avais faite se trouve vraie; mais j'ai découvert par cette analyse et sa discussion la présence de l'albite, qui offre une circonstance extrêmement remarquable. En effet, c'est cette substance qui forme la base des trachytes, dont la masse repose partout en Hongrie sur le terrain siénitique, avec lequel elle est quelquefois tellement liée, que l'on ne sait où l'un commence et l'autre finit, et que ce n'est que dans les extrêmes qu'on reconnaît des caractères parfaitement tranchés. La présence de l'albite dans les porphyres siénitiques rend cette liaison encore plus remarquable.

Grünstein noir de Schemnitz.

Ayant admis que les matières compactes de couleur verte étaient des grünsteins, j'ai été conduit par l'analogie de gisement à regarder d'autres matières compactes, mais de couleur noire, comme des variétés de la même roche; j'ai été curieux de vérifier ma conjecture sous ce nouveau point de vue, et j'ai analysé une de ces roches que j'avais récoltée sur la route de Schemnitz à Steinbach; elle m'a présenté

N° 26	Silice	0,600 tenant oxigène	0,3117
	Alumine	0,123	0,0574
	Chaux	0,014	0,0039
	Bioxide de fer	0,123	0,0280
	Bioxide de manganèse	0,031	0,0068
	Potasse	0,096	0,0163
	Soude	0,011	0,0028
	Eau	0,002	
		1,000	

d'où j'ai tiré ensuite par le calcul le mélange de feldspath, d'albite, de pyroxène et d'amphibole, suivant :

Feldspath			0,576
Albite			0,098
Pyroxène	$\ddot{F}^3\dddot{Si}^4$	0,132	0,189
	$\dot{M}a^3\dddot{Si}^4$	0,057	
Actinote			0,136
Eau hygrométrique			0,002
			1,001

Ainsi cette roche renferme plus de pyroxène que d'amphibole, quoiqu'on n'en voie pas d'apparent dans sa masse ni dans aucune des roches environnantes que j'ai étudiées. Elle aurait dû par conséquent être distinguée, du moins comme variété, des autres espèces, et méritait une attention particulière. Cette circonstance, jointe à quelques autres qui résultent aussi de recherches chimiques sur des roches, mais dont je ne parlerai pas ici, me fait regretter aujourd'hui de n'avoir pu faire beaucoup d'analyses lorsque j'ai rédigé mes observations sur la Hongrie ; j'en aurais probablement tiré beaucoup de faits importants : je ferais certainement ce tra-

vail intéressant, si je me trouvais maintenant dans la position que j'avais alors.

Trapp de Suède ?

Une variété de trapp, dit de Suède, mais dont j'ignore la localité précise, que l'on considère généralement comme des grünsteins, m'a fourni encore un autre résultat, savoir :

N° 27	Silice	0,394	tenant oxigène	0,20468
	Alumine	0,128		0,05979
	Chaux	0,046		0,01292
	Magnésie	0,029		0,01122
	Bioxide de fer	0,299		0,06808
	Oxide de manganèse	traces		
	Potasse	0,068		0,01152
	Eau	0,035		0,03112
		0,999		

où le calcul ne peut faire reconnaître ni amphibole ni pyroxène, car les bioxides, la potasse exceptée, sont en quantités telles qu'on n'en peut former que des silicates; l'alumine est aussi en trop grande quantité, par rapport à la potasse, pour appartenir tout entière au feldspath. De là il résulte que cette espèce de roche diffère entièrement de celle qu'on est convenu de désigner sous les noms de grünstein et de basalte; mais il est difficile, au premier moment, d'assigner sa nature, car on conçoit que l'analyse ne peut présenter par elle-même aucune idée qui conduise à la discuter. Heureusement, à défaut de renseignements sur le gisement, sur les passages de la roche, j'ai pu me procurer quelques données en l'étudiant avec plus de soin. D'abord en examinant, avec

une forte loupe, des esquilles minces exposées à une vive lumière, et en étudiant la poussière au microscope, j'ai reconnu trois matières qui me paraissaient fort distinctes : l'une grisâtre et translucide; une autre noire et opaque; et la troisième enfin, également opaque, de couleur verte. D'un autre côté, en faisant agir l'acide hydrochlorique sur la poussière que je venais d'examiner, j'ai reconnu qu'une partie se trouvait attaquée; et en étudiant de nouveau le résidu au microscope, j'ai vu qu'il n'y avait plus de grains verts. Profitant de cette circonstance, j'ai fait digérer une partie de la pierre dans de l'acide bouillant, et j'ai eu pour résultat

Parties insolubles............	0,649
Parties attaquées par l'acide....	0,351
	1,000

La partie mise en solution, étant ensuite examinée, m'a fourni

Silice.........	0,048	tenant oxigène	0,0249 : 1	} : 2	
Alumine.......	0,054	....	0,0252 : 1		
Bioxide de fer..	0,179	....	0,0407	} : 2	
Chaux........	0,034	....	0,0095		
Perte.........	0,036				
	0,351				

ce qui donne exactement pour les parties réelles la formule

$$\left.\begin{matrix}\ddot{F} \\ \dot{C}\end{matrix}\right\}^3 \dddot{S}i^2 + \ddot{F}^3 \dddot{A}^2$$

Mais, en outre, la perte que j'ai trouvée est sensiblement égale à la quantité relative d'eau que l'on retire de la pierre par la

calcination; et il est évident qu'elle ne peut appartenir qu'à la partie qui a été attaquée par l'acide, puisqu'il n'y a aucune raison pour qu'elle ait été dégagée des parties non attaquables par cette opération. En joignant cette eau aux matières solides retirées de la solution, on a la formule

$$\left.\begin{matrix}\ddot{F}\\ \dot{C}a\end{matrix}\right\}^3 \dddot{S}i^2 + \ddot{F}^3 \dddot{A}^2 + 6Aq$$

en admettant un peu d'eau hygrométrique.

En calculant l'analyse d'après cette observation, je trouve que cette variété de trapp doit être un mélange de

Feldspath			0,407
Ilvaïte	$\dot{C}a^3\dddot{S}i^2$	0,018	0,241
	$\dot{M}^3\dddot{S}i^2$	0,051	
	$\ddot{F}^3\dddot{S}i^2$	0,172	
Silicio-Aluminate hydraté	$\ddot{F}^3\dddot{S}i^2 + \ddot{F}^3\dddot{A}^2 + 6Aq.$	0,219	0,344
	$\dot{C}a^3\dddot{S}i^2 + \ddot{F}^3\dddot{A}^2 + 6Aq.$	0,125	
Eau hygrométrique			0,007
			0,999

C'est sans doute un résultat fort remarquable, et qui doit fortement engager à ne pas se restreindre à la spécification vague sous laquelle on range les matières compactes vertes ou noires. Nous avons là l'exemple d'une matière entièrement différente de tout ce que l'on veut désigner sous les noms de grünstein, diorite, dolérite, etc., et probablement sous les noms même de trapp, cornéenne (aphanite), etc., on confond aussi beaucoup de matières qui devraient être distinguées. Il me paraît évident que des recherches sur ces

sortes de roches rendraient de grands services à la géologie.

Basalte de Beaulieu.

J'ai fait également quelques analyses de basalte; mais deux seulement m'ont présenté des éléments calculables : l'une est une variété compacte, de Beaulieu, qui fait évidemment partie des variétés granitoïdes; elle a fourni

N° 28	Silice	0,595	tenant oxigène 0,3091
	Alumine	0,115	0,0537
	Péroxide de fer	0,005	0,0015
	Protoxide de fer	0,197	0,0448
	Chaux	0,013	0,0036
	Soude	0,059	0,0151
	Potasse	0,016	0,0027
		1,000	

ce qui donne par le calcul

Albite	0,508
Feldspath	0,097
Actinote	0,120
Pyroxène $\ddot{F}^3 \dddot{S}i^4$	0,257
Oxide de fer magnétique	0,019
	1,001

Basalte de Somos-Kö.

Ce basalte, que j'ai récolté parmi les variétés que présente la butte de Somos-Kö en Hongrie, m'a donné les résultats suivants :

N° 29	Silice	0,524	tenant oxigène	0,2722
	Alumine	0,226		0,1055
	Chaux	0,058		0,0163
	Magnésie	0,011		0,0042
	Soude	0,079		0,0202
	Bioxide de fer	0,091		0,0207
	Oxide de manganèse	traces		
	Eau	0,010		
		0,999		

Ici les éléments ne sont plus en proportions pour faire de l'albite, et l'on ne peut discuter l'analyse qu'en admettant un mélange de matière de la formule du Labrador; on trouve alors que cette roche renferme

Labrador	$2\dddot{A}\dddot{Si}+\dot{Ca}\dddot{Si}^2$	0,322	0,743
	$2\dddot{A}\dddot{Si}+\dot{So}\dddot{Si}^2$	0,421	
Albite			0,035
Pyroxène	$\ddot{F}^3\dddot{Si}^4$	0,137	0,165
	$\dot{M}^3\dddot{Si}^4$	0,028	
Amphibole actinote			0,047
Eau hygrométrique			0,010
			1,000

Cette analyse vérifie l'opinion émise par M. Hessel, que les basaltes auraient pour base le feldspath de Labrador mélangé de différentes substances. Les analyses de Klaproth et de Kennedy semblent devoir conduire au même résultat, quoiqu'elles ne puissent être calculées, par la raison qu'on ne sait pas positivement à quel état se trouve l'oxide de fer que

ces chimistes en ont retiré. Je suis loin de croire cependant que tous les basaltes soient dans le même cas; l'analyse précédente nous en offre un à base d'albite, et il me paraît probable, d'après quelques essais, qu'il en existe encore d'autres compositions. Les deux que j'ai examinés diffèrent beaucoup par leurs caractères : le premier, qui est à base d'albite, est inattaquable par l'acide hydrochlorique, qui n'en extrait qu'un peu d'oxide de fer; le second, au contraire, qui est à base de Labrador, se dissout en assez grande quantité.

On voit par ces premiers essais sur les roches, que l'on confond fréquemment des choses très-différentes sous le même nom, puisque, dans le peu d'analyses que j'ai faites, on doit admettre trois sortes de grünstein et deux sortes de basalte. Il est donc très-probable que d'autres analyses donneront encore lieu à d'autres distinctions; et il résulte de là qu'ayant actuellement des moyens de calcul, il serait de la plus haute importance de faire des analyses de roches, et de chercher, minéralogiquement ou chimiquement, des données propres à les discuter. Ces analyses jetteraient nécessairement un grand jour sur la classification de ces matières composées, qui laisse tant à désirer, et fourniraient sans doute beaucoup d'idées nouvelles sous le rapport des considérations générales de la géologie.

TABLEAU

DES ANALYSES ET RÉSULTATS DE LEUR DISCUSSION.

Grenat de l'île St-Jean, *n*° 5.

Analyses.		Calculs correspondants.			
Silice	0,403	Grenat	Grossulaire	0,501	0,871
Alumine	0,234		Almandin	0,247	
Chaux	0,210		Magnésien	0,123	
Magnésie	0,037	Épidote	Zoïsite	0,090	0,129
Bioxide de fer	0,116		Thallite	0,039	
	1,000				1,000

Grenat ou idocrase de Csiklova, *n*° 6.

Silice	0,411		
Alumine	0,212	Grossulaire	0,946
Chaux	0,371	Wollastonite	0,033
Magnésie	0,006	Trémolite	0,021
Péroxide de fer	traces		1,000
	1,000		

Grenat du Zillerthal, *n*° 13.

Silice	0,439	Grenat	Grossulaire	0,433	0,827
Alumine	0,200		Almandin	0,217	
Chaux	0,178		Magnésien	0,081	
Magnésie	0,045		Manganésien	0,096	
Bioxide de fer	0,118	Amphibole	Trémolite	0,079	0,146
Bioxide de manganèse	0,018		Actinote	0,067	
Perte	0,002	Disthène			0,027
	1,000				1,000

Épidote de .... n° 2.

Analyses.		Calculs correspondants.			
Silice	0,424				
Alumine...............	0,273	Épidote...	Zoïsite.....	0,527	0,898
			Thallite.....	0,371	
Chaux.................	0,109				
Magnésie	0,011	Amphibole	Actinote ...	0,060	0,102
Bioxide de fer.........	0,183		Trémolite ..	0,042	
	1,000				1,000

Épidote bacillaire de l'île St-Jean, n° 3.

Silice	0,409	Épidote...	Zoïsite.....	0,432	0,805
Alumine...............	0,289		Thallite....	0,373	
Chaux.................	0,162	Grenat....	Grossulaire.	0,131	0,194
Bioxide de fer.........	0,140		Almandin. .	0,063	
	1,000				0,999

Épidote granulaire de l'île St-Jean, n° 4.

Silice.................	0,410	Épidote...	Zoïsite.....	0,475	0,795
Alumine...............	0,289		Thallite....	0,320	
Chaux.................	0,156	Grenat....	Grossulaire.	0,087	0,204
Magnésie	0,007		Almandin..	0,093	
Bioxide de fer..........	0,138		Magnésien .	0,024	
	1,000				0,999

Disthène du Zillerthal, n° 14.

Silice.................	0,316		
Alumine...............	0,678	Disthène......	0,968
Chaux.................	0,002	Mica	0,031
Potasse...............	0,002		0,999
Acide fluorique........	traces		
	0,998		

Wollastonite de Csiklova, n° 7.

Analyses.		Calculs correspondants.	
Silice	0,531	Wollastonite	0,876
Chaux	0,451	Trémolite	0,066
Magnésie	0,018	Trisilicate de chaux	0,058
	1,000		1,000

Trisilicate de chaux de Csiklova, n° 9.

Silice	0,616	Trisilicate de chaux	0,907
Chaux	0,361	Wollastonite	0,009
Magnésie	0,023	Trémolite	0,084
	1,000		1,000

Amphibole de . . . . *n°* 1.

Silice	0,531				
Alumine	0,041	Amphibole	Actinote	0,479	0,863
Chaux	0,106		Trémolite	0,384	
Magnésie	0,104	Épidote	Thallite	0,106	0,136
Bioxide de fer	0,218		Zoïsite	0,030	
	1,000				0,999

Amphibole de Csiklova, n° 8.

Silice	0,595				
Alumine	0,014	Amphibole trémolite			0,942
Chaux	0,123	Grenat	Magnésien	0,042	0,058
Magnésie	0,268		Grossulaire	0,016	
Péroxide de fer	traces				1,000
	1,000				

Amphibole du Zillerthal, n° 15.

Analyses.		Calculs correspondants.			
Silice	0,531				
Alumine	0,017	Amphibole	Actinote	0,647	0,932
Chaux	0,114		Trémolite	0,285	
Magnésie	0,078	Grenat	Grossulaire	0,026	0,043
Bioxide de fer	0,256		Almandin	0,012	
Bioxide de manganèse	0,002 ?		Manganésien	0,005	
Potasse	traces	Matière micacée			0,024
Acide fluorique	traces				0,999
Perte	0,002				
	1,000				

Amphibole sombre d'Aker, par M. Bonsdorff, n° 22.

Silice	0,4721	Amphibole	Actinote	0,059	0,770
Alumine	0,1394		Trémolite	0,704	
Magnésie	0,2186		Manganésien	0,007	
Chaux	0,1273	Pyroxène			0,026
Oxidule de fer	0,0228	Spinelle			0,167
Oxidule de manganèse	0,0057	Fluate de chaux			0,032
Acide fluorique	0,0090	Eau hygrométrique			0,004
Eau	0,0044				0,999
	0,9993				

Amphibole clair d'Aker, par M. Bonsdorff, n° 23.

Silice	0,5624		
Alumine	0,0432	Trémolite	0,8542
Magnésie	0,2413	Wernerite	0,0865
Chaux	0,1295	Spinelle	0,0134
Oxidule de fer	0,0100	Pyroxène	0,0148
Oxidule de manganèse	0,0026	Fluate de chaux	0,0281
Acide fluorique	0,0078	Eau hygrométrique	0,0050
Eau	0,0050		1,0020
	1,0018		

Pyroxène d'Ala, n° 17.

Analyses.		Calculs correspondants.	
Silice	0,523		
Alumine	0,007	Pyroxènes	0,941
Chaux	0,242	Trémolite	0,024
Magnésie	0,099	Grenat	0,033
Bioxide de fer	0,128		0,998
	0,999		

Pyroxène de Sahla, par M. H. Rose, n° 18.

Silice	0,5486		
Chaux	0,2357	Pyroxènes	0,9061
Magnésie	0,1649	Grenats	0,0104
Protoxide de fer	0,0444	Trémolite	0,0830
Oxide de manganèse	0,0042		0,9999
Alumine	0,0021		
	0,9999		

Pyroxène tendre de Sahla, par M. H. Rose, n° 19.

Silice	0,6065		
Chaux	0,0497	Pyroxènes	0,374
Magnésie	0,2520	$\dot{\dot{M}}\,\dddot{S}i^2 + Aq$	0,623
Protoxide de fer	0,0418	Eau hygrométrique	0,004
Oxide de manganèse	0,0078		1,001
Eau	0,0438		
	1,0016		

Pyroxène tendre de Sahla, par M. H. Rose, n° 20.

Analyses.		Calculs correspondants.	
Silice	0,5808		
Chaux	0,1124	Pyroxènes	0,597
Magnésie	0,2228	$\dot{M}\dddot{S}i^2 + Aq$	0,376
Protoxide de fer	0,0530	Grenat almandin	0,019
Alumine	0,0047	Eau hygrométrique	0,008
Eau	0,0311		1,000
	1,0048		

Pyroxène tendre de Sahla, par M. H. Rose, n° 21.

Silice	0,5830		
Chaux	0,0989	Pyroxènes	0,6537
Magnésie	0,2422	$\dot{M}\dddot{S}i^2 + Aq$	0,2623
Oxide de manganèse	0,0068	Talc, $\dot{M}\dddot{S}i^2$	0,0838
Protoxide de fer	0,0424	Grenat almandin	0,0052
Alumine	0,0011		1,0050
Eau	0,0311		
	1,0055		

Grünstein de Schemnitz, n° 25.

Silice	0,632		
Alumine	0,142		
Chaux	0,025	Feldspath	0,672
Magnésie	0,020	Albite	0,103
Bioxide de fer	0,058	Amphiboles	0,227
Potasse	0,112	Eau hygrométrique	0,003
Soude	0,012		1,005
Eau	0,003		
	1,004		

Grünstein noir de Schemnitz, *n*° 26.

ANALYSES.		CALCULS CORRESPONDANTS.	
Silice	0,600		
Alumine	0,123		
Chaux	0,014	Feldspath	0,576
Bioxide de fer	0,123	Albite	0,098
Bioxide de manganèse	0,031	Pyroxènes	0,189
Potasse	0,096	Amphibole ancinote	0,136
Soude	0,011	Eau hygrométrique	0,002
Eau	0,002		1,001
	1,000		

Trapp de . . . . *n*° 27.

Silice	0,394		
Alumine	0,128		
Chaux	0,046	Feldspath	0,407
Magnésie	0,029	Ilvaïte $(\ddot{C}a, \ddot{M}, \ddot{F},)^3 \dddot{S}i^2$	0,241
Bioxide de fer	0,299	$(\ddot{F}, \ddot{C}a)^3 \dddot{S}i^2 + \dot{F}^3 \dddot{A}^2 + 6Aq$	0,344
Oxide de manganèse	traces	Eau hygrométrique	0,007
Potasse	0,068		0,999
Eau	0,035		
	0,999		

Basalte de Beaulieu, *n*° 28.

Silice	0,595		
Alumine	0,115	Albite	0,508
Péroxide de fer	0,005	Feldspath	0,097
Protoxide de fer	0,197	Amphibole actinote	0,120
Chaux	0,013	Pyroxène $\ddot{F}^3 \dddot{S}i^4$	0,257
Soude	0,059	Oxide de fer magnétique	0,019
Potasse	0,016		1,001
	1,000		

Basalte de Somos Kö.

Analyses.	
Silice	0,524
Alumine	0,226
Chaux	0,058
Magnésie	0,011
Bioxide de fer	0,091
Oxide de manganèse	traces
Soude	0,079
Eau	0,010
	0,999

Calculs correspondants.	
Labrador $2\dddot{A}\dddot{S}i + (\dot{S}o, \dot{C}a)\dddot{S}i^{2}$	0,743
Albite	0,035
Pyroxènes	0,165
Amphibole actinote	0,047
Eau hygrométrique	0,010
	1,000

Table des proportions de quelques silicates en considérant la silice comme formée de 51,95 *d'oxigène, et* 48,05 *de silicium : le poids de l'atome étant alors de* 577,50.

DÉNOMINATION.		POIDS DE L'ATOME.	SILICE.	BASES.
Silicate bi-alumineux.	$\dddot{A}^2\dddot{Si}$	1862,14	31,01	68,99
Silicate d'alumine....	$\dddot{A}\dddot{Si}$	1219,80	47,34	52,66
Bisilicate ———	$\dddot{A}\dddot{Si}^2$	1797,32	64,26	35,74
Trisilicate ———	$\dddot{A}\dddot{Si}^3$	2374,82	72,95	27,05
Silicate de chaux.....	$\dot{Ca}^3\dddot{Si}^2$	3291,18	35,09	64,91
Bisilicate ———	$\dot{Ca}^3\dddot{Si}^4$	4446,18	51,95	48,05
Trisilicate ———	$\dot{Ca}\dddot{Si}^2$	1867,06	61,86	38,14
Silicate de fer.......	$\dot{F}^3\dddot{Si}^2$	3790,29	30,47	69,53
Bisilicate ———	$\dot{F}^3\dddot{Si}^4$	4945,29	46,71	53,29
Trisilicate ———	$\dot{F}\dddot{Si}^2$	2033,43	56,80	43,20
Silicate de magnésie..	$\dot{M}^3\dddot{Si}^2$	2705,16	42,70	57,30
Bisilicate ———	$\dot{M}^3\dddot{Si}^4$	3860,16	59,84	40,16
Trisilicate ———	$\dot{M}\dddot{Si}^2$	1671,72	69,09	30,91
Silicate de manganèse.	$\dot{Ma}^3\dddot{Si}^2$	3889,71	29,69	70,31
Bisilicate ———	$\dot{Ma}^3\dddot{Si}^4$	5044,71	45,79	54,21
Trisilicate ———	$\dot{Ma}\dddot{Si}^2$	2066,57	55,89	44,11
Silicate de potasse ...	$\dot{Po}^3\dddot{Si}^2$	4694,49	24,60	75,40
Bisilicate ———	$\dot{Po}^3\dddot{Si}^4$	5849,49	39,49	60,51
Trisilicate ———	$\dot{Po}\dddot{Si}^2$	2334,83	49,47	50,53
Silicate de soude....	$\dot{So}^3\dddot{Si}^2$	3500,52	33,00	67,00
Bisilicate ———	$\dot{So}^3\dddot{Si}^4$	4655,52	49,62	50,38
Trisilicate ———	$\dot{So}\dddot{Si}^2$	1936,84	59,63	40,37

§ IV. *Théorie de la discussion des analyses minérales.*

Depuis long-temps, sans doute, on a eu l'idée de calculer les analyses minérales pour isoler les différentes matières que l'on pouvait soupçonner d'être mélangées entre elles : moi-même, au moment où parut le tableau comparatif de Haüy, j'ai fait beaucoup de calculs pour tâcher d'accorder les analyses de plusieurs substances avec les résultats cristallographiques de ce savant ; et c'est ce travail qui m'a conduit aux premières recherches que j'ai faites sur les mélanges des sels entre eux, quoique je n'en aie publié les résultats qu'en 1815. Mais, quoiqu'on pût avoir ces idées, il était impossible alors de mettre de la précision dans les recherches; et ce n'est que depuis qu'on applique la théorie atomique aux analyses minérales, et surtout depuis la découverte de l'isomorphisme (1), qu'on peut espérer d'arriver à l'exactitude qu'on

(1) Je suis encore obligé d'expliquer ici le sens qu'on doit attacher à l'expression de *corps isomorphes ;* car, malgré ce que j'ai pu dire dans diverses occasions, malgré l'explication donnée par M. Mitscherlich même j'ai entendu de nouveau des minéralogistes, comprenant plutôt la lettre que l'esprit de l'important Mémoire qui nous a fait connaître cette découverte, y faire encore l'objection que les corps dont on veut parler ne sont pas identiques par les formes, et qu'ils diffèrent les uns des autres par la valeur des angles qui existent entre leurs faces. Heureusement cette observation n'est pas nouvelle; je l'ai faite dès 1820, au moment où le Mémoire de M. Mitscherlich a paru dans les Annales de physique et de chimie, précisément dans l'intention de faire mieux ressortir l'importance des faits qui y étaient consignés, en les débarrassant de ce qui pouvait s'y trouver d'inexact. J'ai fait pressentir dès-lors ce que tous les savants, et M. Mitscherlich

chercherait vainement de toute autre manière. On conçoit, en effet, qu'il faut connaître très-exactement la composition des différents corps que l'on soupçonne d'être mélangés, avant de penser à les isoler les uns des autres par le calcul : or c'est à quoi on n'a pu parvenir que depuis qu'on connaît les lois générales suivant lesquelles les matières se combinent, et qu'on a pu les exprimer d'une manière claire et

---

même, ont depuis adopté, qu'on devait entendre par corps isomorphes, tantôt des corps électro-positifs susceptibles de former avec un même corps électro-négatif, ou un certain nombre de corps électro-négatifs qu'on nommera aussi isomorphes, des composés qui cristallisent dans le même système, en affectant des formes plus ou moins rapprochées par les angles et quelquefois tout-à-fait identiques; tantôt des corps électro-négatifs susceptibles de former avec un même corps électro-positif, ou des corps électro-positifs isomorphes, des composés qui cristallisent dans le même système, en affectant, etc., etc.

Voilà ce qu'on doit entendre par isomorphisme, et c'est heureusement tout ce dont nous avons besoin pour les considérations les plus importantes relatives aux minéraux. Cela suffit pour nous faire voir que des corps éminemment différents par leur nature peuvent affecter sensiblement les mêmes caractères extérieurs, surtout, comme il arrive le plus souvent, lorsqu'ils sont mélangés les uns avec les autres par la cristallisation, et pour rattacher à des lois simples des composés compliqués qui semblaient se soustraire aux lois générales qu'un nombre prodigieux d'expériences ont si bien établies. Il faut oublier l'identité absolue que le mot isomorphe indique; peut-être vaudrait-il mieux employer une autre expression, mais d'un côté il n'en est pas qui représente mieux le fait établi par M. Mitscherlich, et de l'autre la découverte est tellement importante, que ce serait en quelque sorte ravir une gloire à l'auteur que de supprimer du langage scientifique un mot auquel se rattachent tant de titres acquis à la reconnaissance des minéralogistes.

précise. Ces lois ont donné les moyens de faire abstraction, soit des petites erreurs d'analyse, soit des petites quantités de matières étrangères, et d'établir pour les minéraux des formules de composition, comme pour les sels qu'on peut à volonté amener dans les laboratoires à l'état de pureté absolue. La découverte de l'isomorphisme a étendu cette application à des analyses compliquées d'un nombre plus ou moins considérable d'éléments divers, en faisant voir que ces corps étaient en remplacement les uns des autres; en sorte qu'en réunissant d'un côté tous les principes électro-positifs, de l'autre tous les principes électro-négatifs, on arrivait à une formule aussi simple que s'il n'eût existé que deux éléments, l'un électro-positif, l'autre électro-négatif.

J'ai déja exposé depuis quelques années, soit dans mon Traité de Minéralogie, soit dans mes cours, les moyens que l'on pouvait prendre pour discuter une analyse donnée; mais, dans le principe, je n'ai eu en vue que d'isoler les différents corps isomorphes qu'on pouvait y reconnaître, et de mettre à nu les matières surabondantes, relativement à telle ou telle formule, avec lesquelles on formait ensuite, à la vérité un peu au hasard, tel ou tel composé, s'il y avait lieu. Aujourd'hui les recherches que je viens de faire conduisent à procéder autrement, et la théorie, jusqu'alors fort simple, devient un peu plus compliquée; elle présente plusieurs cas fort distincts, qui exigent des moyens différents de calcul, et qu'on peut exprimer de la manière suivante:

1° Le cas d'une analyse isolée où les éléments, quelque nombreux qu'ils soient, se trouvent en telles quantités relatives, qu'il en résulte sensiblement des proportions définies, et où les erreurs sont dans les limites de celles qu'on peut

faire dans la série des opérations chimiques nécessaires pour séparer les éléments du minéral.

2° Le cas d'une analyse isolée où les éléments, plus ou moins nombreux, se trouvent en proportions qui se rapprochent seulement des proportions définies, de manière à ce qu'il y a toujours quelques substances surabondantes, et qu'il faut admettre des mélanges sur la nature desquels on n'a aucune notion.

3° Le cas d'une analyse compliquée accompagnée de renseignements sur la nature des mélanges possibles, et qui peut être partagée immédiatement en deux portions dans chacune desquelles les éléments se trouvent en proportions définies.

4° Le cas où l'analyse totale, ou l'une des parties dans lesquelles elle peut se diviser, doit renfermer, d'après les renseignements sur les matières associées, des composés de même base ou de bases isomorphes, d'ordres différents.

C'est ce dernier cas surtout qui nécessite de nouveaux moyens de calcul ; il exige toujours la solution de quelques équations à plusieurs inconnues, et présente toutes les circonstances qu'on connaît généralement dans ces sortes de problèmes.

5° Enfin, le cas d'une analyse accompagnée de renseignements sur la nature des corps associés, mais où quelques-uns des éléments du corps qui peut être mélangé ne sont pas en quantité définie, n'ont offert que des traces de leur présence, ou même ont été tout-à-fait négligés. La discussion ne peut se faire alors que par tâtonnement, par un calcul de fausse position.

Dans tous ces cas, on peut employer généralement deux

méthodes de calcul : dans l'une, on peut partir des quantités pondérables fournies par l'analyse, et combiner entre eux tels ou tels principes, ou des portions de ces principes, proportionnellement à telle ou telle formule théorique de composition exprimée en poids. Dans l'autre, on peut partir des nombres atomiques relatifs fournis par les quantités pondérables des différents principes, ou bien, s'il s'agit de corps oxigénés, des quantités relatives d'oxigène fournies par les quantités pondérables des différents oxides, et combiner des portions de ces nombres relatifs à tels principes, avec des portions des nombres relatifs à tel ou tel autre, proportionnellement à une formule atomique déterminée, exprimée par signes. On repasse ensuite de ces portions de nombres atomiques, ou de ces portions d'oxigène, aux quantités relatives des matières correspondantes. Dans cette seconde manière, il n'est pas nécessaire d'établir préalablement les compositions numériques des corps que l'on soupçonne d'être mélangés; il suffit d'en tracer le signe, ce qui est un avantage immense pour éviter des calculs avant de savoir si cette supposition satisfait ou ne satisfait pas à l'analyse. Je donnerai néanmoins quelques exemples de calcul par la première méthode, parce que c'est la seule qu'on puisse employer lorsqu'on a à discuter une analyse d'où l'on doit extraire des corps dont on ne peut pas établir la composition dans le système atomique.

Ier Cas. — *Analyse isolée, compliquée, dans laquelle les éléments sont en proportions sensiblement définies.*

Il est extrêmement rare dans la nature de trouver des

corps qui offrent à l'analyse des proportions rigoureusement définies, surtout dans les silicates dont nous nous occupons particulièrement; presque toujours les matières minérales renferment des mélanges de substances étrangères qui dérangent ces proportions : par conséquent, la plupart des discussions d'analyse isolée rentrent dans le cas suivant, qui d'ailleurs peut lui-même donner une idée complète de ce qu'il y aurait à faire si une telle circonstance se présentait.

IIe Cas. — *Analyse compliquée, isolée, dans laquelle les éléments approchent d'être en proportions définies.*

Presque toutes les analyses minérales sont dans ce cas, et toutes celles que j'ai données dans ce Mémoire peuvent y être rapportées, si l'on fait abstraction des renseignements que j'ai pu me procurer sur les matières associées. C'est même en faisant cette abstraction, que je les ai toutes calculées d'abord avant de passer aux résultats qu'on obtient lorsqu'on prend les renseignements en considération. Je reprendrai une de ces analyses pour exemple, et je la calculerai suivant les deux méthodes que j'ai indiquées d'une manière générale.

L'analyse n° 3, page 240, m'a fourni:

Silice	0,409	tenant oxigène	0,21247	: 3 —
Alumine	0,289		0,13499	: 2 —
Chaux	0,162		0,04550	: 1
Bioxide de fer	0,140		0,03188	
	1,000			

La comparaison des quantités d'oxigène fait voir que les proportions se rapprochent de celles qui constituent les épi-

dotes, mais que les quantités de silice et d'alumine sont trop faibles par rapport à celles des bioxides réunies. On peut penser qu'il y a ici une certaine quantité d'épidote (mélange de zoïsite et de thallite) qu'il s'agit de déterminer, et une certaine quantité de matières étrangères sur la nature de laquelle nous supposons n'avoir aucune notion.

Ire *Méthode de calcul.*

Pour trouver la quantité d'épidote que renferme cette analyse, en partant des quantités pondérables de silice, d'alumine, etc., on cherchera d'abord la composition théorique, en poids, du zoïsite et de la thallite d'après les formules

$$4\dddot{A}\dddot{S}i + \dot{C}a^3\dddot{S}i^2, \quad 4\dddot{A}\dddot{S}i + \dot{F}^3\dddot{S}i^2$$

La première substance, le zoïsite, se compose de

Silice..............	0,4240
Alumine............	0,3145
Chaux..............	0,2615
	1,0000

D'après cela, on prendra la chaux fournie par l'analyse, et on la combinera avec des quantités de silice et d'alumine proportionnelles à la composition précédente, en faisant les proportions.

Chaux.	*Silice.*	*Chaux.*	*Silice.*	
0,2615 :	0,424 ::	0,162 :	x	= 0,2627
Chaux.	*Alumine.*	*Chaux.*	*Alumine.*	
0,2615 :	0,3145 ::	0,162 :	y	= 0,1948
		Chaux donnée....		0,1620
		Zoïsite.......		0,6195

Actuellement il reste les matières suivantes :

Silice	0,1463
Alumine	0,0942
Bioxide de fer	0,1400

éléments dans lesquels on doit trouver une certaine quantité de thallite dont la composition théorique est

Silice	0,3996
Alumine	0,2964
Bioxide de fer	0,3040
	1,0000

Ici il faut un peu réfléchir, avant de calculer, pour savoir quels sont les éléments qui vont être surabondants. D'abord il est clair qu'il devra rester de l'oxide de fer, puisque, d'après les quantités d'oxigène, les bioxides sont surabondants relativement aux trioxides. D'un autre côté, si l'on compare les quantités d'oxigène de la silice et de l'alumine, on voit que la première est surabondante par rapport à la seconde; par conséquent il doit aussi rester de la silice. Il résulte de là que c'est l'alumine qu'il faut prendre pour point de départ, et la combiner avec de la silice et du bioxide de fer, proportionnellement à la composition que nous venons de donner pour la thallite. Pour cela, on fera encore les proportions suivantes :

Alumine.		Silice.		Alumine.		Silice.		
0,2964	:	0,3996	::	0,0942	:	x	=	0,1270
Alumine.		*Bioxide de fer.*		*Alumine.*		*Bioxide de fer.*		
0,2964	:	0,3040	::	0,0942	:	y	=	0,0966
				Alumine donnée				0,0942
						Thallite		0,3178

après quoi, on a le nouveau reste :

Silice	0,0193
Bioxide de fer	0,0434

On peut laisser ce reste sous cette forme; mais on peut aussi chercher si ces deux matières ne seraient pas l'une par rapport à l'autre en proportions définies, ou s'il ne serait pas possible d'en tirer une matière en proportions définies, pour qu'il reste le moins de matière possible hors de combinaison. Pour éviter les tâtonnements qui pourraient être fort longs, et même ne conduire à aucun résultat, ce qui se présente de plus simple est de chercher les quantités atomiques de ces restes, ou, puisqu'il s'agit ici d'oxides, les quantités d'oxigène qu'ils renferment; ce qui donne:

Oxigène correspondant à la silice	0,0100
Oxigène correspondant au bioxide de fer	0,0099

par où l'on voit que ces matières sont sensiblement dans le rapport d'un silicate de fer, dans lequel il y aurait une petite quantité de silice surabondante.

Pour extraire ce silicate de fer, on cherchera la composition théorique de cette substance, qui, d'après la table que j'ai donnée page 291, est formée de

Silice..................	0,3047
Bioxide de fer...........	0,6953
	1,0000

Il n'y a plus qu'à prendre le bioxide de fer qui reste après les calculs précédents, et à le combiner avec la silice proportionnellement à cette composition, en faisant la proportion

Bioxide de fer.		*Silice.*		*Bioxide de fer.*		*Silice.*		
0,6953	:	0,3047	::	0,0434	:	x	=	0,0190
				Bioxide de fer donnée........				0,0434
				Silicate de fer......				0,0624

Il reste ensuite 0,0003 de silice sans emploi.

D'après ce calcul, l'analyse peut donc être représentée de la manière suivante :

Épidote	Zoïsite.........	0,6195	0,9373
	Thallite........	0,3178	
Silicate de bioxide de fer............			0,0624
Silice surabondante................			0,0003
			1,0000

comme je l'ai déja indiquée dans le Mémoire.

IIe *Méthode de calcul.*

Dans la méthode de calcul où l'on prend les quantités d'oxigène pour bases, il faut partir de la formule des épi-

dotes, qui est

$$4\dddot{A}\dddot{S}i + \left.\begin{matrix}\dot{C}a\\ \dot{F}\end{matrix}\right\}^{3} \dddot{S}i^{2}$$

où les quantités d'oxigène de la silice, de l'alumine et des bioxides, sont entre elles comme les nombres 3, 2 et 1. Dès-lors on prendra, pour former le zoïsite, ou épidote à base de chaux, les quantités suivantes:

Oxigène de silice............	0,1365	: 3
Oxigène d'alumine...........	0,0910	: 2
Oxigène de chaux............	0,0455	: 1

en partant de l'oxigène que renferme la chaux.

Pour la thallite, ou épidote à base de bioxide de fer, on prendra le reste de l'oxigène de l'alumine avec des quantités relatives d'oxigène des deux autres corps, savoir:

Oxigène de silice..........	0,065985	: 3
Oxigène reste de l'alumine. .	0,043990	: 2
Oxigène de bioxide de fer. .	0,021995	: 1

après quoi il reste

Oxigène de silice...........	0,009985
Oxigène de bioxide de fer...	0,009885

quantités où l'on voit tout de suite le rapport 1 à 1 qui constitue le silicate de fer : pour extraire ce silicate, on prend

Oxigène de silice.................	0,009885
Oxigène reste du bioxide de fer...	0,009885

après quoi il reste enfin oxigène de silice 0,0001.

On voit que, dans cette méthode, la question de discussion

se trouve réellement résolue avant d'avoir fait aucun calcul, et qu'on reconnaît à l'instant qu'il n'y a qu'une très-petite quantité de silice surabondante.

Pour achever le calcul et arriver aux quantités numériques de chacun des corps mélangés, il ne s'agit plus que de chercher les quantités correspondantes d'oxides d'après les proportions d'oxigène que chacun d'eux renferme (1). Pour le zoïsite, on fera les proportions

Oxigène.	*Silice.*		*Oxigène.*	*Silice.*		
0,5195 :	1	::	0,1365 :	x	=	0,2627
Oxigène.	*Alumine.*		*Oxigène.*	*Alumine.*		
0,4671 :	1	::	0,0910 :	y	=	0,1948
Oxigène de chaux....			0,0455	= chaux..		0,1620
				Zoïsite......		0,6195

(1) La silice se compose de

Oxigène......	0,5195
Silicium......	0,4805
	1,0000

L'alumine est formé de

Oxigène......	0,4671
Aluminium....	0,5329
	1,0000

La chaux se trouve formée de

Oxigène......	0,2809
Calcium......	0,7191
	1,0000

Enfin le bioxide de fer est formé de

Oxigène......	0,2277
Fer..........	0,7723
	1,0000

Pour la thallite, on fera les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,065985	:	x	=	0,1270
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*		
0,4671	:	1	::	0,04399	:	y	=	0,0942
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*		
0,2277	:	1	::	0,021995	:	z	=	0,0966
						Thallite...		0,3178

Pour le bisilicate de bioxide de fer, on fera

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,009885	:	x	=	0,0190
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*		
0,2277	:	1	::	0,009885	:	y	=	0,0434
						Silicate de fer....		0,0624

Enfin, pour la dernière portion de silice qui est surabondante, on fera la proportion

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice surabondante.*		
0,5195	:	1	::	0,0001	:	x	=	0,0002

par conséquent, on arrive au même résultat que précédemment; seulement on trouve une petite différence dans la silice surabondante, ce qui provient des décimales négligées dans les compositions théoriques, en poids, des diverses substances qu'on a prises pour bases dans la première méthode.

On voit que ces deux méthodes conduisent au même ré-

sultat. Le calcul est à peu près de même longueur de part et d'autre; la seconde méthode offre seulement cet avantage, que l'on aperçoit plus promptement les combinaisons que l'on peut faire, et sans aucun calcul préalable : on arrive tout de suite au reste, et l'on voit à l'instant ce que l'on en peut faire; enfin le calcul des quantités d'oxides ne vient que quand tout est parfaitement ordonné. Nous verrons plus loin d'autres avantages qui doivent, en général, faire donner la préférence à la seconde méthode.

IIIe Cas. — *Analyses accompagnées de renseignements sur les associations du corps auquel elles se rapportent, et susceptibles de se partager en deux portions dans chacune desquelles les éléments sont en proportions définies.*

Il paraît que ce cas de discussion se présentera assez fréquemment dans la nature; déja plusieurs de nos analyses s'y rapportent, et il est probable qu'il en sera de même par la suite pour beaucoup d'autres. Le calcul qui y est applicable est du même genre que celui que nous venons d'employer; seulement il faut commencer par diviser l'analyse, comme nous allons l'indiquer, en se laissant guider par les renseignements que l'on a pu se procurer.

L'analyse n° 1 nous a offert

Silice..........	0,531	tenant oxigène 0,2758
Alumine.......	0,041	 0,0191
Chaux........	0,106	 0,0297
Magnésie.......	0,104	 0,0402
Bioxide de fer...	0,218	 0,0496
	1,000	

Nous avons déja remarqué qu'elle peut être rapportée à un amphibole dans lequel il y aurait des mélanges de matières étrangères; et en la calculant comme une analyse isolée, par l'une des méthodes précédentes, nous avons trouvé qu'elle pouvait être représentée de la manière suivante :

Amphibole	Actinote	0,55	0,93
	Trémolite	0,38	
Trisilicate de bioxide de fer			0,01
Silicate tri-alumineux			0,05
			0,99

Mais nous avons pour renseignements que cette substance est accompagnée d'épidote, d'où il devient probable que l'alumine appartient à cette dernière matière. Il y a alors deux choses à faire : la première de vérifier la supposition ; et la seconde, si la supposition se trouve vraie, de calculer les quantités numériques de chacune des espèces.

Pour vérifier la supposition, il n'y a qu'un moyen facile: c'est de partir des quantités atomiques des différentes matières, ou bien, puisqu'il s'agit d'oxides, des quantités d'oxigène qui correspondent à chaque oxide. Pour cela, on réunira d'abord les quantités d'oxigène qui se rapportent aux bioxides, ce qui transforme l'analyse en

Silice	tenant oxigène	0,2758
Alumine		0,0191
Bioxides		0,1195

Maintenant la formule des épidotes étant

$$4\dddot{A}\dddot{S}i + \left.\begin{matrix}\ddot{C}a\\ \ddot{F}\end{matrix}\right\}^{3} \dddot{S}i^{2}$$

les quantités d'oxigène que la silice, l'alumine et les bioxides renferment dans cette substance, sont dans le rapport des nombres 3, 2 et 1. On prendra donc l'oxigène de l'alumine pour point de départ, et on le réunira avec des quantités d'oxigène de silice et de bioxides qui soient dans le rapport des nombres que nous venons d'indiquer, c'est-à-dire qu'on prendra

Oxigène de silice...............	0,02865	: 3
Oxigène d'alumine...............	0,01910	: 2
Oxigène de bioxides.............	0,00955	: 1

Voilà l'épidote isolée, et il reste

Oxigène de silice...............	0,24715	: 9
Oxigène de bioxides.............	0,10995	: 4

Ces nombres sont exactement dans le rapport qui constitue les amphiboles ; par conséquent la supposition que nous avons faite se trouve complètement vérifiée, et il ne s'agit plus que de calculer les quantités numériques de chaque substance.

Ce calcul peut se faire par les deux méthodes que nous avons indiquées; mais on doit remarquer que, par suite de la vérification, qui ne peut pas se faire autrement, le calcul est déja tout disposé pour la seconde méthode : c'est donc celle que nous allons employer.

Après avoir vérifié la supposition de mélange, il faut choisir les bioxides qui doivent entrer dans chacun de ces corps ; car, bien que ces oxides soient isomorphes, on ne peut pas prendre indifféremment l'un ou l'autre. Dans le cas présent, il faut observer que les analyses d'épidote ne renferment

pas de magnésie, quoique cette matière soit une des bases isomorphes qui peuvent entrer dans sa composition; au contraire, presque toutes les analyses d'amphiboles en renferment, de sorte que c'est à l'amphibole qu'on est conduit à attribuer la magnésie. D'après cela, on doit commencer par former l'amphibole trémolite, en prenant

Oxigène de silice................	0,1206	: 9
Oxigène de chaux................	0,0134	: 1
Oxigène de la magnésie..........	0,0402	: 3

On fera ensuite de l'actinote en prenant le reste de l'oxigène de la silice consacrée aux amphiboles, et le joignant, suivant la formule de l'actinote, avec de la chaux et du bioxide de fer, c'est-à-dire en prenant

Oxigène reste de la silice............	0,12655	: 9
Oxigène de chaux...................	0,01406	: 1
Oxigène de bioxide de fer............	0,04218	: 3

Maintenant il faut prendre le reste de la chaux pour former l'épidote zoïsite, en combinant la quantité d'oxigène qui s'y rapporte avec de l'oxigène de silice et de l'oxigène d'alumine, conformément à la formule, c'est à-dire

Oxigène de silice...............	0,00672	: 3
Oxigène d'alumine..............	0,00448	: 2
Oxigène reste de la chaux	0,00224	: 1

Enfin, on fera de la thallite avec tous les restes qui sont:

Oxigène reste de silice..........	0,02193	: 3
Oxigène reste d'alumine.........	0,01462	: 2
Oxigène reste du bioxide de fer...	0,00731	: 1

Cela fait, il n'y a plus qu'à calculer les quantités relatives d'oxide d'après la proportion d'oxigène que chacun renferme (1). Pour la trémolite, on fera les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,1206	:	x	=	0,2322
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*		
0,2809	:	1	::	0,0134	:	y	=	0,0477
Oxigène de magnésie...				0,0402	=	*magnésie.*		0,1040
						Trémolite.....		0,3839

Pour l'actinote, on fera les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,12655	:	x	=	0,2436
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*		
0,2809	:	1	::	0,01406	:	y	=	0,0501
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*		
0,2277	:	1	::	0,04218	:	z	=	0,1852
						Actinote...		0,4789

Pour le zoïsite, on aura les proportions

---

(1) Nous avons déja indiqué la composition de la silice, de l'alumine, de la chaux et du bioxide de fer; le magnésie se compose de

Oxigène.........	0,3871
Magnesium......	0,6129
	1,0000

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,00672	:	x	=	0,0129
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*		
0,4671	:	1	::	0,00448	:	y	=	0,0096
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*		
0,2809	:	1	::	0,00224	:	z	=	0,0080
						Zoïsite......		0,0305

Enfin, pour la thallite, on aura les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,02193	:	x	=	0,0422
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*		
0,4671	:	1	::	0,01462	:	y	=	0,0313
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*		
0,2277	:	1	::	0,00731	:	z	=	0,0321
						Thallite.......		0,1056

par conséquent, l'analyse donnée peut être transformée en

Amphibole	Trémolite........	0,3839	0,863
	Actinote.........	0,4789	
Épidote..	Zoïsite...........	0,0305	0,136
	Thallite..........	0,1056	
			0,999

Si, au lieu d'avoir les données dont nous avons fait usage pour employer toute la magnésie à faire de l'amphibole trémolite, nous n'en avions eu aucune, et si nous avions imaginé de faire à la fois de l'épidote à base de magnésie et de la trémolite, nous aurions eu indétermination dans le calcul. En

effet, rien ne pouvant nous indiquer la quantité de magnésie à employer pour l'une ou l'autre substance, nous pourrions alors faire varier à l'infini les quantités de trémolite, d'actinote et de thallite, depuis *o* de thallite, auquel cas on prendrait toute épidote à base de magnésie, jusqu'à 0,1056 de thallite auquel cas l'épidote magnésienne est nulle, comme nous l'avons supposé.

Si l'on voulait employer la première méthode de calcul, il faudrait, après avoir vérifié la supposition de mélange que l'on adopte, chercher les quantités de silice correspondantes aux portions d'oxigène de cette substance qui entrent dans chacune des espèces mélangées. Ainsi, on chercherait la quantité de silice correspondante à 0,24715 d'oxigène qui entre dans les amphiboles, et celle qui correspond à 0,02865 d'oxigène que l'on a pris pour les épidotes. Pour cela, on ferait les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice des amphiboles.*	
0,5195	:	1	::	0,24715	:	x	$= 0,4758$
Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice des épidote.*	
0,5195	:	1	::	0,02865	:	y	$= 0,0551$

Cela fait, on suivrait pour le calcul la marche que nous avons indiquée. On emploierait la magnésie pour faire de la trémolite, en partant de la composition théorique de cette substance exprimée en poids. On emploierait ensuite le reste de la silice des amphiboles pour former de l'actinote, d'après la composition théorique de cette espèce exprimée également en poids. Le reste de la chaux s'emploierait pour former le zoïsite en établissant préalablement sa composition ; et enfin, le reste de la silice consacrée aux épidotes, de l'alumine

et du bioxide de fer, formerait le thallite. On voit, par cet exposé, que le calcul, suivant cette méthode, se complique de la recherche préalable des quantités de silice correspondantes à certaines portions qu'il faut avoir d'abord fixées; sans cette recherche, il serait impossible de rien faire régulièrement, et l'on ne pourrait arriver au résultat qu'après beaucoup de tâtonnement. Il résulte de là, comme nous l'avons déja dit, que le calcul où l'on prend pour base les quantités numériques fournies par l'analyse, est réellement moins simple que celui où l'on part des quantités d'oxigène correspondantes aux diverses matières extraites par l'analyse.

IV[e] Cas. — *Analyses renfermant des composés de même base, ou de bases isomorphes, d'ordres différents.*

Ces sortes de complications doivent être extrêmement fréquentes dans la nature; plusieurs de nos analyses en offrent des exemples, et il n'y a pas de doute que l'attention une fois éveillée sur ce point, on en découvrira beaucoup d'autres. La méthode qui est applicable à ce cas n'est pas tout-à-fait aussi simple que celle dont nous venons de faire usage; mais elle ne sort pas heureusement des plus simples éléments d'algèbre, qu'il n'est pas permis aujourd'hui d'ignorer.

Les corps dont il s'agit ici devant renfermer des combinaisons d'ordres différents, le problème qu'on a à résoudre consiste à partager la quantité de chacun des corps trouvés par l'analyse, ou bien les nombres atomiques correspondants, ou enfin les quantités d'oxigènes, si ce sont des oxides, en diverses portions, de manière à avoir autant de séries de nombres que l'on suppose de corps différents mélangés, et

que dans chaque série les nombres soient en rapport avec telle ou telle formule de composition. Ce partage est toujours le résultat de la solution de quelques équations à plusieurs inconnues.

Soient x, x' x'', etc., les portions de divers éléments électro-négatifs et électro-positifs, ou les quantités atomiques de ces corps, ou bien les portions d'oxigène correspondantes, qui se rapportent à l'une des formules de composition; soient y, y' y'' des portions des mêmes corps qui se rapportent à une seconde formule; z, z' z'' les portions qui se rapportent à un troisième corps, etc. : x, y, z, etc., appartenant au corps électro-négatif, x', y', z', x'' y'' z'', etc., appartenant aux corps électro-positifs. On aura d'abord les équations

$x + y + z$, etc. $=$ { Poids du corps électro-négatif, quantité atomique de ce corps ou oxigène correspondant.

$x' + y' + z'$, etc. $=$ { Poids d'un des corps électro-positif, quantité atomique de ce corps ou oxigène correspondant.

$x'' + y'' + z''$, etc. $=$ { Poids d'un autre corps électro-positif, quantité atomique de ce corps ou oxigène correspondant.

etc. etc.

Maintenant on connaît, par des observations quelconques, les lois de composition de chacun des corps que l'on suppose être mélangés entre eux; par conséquent, on a des rapports entre les quantités x, x', x'', y, y', y'', z, z', z'', etc.; d'où l'on peut tirer x' et x'' en fonction de x, y' et y'' en fonction de y, z' et z'' en fonction de z, etc., etc. : il en résulte donc que la première équation restant la même, les autres se trouvent transformées en x, y, z, etc. : c'est-à-dire

que l'on parvient, en général, à avoir autant d'équations qu'il y a d'inconnues exprimant les portions du corps électro-négatif. Il n'y a plus qu'à résoudre ces équations, et à substituer les valeurs de x, y, z dans les expressions conditionnelles qu'on a pour x', x'', y', y'', z', z'', etc.

Telle est la marche générale qu'il faut suivre; nous allons l'éclaircir par des exemples, en les choisissant de manière à présenter quelques-unes des circonstances que l'on peut rencontrer.

Ier *Exemple.*

L'analyse du pyroxène de Sahla a fourni à M. Henri Rose les données suivantes :

Silice	0,5486	tenant oxigène	0,2849
Chaux	0,2357		0,0662
Magnésie	0,1649		0,0638
Protoxide de fer	0,0444		0,0101
Oxide de manganèse	0,0042		0,0009
Alumine	0,0021		0,00098
	0,9999		

J'ai supposé, pour discuter cette analyse, que l'alumine appartenait à un peu de grenat mélangé, qu'il faut commencer par extraire, en prenant, suivant la formule, des grenats.

Oxigène de silice	0,00196	: 2
Oxigène de l'alumine	0,00098	: 1
Oxigène de bioxide	0,00098	: 1

Il reste après cette opération :

Oxigène de silice	0,28294
Oxigène de bioxide	0,14002

On voit que ces restes approchent beaucoup du rapport 1 à 2 qui constitue les pyroxènes; mais qu'il y a un peu trop de silice, ce qui doit faire soupçonner mélange d'un silicate d'un ordre plus élevé. Or, ce qui se présente de plus simple est de supposer qu'il y a mélange d'une petite quantité d'amphibole, dans lequel, comme on sait, il entre un trisilicate.

Pour vérifier cette conjecture, il y a ici, comme pour les autres cas, deux moyens : l'un consiste à partir des quantités d'oxigène que nous venons d'avoir pour restes, à les partager proportionnellement aux formules de pyroxène et d'amphibole, et à revenir ensuite par le calcul aux quantités d'oxides correspondantes. La seconde méthode consiste à prendre les nombres mêmes que l'analyse a donnés, et, après avoir extrait le grenat, à partager le reste de la silice, de la chaux, etc., par des équations de condition entre pyroxène et amphibole, d'après la composition numérique de ces substances. La première méthode, à laquelle on est déja tout préparé par le premier essai que nous avons fait, est, sinon plus simple, du moins moins fastidieuse que la seconde, et elle est beaucoup plus précise; nous allons d'abord l'employer, et nous donnerons ensuite l'exemple de la seconde.

Calcul d'après les quantités d'oxigène.

Nommons x et x' les quantités d'oxigène de la silice et des bioxides qui doivent entrer dans les pyroxènes, et y, y' les quantités d'oxigène des mêmes matières qui doivent entrer dans les amphiboles. Nous aurons d'abord les deux

équations

$$x + y = 0,28294 \text{ oxigène de silice}$$
$$x' + y' = 0,14002 \text{ oxigène des bioxides.}$$

Maintenant les pyroxènes sont des bisilicates; par conséquent, l'oxigène de la silice qu'ils renferment est à celui des bioxides comme 2 à 1; on a donc $x : x' :: 2 : 1$; d'où

$$x' = \frac{x}{2}.$$

Les amphiboles ont pour formule générale

$$Ca\dddot{S}i^2 + \left.\begin{matrix}\ddot{M} \\ \ddot{F} \\ \text{etc.}\end{matrix}\right\}^3 \dddot{S}i^4$$

c'est-à-dire que l'oxigène de la silice est à celui des bases bioxides comme 9 à 4; par conséquent on a

$$y : y' :: 9 : 4, \text{ d'où } y' = \frac{4y}{9};$$

en substituant ces conditions, les deux équations précédentes deviennent

$$x + y = 0,28294$$
$$\frac{x}{2} + \frac{4y}{9} = 0,14002$$

d'où l'on tire $x = 0,25684$ et $y = 0,0261$. Par conséquent, le reste que nous avons obtenu après la soustraction du grenat se partage réellement en deux substances, comme nous l'avons supposé; l'une est un pyroxène pour lequel on doit prendre

x = oxigène de silice. 0,25684

$\frac{x}{2}$ = oxigène de bioxide. 0,12842

L'autre est un amphibole pour lequel on a

y = oxigène de silice. 0,0261

$\frac{4y}{9}$ = oxigène de bioxide. 0,0116

Il ne s'agit plus que de choisir les bioxides que l'on fera entrer dans les trois substances dont on vient de reconnaître le mélange. Mais à cet égard il y a indétermination, et l'on peut, sans rien changer à ce que nous venons de faire, prendre indifféremment de la chaux, de la magnésie, etc., pour faire le grenat. Pour nous fixer à cet égard, il faudrait avoir l'analyse du grenat qui peut se trouver à Sahla en association avec le pyroxène; car alors on pourrait prendre ici des quantités proportionnelles à celles qu'on aurait trouvées dans cette substance. N'ayant pas cette analyse, nous ne pouvons aller que par supposition, et nous supposerons ici, ce qui, au reste, est fort peu important, que l'oxide de manganèse appartient au grenat, et que ce qu'il faut pour achever d'employer l'alumine en une substance de ce genre est du bioxide de fer. Nous composerons donc les grenats comme il suit, en prenant pour l'un

Oxigène de silice.	0,0018	: 2
Oxigène d'alumine.	0,0009	: 1
Oxigène de l'oxide de manganèse. . .	0,0009	: 1

et pour l'autre

Oxigène de silice.	0,00016	: 2
Oxigène reste de l'alumine.	0,00008	: 1
Oxigène de bioxide de fer.	0,00008	: 1

Nous trouvons la même indétermination pour l'amphibole ; il faudrait que nous eussions une analyse de l'amphibole qui peut se trouver associé au pyroxène, pour savoir s'il est formé de trémolite et d'actinote, et dans ce cas, quel est le rapport des deux substances. N'ayant aucune analyse comparative, nous pouvons prendre toutes les quantités imaginables d'actinote entre *o* de bioxide de fer employé à cette formule, et 0,01002 d'oxigène de ce bioxide qui reste après en avoir employé une partie au grenat, et qui est plus petit que 0,0116, que les amphiboles exigent ici en bioxide : on aurait alors plus ou moins de bisilicate de fer pour les pyroxènes, suivant qu'on aura fait plus ou moins d'actinote. Dans l'incertitude où nous sommes, le plus simple est de supposer l'amphibole uniquement composé de trémolite ; dès-lors on prendra pour faire cette substance

Oxigène de silice	0,0261	:	9	
Oxigène de chaux	0,0029	:	1	4
Oxigène de magnésie	0,0087	:	3	

Actuellement, nous n'avons plus qu'à faire des bisilicates avec le reste des bioxides, et leur somme sera la quantité de pyroxène qui existe dans l'analyse. Nous aurons

Oxigène de silice	0,1266	:	2
Oxigène reste de la chaux	0,0633	:	1
Oxigène de silice	0,1102	:	2
Oxigène reste de la magnésie	0,0551	:	1
Oxigène de silice	0,02004	:	2
Oxigène reste du bioxide de fer	0,01002	:	1

Voilà le partage fait, et il n'y a plus qu'à calculer les quantités d'oxides qui correspondent à ces portions d'oxigène. Pour

le grenat manganésien, on aura à faire les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,0018	:	x	=	0,00346
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*		
0,4671	:	1	::	0,0009	:	y	=	0,00193
Oxigène de l'oxide de manganèse								
= 0,0009 = *oxide de manganèse*.........								0,00420
				Grenat manganésien...				0,00959

Pour l'almandin, on aura à faire

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,00016	:	x	=	0,00030
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*		
0,4671	:	1	::	0,00008	:	y	=	0,00017
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*		
0,2277	:	1	::	0,00008	:	z	=	0,00035
				Grenat almandin....				0,00082

Pour la trémolite, on a les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*		
0,5195	:	1	::	0,0261	:	x	=	0,05024
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*		
0,2809	:	1	::	0,0029	:	y	=	0,01033
Oxigène.		*Magnésie.*		*Oxigène.*		*Magnésie.*		
0,3871	:	1	::	0,0087	:	z	=	0,02247
				Trémolite......				0,08304

Pour les pyroxènes, on aura

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*
0,5195	:	1	::	0,1266	:	x = 0,24369
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*
0,2809	:	1	::	0,0663	:	y = 0,22534
				Bisilicate de chaux.......		0,46903

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*
0,5195	:	1	::	0,1102	:	x = 0,21212
Oxigène.		*Magnésie.*		*Oxigène.*		*Magnésie.*
0,3871	:	1	::	0,0551	:	y = 0,14234
				Bisilicate de magnésie......		0,35446

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*
0,5195	:	1	::	0,02004	:	x = 0,03857
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*
0,2277	:	1	::	0,01002	:	y = 0,04399
				Bisilicate de fer........		0,08256

Par conséquent, l'analyse donnée renferme

Pyroxène	$\dot{Ca}^3\dddot{Si}^4$	0,46903	0,90605
	$\dot{M}^3\dddot{Si}^4$	0,35446	
	$\dddot{F}^3\dddot{Si}^4$	0,08256	
Trémolite........................			0,08304
Grenat..	Manganésien..	0,00959	0,01041
	Almandin....	0,00082	
			0,99950

C'est un résultat auquel on peut se borner jusqu'à ce qu'on sache quelle est la base des grenats que l'on trouve à Sahla en association avec le pyroxène, et qui peuvent être mélangés avec cette substance. Il faudra aussi savoir quel est le

mélange d'actinote que l'on peut admettre dans l'amphibole. Au reste, cela est fort peu important; l'essentiel était de reconnaître la présence des trois formules dans l'analyse, et surtout la présence des grenats, qui explique si bien celle de l'alumine.

La petite erreur que l'on trouve ici dans les dix millièmes tient aux décimales négligées dans toute la série des calculs.

Calcul par les nombres donnés par l'analyse.

Donnons maintenant l'exemple de la seconde méthode de calcul. On doit aussi commencer par extraire les grenats; or, en raisonnant comme précédemment, nous serons également conduits à voir qu'on peut prendre des grenats à base quelconque, et nous pourrons de même les supposer à bases d'oxide de manganèse et d'oxide de fer.

Pour extraire ces grenats, on cherchera d'abord la composition théorique en poids du grenat manganésien, qu'on trouvera être

Silice	0,3649
Alumine	0,2030
Oxide de manganèse	0,4321
	1,0000

on prendra alors l'oxide de manganèse fourni par l'analyse, et on le combinera avec de la silice et de l'alumine, proportionnellement à cette composition, en faisant

Oxide de manganèse.		*Silice.*		*Oxide de manganèse.*		*Silice.*		
0,4321	:	0,3649	::	0,0042	:	x	=	0,0035
Oxide de manganèse.		*Alumine.*		*Oxide de manganèse.*		*Alumine.*		
0,4321	:	0,2030	::	0,0042	:	y	=	0,0019
				Oxide de manganèse donné				0,0042
				Grenat manganésien				0,0096

On prendra ensuite le reste de l'alumine, 0,0002 pour base, et on la combinera avec de la silice et du bioxide de fer, proportionnellement à la composition théorique du grenat almandin, qui est :

Silice	0,37073
Alumine	0,20622
Bioxide de fer	0,42295
	0,99990

en faisant les proportions

Alumine.		*Silice.*		*Alumine.*		*Silice.*		
0,20622	:	0,37073	::	0,0002	:	x	=	0,0003
Alumine.		*Bioxide de fer.*		*Alumine.*		*Bioxide de fer.*		
0,20622	:	0,37073	::	0,0002	:	y	=	0,0004
				Alumine donnée				0,0002
				Grenat almandin				0,0009

Il reste alors les diverses matières suivantes :

Silice	0,5448
Chaux	0,2357
Magnésie	0,1649
Bioxide de fer	0,0440

C'est dans ce reste que nous devons trouver les amphiboles et les pyroxènes. Pour les déterminer, nommons x, x', x'' les quantités de silice, de chaux et de magnésie qui composent l'amphibole trémolite; nommons y, y', y'' les quantités de silice, de chaux et de bioxide de fer qui composent l'amphibole actinote; nommons z et z' les quantités de silice et de chaux du bisilicate de chaux; u et u' les quantités de silice et de magnésie du bisilicate de magnésie; t et t' les quantités de silice et de fer qui doivent former le bisilicate de fer. Nous aurons les équations suivantes :

$x+y+z+u+t \ldots\ldots = 0{,}5448$ silice.
$x'+y'+z' \ldots\ldots = 0{,}2357$ chaux.
$x''+u' \ldots\ldots = 0{,}1649$ magnésie.
$y''+t' \ldots\ldots = 0{,}0440$ bioxide de fer.

Remarquons maintenant qu'après avoir pris x', x'', y', y'', z', u', t' en fonctions de x, y, z, t, u, nous n'aurons de même que quatre équations; or il y a cinq inconnues, par conséquent il faut se donner une des quantités en cherchant les limites dans lesquelles peuvent se trouver ses valeurs, sous la condition que toutes les autres soient positives, et qu'aucune ne soit nulle.

L'indétermination porte ici sur ce que nous ne savons pas s'il existe ou s'il n'existe pas d'amphibole actinote dans le mélange, et que, dans la supposition où il en existe, nous n'avons rien qui nous indique quel rapport nous devons admettre entre la quantité d'actinote et celle de trémolite; il faudrait, pour le savoir, qu'il existât une analyse de l'amphibole qui peut se rencontrer à Sahla.

Pour établir les limites dont nous avons besoin, il faut

d'abord supposer que l'actinote n'est pas nulle, et par conséquent $y'' > 0$, puis tirer la valeur de t' dans la quatrième équation, qui donne

$$t' = 0{,}0440 - y''.$$

Maintenant, pour que t' ne soit pas nul et qu'il soit positif, il faut qu'on ait $y'' < 0{,}0440$. Ainsi, nous pouvons donner à y'' toutes les valeurs possibles entre 0 et 0,0440; nous aurons alors plus ou moins de bisilicate de fer pour le pyroxène, suivant la valeur que nous prendrons pour y''.

Dans le cas présent, hypothèse pour hypothèse dans la valeur de y'', il vaut autant faire tout de suite cette quantité égale à zéro, ce qui simplifie le problème; on a alors aussi $y = 0$, $y' = 0$, et les équations deviennent

$$x + z + u + t \ldots\ldots = 0{,}5448$$
$$x' + z' \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}2357$$
$$x'' + u' \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}1649$$
$$t' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}0440$$

Pour transformer les trois dernières en fonction de x, z, u, t, on cherchera d'abord la composition de la trémolite, qui est :

Silice	0,6050
Chaux	0,1243
Magnésie	0,2707
	1,0000

au moyen de laquelle on fera les proportions

$$x : x' :: 0{,}6050 : 0{,}1243$$
$$x : x'' :: 0{,}6050 : 0{,}2707$$

par conséquent on a

$$x' = \frac{0{,}1243}{0{,}6050}x = (0{,}2054)\,x$$

$$x'' = \frac{0{,}2707}{0{,}6050}x = (0{,}4474)\,x$$

On cherchera ensuite la composition du bisilicate de chaux, que l'on trouvera de

Silice	0,5195
Chaux	0,4805
	1,0000

par le moyen de laquelle on fera

$$z : z' :: 0{,}5195 : 0{,}4805$$

et par conséquent,

$$z' = \frac{0{,}4805}{0{,}5195}z = (0{,}9249)\,z.$$

La composition du bisilicate de magnésie, qui est

Silice	0,5984
Magnésie	0,4016
	1,0000

donnera $u : u' :: 0{,}5984 : 0{,}4016$; d'où l'on tirera

$$u' = \frac{0{,}4016}{0{,}5984}u = (0{,}6711)\,u.$$

Enfin, le bisilicate de fer étant formé de

Silice	0,4671
Bioxide de fer	0,5329
	1,0000

donnera $t : t' :: 0{,}4671 : 0{,}5329$.

Mais nous avons	$t' =$	0,0440
et l'on tire.....	$t =$	0,0385
Bisilicate de fer.......		0,0825

c'est la quantité de pyroxène à base de fer.

Moyennant ces conditions, les équations précédentes se réduisent aux trois suivantes :

$$x + z + u \ldots\ldots\ldots\ldots = 0{,}5063$$
$$(0{,}2054)x + (0{,}9249)z. = 0{,}2357$$
$$(0{,}4474)x + (0{,}6711)u. = 0{,}1649$$

d'où l'on peut tirer les valeurs suivantes :

$$x = 0{,}0518$$
$$z = 0{,}2433$$
$$u = 0{,}2112$$

et en substituant dans les équations de condition, on a

$$x' = (0{,}2054)x = 0{,}0106$$
$$x'' = (0{,}4474)x = 0{,}0232$$
$$z' = (0{,}9249)z = 0{,}2250$$
$$u' = (0{,}6711)u = 0{,}1417$$

et par conséquent,

$$x' + z' = 0{,}2356 \quad \text{chaux}$$
$$x'' + u' = 0{,}1649 \quad \text{magnésie.}$$

La petite différence que l'on observe ici entre la quantité de chaux fournie par le calcul et celle que présente l'analyse, tient à quelques décimales négligées ; si l'on prenait un plus grand nombre de décimales, elle disparaîtrait bientôt.

En admettant les valeurs que nous venons de trouver pour x, z et u, on a pour la trémolite

x	= silice.............	0,0518
x'	= chaux............	0,0106
x''	= magnésie..........	0,0232
	Trémolite.......	0,0856

Pour le bisilicate de chaux, on a

z	= silice.............	0,2433
z'	= chaux............	0,2250
		0,4683

Enfin, pour le bisilicate de magnésie, on a

u	= silice................	0,2112
u'	= magnésie.............	0,1417
		0,3529

par conséquent l'analyse que nous avons discutée peut être regardée, dans cette méthode, comme représentant le mélange suivant :

Pyroxène	$\dot{C}a^3\dddot{S}i^4$............	0,4683	
	$\dot{M}^3\dddot{S}i^4$.............	0,3529	0,9037
	$\dot{F}^3\dddot{S}i^4$.............	0,0825	
Trémolite..............................			0,0856
Grenat..	Manganésien	0,0096	0,0105
	Almandin..........	0,0009	
			0,9998

Si on compare ce résultat avec celui que nous avons obtenu par la première méthode, on verra qu'il y a quelques

différences; elles tiennent aux décimales qui ont été négligées en établissant la composition numérique des diverse substances d'après les formules atomiques. Ces décimales négligées ne sont rien pour chaque substance en particulier, mais les différences se compliquent dans la série des calculs qu'on est obligé de faire, et finissent par être très-sensibles. Pour les éviter il faut recalculer les compositions des diverses espèces en prenant quelques décimales de plus; par ce moyen, on parvient bientôt à diminuer considérablement les erreurs, et à les faire rentrer dans la limite de celles qu'on est susceptible de faire dans le cours des opérations chimiques, et qu'on peut par conséquent négliger.

Ce sont les erreurs qu'on observe ici, qui font le principal inconvénient de la méthode où l'on part des nombres mêmes qui ont été fournis par l'analyse. La nécessité de calculer les compositions numériques des diverses substances que l'on suppose être mélangées, la rend infiniment plus longue que l'autre. Si l'on joint à cela cet autre inconvénient qu'on ne découvre qu'après avoir fini tous les calculs, si la supposition que l'on a faite est vraie ou fausse, on jugera qu'il vaut toujours mieux partir des quantités d'oxigène, ou des nombres atomiques, qui correspondent aux diverses quantités qu'on a trouvées par l'analyse.

Nous prendrons encore quelques exemples pour bien faire connaître la méthode dans tous ces détails; mais nous avons assez vu combien le calcul, par les quantités d'oxigène, est plus avantageux que l'autre, pour le suivre maintenant sans revenir sur celui-ci, qui est encore plus compliqué et plus incertain dans les analyses que nous allons discuter.

IIe *Exemple.*

L'analyse n° 3, que nous avons déja prise pour exemple de calcul en la supposant isolée, a fourni

Silice	0,409	tenant oxigène	0,21247
Alumine...........	0,289	....	0,13499
Chaux............	0,162	....	0,04550
Bioxide de fer......	0,140	....	0,03188

Nous avons vu, pages 241 et 301, qu'on pouvait la considérer comme une analyse d'épidote mélangée de silicate de bioxide de fer avec un peu de silice surabondante; mais les renseignements que nous avons nous font voir que cette substance est accompagnée de grenat, de sorte qu'on est conduit à penser que c'est le mélange de cette matière qui dérange les proportions.

Pour vérifier cette conjecture, nommons x, x', x'' les quantités d'oxigène de silice, d'alumine et de bioxide qui doivent entrer dans les épidotes; nommons $y, y' y''$ les quantités de même genre qui doivent entrer dans les grenats. Nous aurons d'abord les trois équations suivantes :

$$x + y = 0{,}21247 \text{ oxigène de la silice.}$$
$$x' + y' = 0{,}13499 \text{ oxigène de l'alumine.}$$
$$x'' + y'' = 0{,}07738 \text{ oxigène des bioxides.}$$

Maintenant la formule des épidotes étant

$$4\dddot{A}\dddot{S}i + \left.\begin{matrix}\ddot{C}a\\ \ddot{F}\end{matrix}\right\}^3 \dddot{S}i^2$$

les quantités d'oxigène de la silice, de l'alumine et du bioxide de fer sont entre elles comme les nombres 3, 2 et 1. Par conséquent nous avons $x' = \frac{2x}{3}$, et $x'' = \frac{x'}{2} = \frac{x}{3}$.

La formule des grenats étant

$$2\dddot{A}\dddot{S}i + \left.\begin{matrix}\ddot{C}a\\ \ddot{F}\\ \text{etc.}\end{matrix}\right\}^3 \dddot{S}i^2$$

les quantités d'oxigène de la silice, de l'alumine et des bioxides que cette substance renferme sont entre elles comme les nombres 2, 1 et 1 ; par conséquent nous avons $y' = \frac{y}{2}$, $y'' = y' = \frac{y}{2}$.

En substituant ces conditions, les équations précédentes deviennent

$$x + y = 0{,}21247$$
$$\frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = 0{,}13499$$
$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 0{,}07738$$

Comme il y a ici trois équations pour deux inconnues, il faut que deux d'entre elles satisfassent à la troisième et aux conditions, si l'analyse renferme réellement les deux substances supposées, et rien qu'elles, et si les données fournies par l'opération chimique sont rigoureusement exactes.

Les deux premières équations donnent les valeurs

$$x = 0{,}172534 \qquad y = 0{,}039936$$

et par conséquent

$x' = 0{,}1150226 \qquad y' = 0{,}019968$
$x'' = 0{,}0575113 \qquad y'' = 0{,}019968$

$$x + y = 0{,}21247$$
$$x' + y' = 0{,}1349906$$
$$x'' + y'' = 0{,}0774793$$

par où l'on voit qu'il n'y a qu'une légère erreur de 0,0000993 en plus dans la dernière équation, comparativement aux quantités données; c'est-à-dire que par l'analyse nous aurions dû trouver une légère quantité de plus en chaux ou en oxide de fer, ou peut-être de l'une et de l'autre : si l'erreur est tout entière sur la chaux, on aurait dû en trouver 0,00035 de plus, quantité qui est presque inappréciable par nos moyens, et qui est par conséquent dans la limite des erreurs possibles.

Cette petite différence ne peut donc pas nous empêcher d'admettre la solution; cependant comme il y a trois équations et seulement deux inconnues, et qu'on n'arrive pas à des valeurs rigoureusement exactes, il doit y avoir trois solutions, dont il est nécessaire de comparer les résultats pour savoir s'il n'y en a pas de plus favorables encore que ceux que nous venons de trouver.

La première équation combinée avec la troisième donne:

$x = 0{,}17313 \qquad y = 0{,}039342$
$x' = 0{,}11542 \qquad y' = 0{,}019671$
$x'' = 0{,}05771 \qquad y'' = 0{,}019671$

$$x + y = 0{,}21247$$
$$x' + y' = 0{,}13509$$
$$x'' + y'' = 0{,}07738$$

La seconde équation et la troisième donnent :

$$x = 0{,}172725 \qquad y = 0{,}03968$$
$$x' = 0{,}11515 \qquad y' = 0{,}01984$$
$$x'' = 0{,}057575 \qquad y'' = 0{,}01984$$
$$x + y = 0{,}212405$$
$$x' + y' = 0{,}13499$$
$$x'' + y'' = 0{,}077415$$

Dans la seconde solution, l'erreur est portée sur l'alumine, dont on aurait dû trouver 0,0002 de plus par l'analyse. Dans la troisième solution, l'erreur est partagée entre la silice et les bioxides; il y aurait, dans ce cas, 0,0001 de silice de trop, et 0,0001 de chaux ou de bioxide de fer de moins, dans les résultats que les opérations chimiques ont fournis.

Il est naturel d'adopter cette dernière solution, qui partage l'erreur sur deux substances. Nous prendrons donc pour former les épidotes :

x = oxigène de silice............ 0,172725
x' = oxigène d'alumine........... 0,115150
x'' = oxigène de bioxide.......... 0,057575

et pour les grenats,

y = oxigène de silice............ 0,03968
y' = oxigène d'alumine........... 0,01984
y'' = oxigène de bioxide.......... 0,01984

Il faut maintenant faire le choix des bioxides pour composer le zoïsite, la thallite, le grossulaire et l'almandin, s'il y a lieu. Mais, pour cela, il y a encore une indétermination : nous pouvons à volonté employer toute la chaux, par exemple, pour faire le zoïsite, et il n'y aura point de grossulaire; ou

bien, nous pouvons prendre tout l'oxide de fer pour la thallite, et il n'y aura point d'almandin. Heureusement nous avons, pour nous fixer à cet égard, l'analyse n° 5, qui est celle du grenat associé à l'épidote, et qui doit être celui que nous avons ici en mélange. Cette analyse nous fait voir que ce grenat renferme beaucoup de grossulaire, et aussi de l'almandin; nous devons donc tendre à faire, dans notre mélange, un grenat qui soit à peu près de la même espèce que celui de cette analyse. Or nous voyons dans ce grenat, que l'oxigène de la chaux est à celui du bioxide de fer à peu près comme 59 à 26; c'est donc dans ce rapport que nous devons prendre la chaux et l'oxide de fer des grenats, et dans lequel par conséquent nous avons à partager le nombre 0,01984.

Pour faire ce partage, nommons x et y les deux nombres qui correspondent l'un à la chaux et l'autre au bioxide de fer. Nous aurons d'un côté

$$x : y :: 59 : 26$$

et de l'autre,

$$x + y = 0{,}01984.$$

De ces deux relations nous tirerons

$$x = 0{,}01377, \qquad y = 0{,}00607$$

Nous prendrons donc pour le grenat grossulaire cette quantité x d'oxigène de chaux, et nous ferons

Oxigène de silice................	0,02754
Oxigène d'alumine................	0,01377
Oxigène de chaux................	0,01377

Les restes de l'oxigène de la silice et de l'alumine assigné

aux grenats, avec le bioxide de fer dont nous venons d'établir la quantité, 0,00607, composeront le grenat almandin, pour lequel on aura :

Oxigène de silice................	0,01214
Oxigène d'alumine...............	0,00607
Oxigène de bioxide de fer.........	0,00607

Maintenant, avec le reste de l'oxigène de la chaux nous composerons le zoïsite, en prenant

Oxigène de silice................	0,09519
Oxigène d'alumine...............	0,06346
Oxigène de chaux...............	0,03173

Enfin, le reste de l'oxigène de la silice, de l'alumine et du bioxide de fer composera la thallite, pour laquelle on aura :

Oxigène de silice................	0,077535
Oxigène d'alumine...............	0,051690
Oxigène de bioxide de fer........	0,025845

Il n'y a plus actuellement qu'à calculer les différentes quantités d'oxides qui correspondent à ces portions d'oxigène. Pour le grossulaire, on fera les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,02754	:	x	= 0,0530
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*	
0,4671	:	1	::	0,01377	:	y	= 0,0294
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*	
0,2809	:	1	::	0,01377	.	z	= 0,0489
				Grenat grossulaire.....			0,1313

Pour l'almandin, on aura les proportions :

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,01214	:	x	= 0,0234
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*	
0,4671	:	1	::	0,00607	:	y	= 0,0130
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*	
0,2277	:	1	::	0,00607	:	z	= 0,0266
				Grenat almandin.......			0,0630

Pour le zoïsite, on fera :

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,09519	:	x	= 0,1832
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*	
0,4671	:	1	::	0,06346	:	y	= 0,1358
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*	
0,2809	:	1	::	0,03173	:	z	= 0,1129
				Zoïsite.......			0,4319

Enfin, pour la thallite, on aura :

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,077535	:	x	= 0,1492
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*	
0,4671	:	1	::	0,05169	:	y	= 0,1106
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*	
0,2277	:	1	::	0,025845	:	z	= 0,1135
				Thallite.............			0,3733

Ainsi, la substance dont nous avons pris l'analyse peut être regardée comme formée de

Épidote.	Zoïsite......... 0,4319		0,8052
	Thallite........ 0,3733		
Grenat..	Grossulaire..... 0,1313		0,1943
	Almandin...... 0,0630		
			0,9995

IIIe *Exemple.*

Nous prendrons un exemple d'une autre circonstance des problèmes qui nous occupent, et qui nous sera fourni par l'analyse de la trémolite claire d'Aker, que nous devons à M. Bonsdorff. Ce chimiste l'a trouvée composée de

Silice..................	0,5624	tenant oxigène 0,2921
Alumine...............	0,0432	 0,0202
Magnésie...............	0,2413	 0,0934
Chaux.................	0,1295	 0,0364
Oxidule de fer..........	0,0100	 0,0023
Oxidule de manganèse....	0,0026	 0,0006
Acide fluorique.........	0,0078	 0,0057
Eau....................	0,0050	
	1,0018	

M. Bonsdorff indique que cette substance est engagée dans le carbonate de chaux, où elle est accompagnée de spinelle, de wernerite compacte et de mica. D'après cela, on peut soupçonner que le dérangement qu'on remarque dans les proportions tient au mélange de ces matières. J'ai déja avancé page 270, qu'en admettant un mélange de spinelle et de wernerite on parvenait à un résultat très-simple, et il n'est pas inutile de faire voir ici comment.

Pour déterminer la quantité de ces diverses matières, il

faut d'abord employer l'acide fluorique; et comme on ignore avec quoi il peut être combiné, le plus simple est de supposer du fluate de chaux pour lequel il faut prendre

Oxigène d'acide fluorique	0,0057
Oxigène de chaux	0,0057

après quoi il reste

Oxigène de silice	0,2921
Oxigène d'alumine	0,0202
Oxigène de magnésie	0,0934
Oxigène de chaux	0,0307
Oxigène de protoxide de fer	0,0023
Oxigène de protoxide de manganèse	0,0006

Maintenant, si l'on suppose seulement un mélange d'amphibole, de spinelle et de wernerite, on trouve que la quantité de silice est un peu trop petite; il faut pour parvenir à un résultat exact admettre une petite quantité d'un silicate d'un ordre moins élevé, et l'admission du pyroxène, qui se présente naturellement, satisfait à la question.

Pour arriver à connaître les quantités respectives de ces différentes substances, nommons x et x' l'oxigène de la silice et celui des bases bioxides qui entrent dans l'amphibole; nommons y, y' les quantités d'oxigène de la silice et des bases bioxides qui entrent dans le pyroxène; nommons $z, z', z,$ les quantités d'oxigène de la silice, de l'alumine et des bases bioxides qui entrent dans la wernerite; enfin, nommons u et u' les quantités d'oxigène de l'alumine et des bases bioxides qui entrent dans le spinelle. Nous aurons les équations suivantes :

$x+y+z$ .... $=$ 0,2921 oxigène de la silice.
$x'+y'+z''+u'$ .. $=$ 0,1270 oxigène des bioxides.
$z'+u$ .... $=$ 0,0202 oxigène l'alumine.

La formule des amphiboles étant

$$\ddot{C}a\dddot{S}i^2 + \left.\begin{matrix}\ddot{M} \\ \ddot{F} \\ \text{etc.}\end{matrix}\right\}^3 \dddot{S}i^4$$

les quantités d'oxigène de la silice et des bases sont comme les nombres 9 et 4 : par conséquent $x : x' :: 9 : 4$; d'où $x' = \frac{4x}{9}$.

Le pyroxène étant une réunion de bisilicates, l'oxigène de la silice est à celui des bases comme 2 à 1; par conséquent $y' = \frac{y}{2}$.

La formule de la wernerite est

$$6\dddot{A}\dddot{S}i + \underset{\text{etc.}}{\ddot{C}a^3}\dddot{S}i^2$$

c'est-à-dire que les quantités d'oxigène de la silice, de l'alumine et des bases bioxides sont comme les nombres 4, 3 et 1; par conséquent on a

$$z : z' :: 4 : 3 \quad \text{d'où} \quad z' = \frac{3z}{4}$$

$$z : z'' :: 4 : 1 \quad \text{d'où} \quad z'' = \frac{z}{4}.$$

Enfin, la formule des spinelles est $\ddot{M}\dddot{A}^4$, c'est-à-dire que l'oxigène de l'alumine est à celui de la base comme 6 à 1; par conséquent on a $u' = \frac{u}{6}$.

En inscrivant ces conditions dans les équations précéden-

tes, elles deviennent

$$x + y + z \ldots\ldots = 0{,}2921$$

$$\frac{4x}{9} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} + \frac{u}{6} = 0{,}1270$$

$$\frac{3z}{4} + u \ldots\ldots\ldots = 0{,}0202$$

Nous n'avons ici que trois équations, et il existe quatre inconnues; par conséquent il y a un certain nombre de solutions dont il est nécessaire de chercher les limites, sous la condition que toutes les valeurs soient positives et qu'aucune ne soit nulle.

Pour avoir ces limites, il suffit de résoudre ces équations en une des inconnues, en z, par exemple; ce qui donne:

$$u = 0{,}0202 - \frac{3z}{4}$$

$$x = 0{,}403488 - \frac{27z}{4}$$

$$y = \frac{23z}{4} - 0{,}111388$$

Maintenant, pour que u, x, y soient positifs, il faut qu'on ait, d'après leurs valeurs exprimées en fonctions de z,

$$\frac{3z}{4} < 0{,}0202 \quad \text{ou} \quad z < 0{,}0269$$

$$\frac{27z}{4} < 0{,}403488 \quad \text{ou} \quad z < 0{,}05977$$

$$\frac{23z}{4} > 0{,}111388 \quad \text{ou} \quad z > 0{,}01937$$

on peut donc prendre toutes les valeurs entre $z > 0{,}01937$ et $z < 0{,}0269$.

Telle est la limite des solutions. Si l'on fait $z = 0{,}02$, ce qui donne à peu près le maximum de wernerite, on a $u = 0{,}0052$.

$$x = 0{,}268488, \quad y = 0{,}0036\,12$$

D'après cela, les autres valeurs deviennent

$$x' = \frac{4x}{9} = 0{,}119327$$

$$y' = \frac{y}{2} = 0{,}001806$$

$$z' = \frac{3z}{4} = 0{,}015$$

$$z'' = \frac{z}{4} = 0{,}005$$

$$u' = \frac{u}{6} = 0{,}000866$$

qui vérifient toutes les équations.

Il résulte de là qu'il faut prendre, pour la formation des amphiboles,

x = oxigène de silice........ 0,268488
x' = oxigène de bioxide..... 0,119327

pour la formation des pyroxènes,

y = oxigène de silice....... 0,0036 12
y' = oxigène de bioxide...... 0,001806

pour former la wernerite,

z = oxigène de silice....... 0,020
z' = oxigène d'alumine...... 0,015
z'' = oxigène de bioxide...... 0,005

et enfin, pour former le spinelle,

u = oxigène d'alumine........ 0,00520
u' = oxigène de bioxide....... 0,00086

Il ne s'agit plus maintenant que de choisir les bioxides qui doivent entrer dans chacun des corps ; pour cela, il faudrait avoir des renseignements sur la composition de chacune des substances mélangées qui se trouvent isolément à Aker ; on les formerait alors proportionnellement à cette composition, comme nous avons fait pour les grenats de l'exemple précédent. N'ayant pas ces renseignements, le plus simple est de supposer que l'amphibole est uniquement formé de trémolite ; que tout le reste de la chaux appartient à la wernerite, et que c'est la magnésie et l'oxide de fer qui saturent le reste de la silice destinée à cette substance ; que le spinelle est à base de magnésie ; et qu'enfin, le pyroxène est à base de fer et de manganèse.

D'après ces conventions, on prendra, pour l'amphibole trémolite,

Oxigène de silice.............	0,268488	: 9
Oxigène de chaux............	0,029832	: 1
Oxigène de magnésie..........	0,089496	: 3

Pour le spinelle, on prendra

Oxigène d'alumine..............	0,0062	: 6
Oxigène de magnésie...........	0,00086	: 1

Pour la wernerite, on prendra les trois compositions suivantes :

Oxigène de silice.............	0,003472	: 4
Oxigène d'alumine............	0,002604	: 3
Oxigène de chaux	0,000868	: 1
Oxigène de silice.............	0,012176	: 4
Oxigène d'alumine............	0,009132	: 3
Oxigène de magnésie..........	0,003044	: 1

Oxigène de silice	0,004352	: 4
Oxigène d'alumine	0,003264	: 3
Oxigène de bioxide de fer	0,001088	: 1

Enfin, pour les pyroxènes, on aura

Oxigène de silice	0,002424	: 2
Oxigène de bioxide de fer	0,001212	: 1
Oxigène de silice	0,0012	: 2
Oxigène de bioxide de manganèse	0,0006	: 1

Il n'y a plus qu'à calculer les diverses quantités d'oxides correspondantes à ces portions d'oxigène. On fera, pour la trémolite,

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,268488	:	x	= 0,5168
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*	
0,2809	:	1	::	0,029832	:	y	= 0,1062
Oxigène.		*Magnésie.*		*Oxigène.*		*Magnésie.*	
0,3871	:	1	::	0,089496	:	z	= 0,2312
						Trémolite	0,8542

Pour le spinelle, on fera les proportions

Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*	
0,4671	:	1	::	0,0052	:	x	= 0,0111
Oxigène.		*Magnésie.*		*Oxigène.*		*Magnésie.*	
0,3871	:	1	::	0,00086	:	y	= 0,0022
						Spinelle	0,0133

Pour les wernerites, on aura les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,003472	:	x	= 0,0067
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*	
0,4671	:	1	::	0,002604	:	y	= 0,0056
Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*	
0,2809	:	1	::	0,000868	:	z	= 0,0031
				Wernerite de chaux........			0,0154

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,012176	:	x	= 0,0234
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*	
0,4671	:	1	::	0,009132	:	y	= 0,0196
Oxigène.		*Magnésie.*		*Oxigène.*		*Magnésie.*	
0,3871	:	1	::	0,003044	:	z	= 0,0078
				Wernerite magnésienne.....			0,0508

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,004352	:	x	= 0,0084
Oxigène.		*Alumine.*		*Oxigène.*		*Alumine.*	
0,4671	:	1	::	0,003264	:	y	= 0,0069
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*	
0,2277	:	1	::	0,001088	:	z	= 0,0048
				Wernerite ferrugineuse......			0,0201

Pour les pyroxènes, on fera les proportions

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,002424	:	x	= 0,0046
Oxigène.		*Bioxide de fer.*		*Oxigène.*		*Bioxide de fer.*	
0,2277	:	1	::	0,001212	:	y	= 0,0053
				Bisilicate de fer........			0,0099

Oxigène.		*Silice.*		*Oxigène.*		*Silice.*	
0,5195	:	1	::	0,0012	:	x	= 0,0023

Oxide de manganèse donné.......... 0,0026

Bisilicate de manganèse.. 0,0049

Enfin, pour le fluate de chaux, on a

Oxigène.		*Chaux.*		*Oxigène.*		*Chaux.*	
0,2809	:	1	::	0,0057	:	x	= 0,0203

Acide fluorique donné.......... 0,0078

Fluate de chaux..... 0,0281

L'analyse de M. Bonsdorff peut donc se transformer en

Trémolite			0,8542
Wernerite	Calcaire	0,0154	0,0863
	Ferrugineuse	0,0201	
	Magnésienne	0,0508	
Spinelle			0,0133
Pyroxène	Ferrugineux	0,0099	0,0148
	Manganésien	0,0049	
Fluate de chaux			0,0281
Eau hygrométrique			0,0050
			1,0017

Ve Cas. — *Analyses qui ne peuvent être discutées que par tâtonnement.*

Nous avons vu jusqu'ici des analyses accompagnées de renseignements sur la nature des matières associées, et nous avons pu les discuter régulièrement, parce que tous les corps découverts par les opérations chimiques étaient en quantités déterminées; mais lorsque cette détermination n'a plus lieu, la discussion ne peut plus être conduite de même, et ce n'est

que par tâtonnement qu'on peut arriver à reconnaître la quantité de telle ou telle espèce de mélange. Le mode de tâtonnement qu'il faut employer peut sans doute varier à l'infini, suivant les cas qui peuvent se présenter; mais je ne crois pas inutile de donner quelques exemples qui pourront du moins fournir quelques idées dans des cas analogues.

Ier *Exemple.*

L'analyse n° 14, page 253, a donné

Silice	0,316	tenant oxigène	0,16416
Alumine	0,678		0,31667
Chaux	0,002		0,00056
Potasse	0,002		0,00034
Acide fluorique	traces		
	0,998		

Les renseignements que nous avons sur les matières qui sont associées à celle qui a fourni cette composition, la présence de la potasse, les traces d'acide fluorique, peuvent conduire à penser que ce qui dérange ici les proportions du disthène, est le mélange d'une certaine quantité de la matière micacée que nous avons aussi analysée. Or il est clair que si l'acide fluorique était dosé, le calcul serait facile, et ce qui se présente naturellement à faire est de tâcher de réparer cette indétermination. Pour atteindre ce but, il faut partir de la quantité de potasse, qui probablement a été fournie par le mica, et d'après laquelle on peut calculer la quantité de cette substance.

La matière micacée qui accompagne le disthène a fourni

à l'analyse

Silice	0,513
Alumine	0,319
Magnésie	0,031
Chaux	0,052
Potasse	0,062
Acide fluorique	0,021
	0,998

D'après cette donnée, on trouve que 0,002 de potasse correspondent aux nombres suivants :

Silice	0,01654
Alumine	0,01029
Magnésie	0,00100
Chaux	0,00168
Potasse	0,00200
Acide fluorique	0,00067
Mica	0,03218

Nous pouvons donc supposer que c'est là la quantité de mica qui se trouve dans le disthène. Pour vérifier ce soupçon, il faut soustraire de l'analyse les quantités de silice et d'alumine que nous venons d'employer, et voir si les restes sont dans les proportions qu'exige le disthène. Après avoir fait cette soustraction, il reste

Silice	0,29946	tenant oxigène	0,155569	: 1 —
Alumine	0,66771		0,311887	: 2

Maintenant, en comparant les quantités d'oxigène de ces restes, nous voyons que la silice est un peu trop faible pour avoir le rapport 1 à 2 ; or, dans l'analyse même, c'était préci-

sément le contraire, la quantité de silice était un peu trop forte : il est donc évident que nous avons supposé une trop grande quantité de mica, et il est clair qu'en en prenant une plus petite, nous arriverons à un terme moyen, où la silice et l'alumine resteront en proportions convenables pour former du disthène. Or l'erreur que nous avons ici sur la silice est très-petite, car elle ne correspond qu'à 0,000374 d'oxigène; par conséquent, la quantité de mica que l'on doit prendre n'est pas de beaucoup plus petite que 0,03218 que nous venons d'essayer. Nous avons déja dit que le nombre 0,031 satisfaisait sensiblement; en calculant les éléments du mica sur ce nombre, on trouve

Silice................	0,01593
Alumine..............	0,00991
Magnésie..............	0,00096
Chaux................	0,00161
Potasse..............	0,00192
Acide fluorique........	0,00065
Mica...........	0,03098

Si l'on soustrait les quantités de silice et d'alumine de l'analyse, il reste

Silice..............	0,30007	tenant oxigène 0,155886	: 3
Alumine...........	0,66809	 0,312065	: 2
Disthène....	0,96816		

En comparant les quantités d'oxigène de ces restes, on voit que la première approche beaucoup d'être la moitié de la seconde, puisque la différence n'est que de 0,000146; il est clair qu'on approcherait encore plus en prenant une quan-

tité de mica encore un peu plus petite. Mais nous nous arrêterons ici; car l'erreur sur la silice, qui correspond à cette différence, est déja au-dessous de la limite des erreurs possibles dans les opérations : nous aurions même pu nous en tenir au nombre 0,03218, si nous n'avions voulu donner l'exemple d'une plus grande approximation.

D'après cela, nous pouvons regarder l'analyse comme correspondant sensiblement au mélange de

Disthène.............	0,96816
Mica...............	0,03098
	0,99914

Il est clair, d'après la composition de la quantité de mica qui se trouve ici mélangée, que la petite quantité de magnésie qui ne va qu'à un millième a été entraînée avec la chaux dont elle a augmenté le poids, et peut-être aussi avec l'alumine. On voit également comment nous avons trouvé 0,002 de potasse, puisqu'il est impossible d'apprécier un dix millième en plus ou en moins. Enfin, on voit encore que l'acide fluorique se trouvant seulement dans les dix millièmes, il a été impossible de le doser, et que nous n'avons pu en annoncer que des traces. La discussion que nous avons établie a encore ici l'avantage de rétablir une partie de la perte que nous avons éprouvée.

IIe *Exemple.*

Le cas que nous venons d'examiner est assez simple; mais il peut s'en trouver de plus compliqués, et nous en avons un exemple dans l'analyse n° 15, qui a donné

Silice	0,531	tenant oxigène	0,27585
Alumine	0,017		0,00794
Chaux	0,114		0,03203
Magnésie	0,078		0,03019
Bioxide de fer	0,256		0,05819
Bioxide de manganèse	0,002		0,00044
Potasse	traces		
Acide fluorique	traces		

Cette analyse se rapproche des proportions des amphiboles, et les renseignements que nous avons sur les matières accompagnantes peuvent nous faire soupçonner que les petites erreurs qu'elle présente tiennent au mélange d'un peu de grenat, de disthène, et aussi de mica qui est annoncé par les traces de potasse et d'acide fluorique. Mais ces dernières substances n'étant pas dosées, ce qui se présente de plus simple est de les négliger d'abord, sauf à y revenir plus tard.

En négligeant le mica, l'alumine que présente l'analyse ne peut plus appartenir qu'au disthène ou au grenat; mais la dernière substance est la seule qui conduise à un résultat admissible. On commencera donc par extraire un grenat, en partant de l'alumine donnée : pour cela, on prendra

Oxigène de silice	0,01588	: 2
Oxigène d'alumine	0,00794	: 1
Oxigène de bioxide	0,00794	: 1

En prenant ensuite le reste de l'oxigène des bioxides, on composera les amphiboles, pour lesquels on aura

Oxigène de silice	0,2540475
Oxigène reste des bioxides	0,1129100

Il reste alors 0,0059225 d'oxigène de silice sans emplois.

On peut, si l'on veut, achever le calcul dans cette supposition, et l'on arrivera à un mélange déterminé d'amphibole et de grenat, avec une certaine quantité de silice surabondante; mais comme nous sommes conduits à penser que ces surabondances de silice sont plutôt dues à un mélange de silicate d'un certain ordre, qu'à un mélange de quarz, on peut revenir sur la quantité de cette matière qu'on a trouvée en plus. Or la quantité d'oxigène 0,0059225, que nous avons regardée comme un reste appartenant à la silice, peut être aussi considérée comme une somme de diverses quantités d'oxigène fournies par différents oxides, et par conséquent, par les matières qui entrent dans le mica que nous avons négligé. Dans cette hypothèse, il faut partager le nombre 0,0059225, dans les proportions des quantités d'oxigène qui correspondent aux différents éléments de l'espèce de mica que nous avons analysé. Ce mica est composé de

Silice	0,513	tenant oxigène	0,26650
Alumine	0,319		0,14900
Magnésie	0,031		0,01200
Chaux	0,052		0,01461
Potasse	0,062		0,01051
Acide fluorique	0,021		0,01527
			0,46789

Il s'agit donc de partager le nombre 0,0059225 en six parties proportionnelles aux quantités 0,26650, 0,14900, etc., par des proportions telles que

$$0,46789 : 0,26650 :: 0,0059225 : x = 0,003368$$
$$0,46789 : 0,14900 :: 0,0059225 : y = 0,001886$$

La série des calculs donne pour résultats

Oxigène de silice	0,003368
Oxigène d'alumine	0,001886
Oxigène de magnésie	0,000152
Oxigène de chaux	0,000184
Oxigène de potasse	0,000133
Oxigène d'acide fluorique	0,000193

En soustrayant ces nombres de ceux qui correspondent dans l'analyse donnée, il reste

Oxigène de silice	0,272482
Oxigène d'alumine	0,006054
Oxigène de chaux	0,031846
Oxigène de magnésie	0,030038
Oxigène de bioxide de fer	0,058190
Oxigène de bioxide de manganèse	0,000440

Avec ces nombres, nous essaierons de nouveau de faire des grenats et des amphiboles, en prenant d'abord l'alumine pour base, puis le reste des bioxides : nous aurons alors

Oxigène de silice	0,012108	: 2
Oxigène d'alumine	0,006054	: 1
Oxigène de bioxide	0,006054	: 1
Oxigène de silice	0,257535	: 9
Oxigène reste des bioxides	0,114460	: 4

mais il reste encore 0,002839 d'oxigène de silice non employée.

On voit qu'en supposant la quantité précédente de mica mélangée avec notre substance, l'erreur sur la silice est moins forte que celle que nous avions avant. Il est donc à présu-

mer qu'en admettant une quantité plus grande de ce mica, l'erreur deviendra encore plus faible. Or, pour arriver à avoir la quantité convenable de mica, ce qui se présente de plus simple est d'ajouter ce nouveau reste au premier, et de partager la somme 0,0087615, comme nous avons partagé le nombre 0,0059225.

En faisant ce nouveau calcul, retranchant les quantités que l'on trouve de celles qui correspondent dans l'analyse donnée, on arrive à une nouvelle série de quantités d'oxigène, dont il faut essayer encore d'extraire des grenats et des amphiboles. Cette extraction faite, on trouve un nouveau reste d'oxigène de silice exprimé par 0,001355625.

On voit que l'erreur est encore moindre que précédemment, et il est évident qu'en recommençant encore le calcul, on le diminuera de nouveau. Mais, cette fois, nous pouvons approcher du véritable résultat à peu après utant que nous le voudrons. En effet, nous pouvons remarquer que ces restes suivent une certaine loi; le second reste approche beaucoup d'être la moitié du premier; le troisième, d'être de la moitié du second : donc le reste que nous aurons dans le nouveau calcul sera un peu moins de 0,000677; le suivant sera un peu moins de 0,000338; un autre, un peu moins de 0,000169; un autre encore, un peu moins de 0,000084. Or, dès l'instant que l'erreur est dans les dix millièmes, il est clair que nous devons regarder les résultats comme exacts, d'après nos moyens d'opération : on s'arrêtera donc où l'on voudra dans cette série de nombre. Nous prendrons ici proportionnellement un peu moins que la somme de toutes les quantités que nous venons de citer, et nous l'ajouterons, avec notre dernier reste, au nombre qui nous a servi pour

le second calcul; nous nous arrêterons ainsi à 0,011388022, qu'il faut partager proportionnellement aux quantités d'oxigène que renferment les différents éléments du mica. Nous aurons alors

Oxigène de silice..............	0,006486
Oxigène d'alumine.............	0,003628
Oxigène de magnésie...........	0,000292
Oxigène de chaux..............	0,000355
Oxigène de potasse............	0,000255
Oxigène d'acide fluorique.......	0,000371

et en retranchant ces nombres de ceux qui correspondent dans l'analyse, il nous reste

Oxigène de silice................	0,269364
Oxigène d'alumine...............	0,004312
Oxigène de chaux................	0,031675
Oxigène de magnésie.............	0,029898
Oxigène de bioxide de fer.........	0,058190
Oxigène de bioxide de manganèse..	0,000440

En employant l'alumine pour faire des grenats, nous aurons

Oxigène de silice.............	0,008624	: 2
Oxigène de l'alumine..........	0,004312	: 1
Oxigène de bioxide	0,004312	: 1

le reste de la silice, étant employé en amphiboles, donnera

Oxigène de silice..............	0,260740	: 9
Oxigène de bioxide...........	0,115884	: 4

après quoi, il reste 0,000007 d'oxigène de bioxide surabondant, quantité dont l'oxide correspondant est infiniment au-

dessous de la limite des erreurs possibles pendant les opérations de l'analyse.

La nouvelle supposition est donc tout-à-fait admissible, et il n'y a plus qu'à faire le choix des bioxides qui doivent entrer dans les différents composés. Pour cela, nous emploierons d'abord toute la magnésie pour faire de la trémolite, en prenant

Oxigène de silice	0,089694	: 9
Oxigène de chaux	0,009966	: 1
Oxigène de la magnésie	0,029898	: 3

On emploiera ensuite le reste de la silice destinée aux amphiboles pour faire de l'actinote, en prenant

Oxigène reste de silice	0,171046
Oxigène de chaux	0,019005
Oxigène de bioxide de fer	0,057015

Le reste de la chaux sera employée en grenat grossulaire, en prenant

Oxigène de silice	0,005408	: 2
Oxigène d'alumine	0,002704	: 1
Oxigène reste de chaux	0,002704	: 1

Le reste du bioxide de fer sera consacré au grenat almandin, pour lequel on prendra

Oxigène de silice	0,002350	: 2
Oxigène d'alumine	0,001175	: 1
Oxigène reste du bioxide de fer	0,001175	: 1

Enfin, le reste de l'oxigène de la silice et de l'alumine formera avec l'oxide de manganèse un grenat manganésien,

pour lequel on aura

Oxigène de silice................	0,000866
Oxigène d'alumine................	0,000433
Oxigène de bioxide de manganèse...	0,000440

dans lequel il y aura une erreur de 0,000007 sur l'oxide de manganèse, erreur qui ne mérite aucune attention.

Il ne s'agit plus actuellement que de calculer les quantités d'oxides qui correspondent à ces portions d'oxigène, par les méthodes que nous avons tant de fois répétées. On trouve alors que l'analyse donnée peut être regardée comme un mélange des diverses substances suivantes :

Amphibole	Trémolite....	0,2853	0,9324
	Actinote.....	0,6471	
Grenat...	Grossulaire...	0,0258	0,0426
	Almandin....	0,0122	
	Manganésien..	0,0046	
Mica..........................			0,0243
			0,9993

En étudiant les quantités de matières qui entrent dans cette portion de mica, et qu'on trouve par le calcul de

Silice..................	0,0125
Alumine.................	0,0078
Magnésie................	0,0007
Chaux...................	0,0013
Potasse.................	0,0015
Acide fluorique..........	0,0005

on voit facilement comment on n'a pu reconnaître par l'a-

nalyse que des traces de potasse et d'acide fluorique, puisqu'il n'y a qu'un millième de la première substance, et seulement cinq dix millièmes de la seconde. Peut-être même ces matières sont-elles encore, dans l'amphibole analysé, en plus petite quantité que nous ne le voyons ici; en effet, il suffit d'admettre dans la discussion un peu de grenat magnésien, ce qui pourrait fort bien être, pour que la quantité de mica se trouve bientôt réduite de plus de moitié.

On doit reconnaître, par ces deux exemples, qu'il est possible même d'éclaircir par le calcul des analyses dans lesquelles il y a quelques éléments indéterminés, pourvu qu'on ait les renseignements nécessaires sur la nature des substances associées à celle qu'on a particulièrement à examiner.

MÉMOIRE

SUR

L'ÉQUILIBRE ET LE MOUVEMENT DES CORPS ÉLASTIQUES.

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie, le 14 avril 1828.

Le problème de la *chaînette* est la première question dans laquelle les géomètres aient considéré l'équilibre d'une courbe flexible. Il consiste, comme on sait, à déterminer la courbe que doit former une chaîne pesante, soutenue par ses deux extrémités. C'est à Leibnitz et aux Bernouilli qu'on en doit la solution, sur laquelle Galilée s'était trompé, et qui a passé maintenant dans les Traités élémentaires de mécanique. Elle est fondée sur la considération d'une force de grandeur inconnue, qui agit suivant les deux prolongements de chaque élément de la courbe, et qu'on appelle la *tension* de la chaînette en chacun de ses points. On y suppose la chaînette parfaitement flexible. Dans un autre problème, celui de la *lame élastique*, on a tenu compte pour la première fois de la tendance d'une courbe, formée d'une matière élastique, à reprendre sa figure naturelle. Au commencement du siècle

dernier, Jacques Bernouilli en a donné la solution dans un Mémoire qui fait partie de ceux de notre ancienne Académie. Il s'appuie sur un principe, adopté ensuite par tous les géomètres qui ont traité la même question. Jacques Bernouilli suppose que dans une lame élastique en équilibre, le moment de la force qui tend à ramener en ligne droite deux éléments consécutifs, est proportionnel, en chaque point de la courbe, à l'angle de contingence, ou en raison inverse du rayon de courbure. Pour se rendre raison de son hypothèse, il faut considérer, avec ce grand géomètre, les différents filets d'une lame pliée, et avoir égard aux contractions des uns et aux dilatations des autres; ces petites variations de longueur donnent effectivement lieu à des forces longitudinales qui leur sont proportionnelles, dont la résultante est nulle, si l'extension moyenne de la lame l'est aussi, mais dont le moment total n'est pas égal à zéro : on trouve sa valeur proportionnelle à l'angle de deux éléments consécutifs de la courbe, en admettant toutefois, comme une donnée de l'expérience, qu'une droite tracée suivant l'épaisseur de la lame, et qui était primitivement normale à ses faces, demeure encore perpendiculaire à sa courbure, après que la lame a été pliée. Par cette décomposition de la lame en filets longitudinaux, on trouve aussi que le moment de sa force élastique est proportionnel au cube de l'épaisseur, toutes choses d'ailleurs égales.

Après les questions relatives à l'équilibre des cordes et des lames élastiques, sont venues naturellement celles qui concernent leur mouvement, et particulièrement leurs petites vibrations, d'où dépendent les différents sons qu'elles font entendre. Ce fut Dalembert qui résolut le premier, d'une manière générale, le problème des *cordes vibrantes*, dont

Taylor avait donné auparavant une solution qui n'était que particulière. Ce problème est un de ceux qui ont donné naissance au calcul aux différences partielles; et la solution de Dalembert est fondée sur l'intégration directe d'une équation de cette nature, et sur la considération des fonctions arbitraires que son intégrale renferme. Lagrange donna, quelques années après, une autre solution du même problème, sur laquelle l'attention des géomètres s'est portée de nouveau dans ces derniers temps. Les fonctions arbitraires y sont remplacées par des séries de quantités périodiques qui en représentent les valeurs pour toute la longueur de la corde, soit que, dans cet intervalle, ces fonctions ne changent pas de forme, ou soit qu'il s'agisse de fonctions discontinues. Or, dans un grand nombre de questions de physique ou de mécanique, il n'arrive pas que les équations aux différences partielles dont elles dépendent, puissent s'intégrer sous forme finie; on est donc alors obligé de recourir à des solutions analogues à celle de Lagrange, qui ont d'ailleurs toute la généralité que chaque question comporte, et sont souvent plus commodes que celles qui se déduisent des intégrales sous forme finie, dans les cas où celles-ci nous sont données. De cette manière, les inconnues qu'il s'agit de déterminer se trouvent exprimées par des sommes de quantités dont chacune satisfait séparément à toutes les conditions du problème, et en est une solution particulière. Dans les questions de mécanique, cette superposition de solutions particulières n'est autre que le principe de Daniel Bernouilli sur la *coexistence des petites oscillations;* et elle tient, en général, à la forme linéaire des équations de chaque problème. La méthode que ce géomètre avait suivie pour résoudre de son

côté le problème des cordes vibrantes, en partant de la solution particulière qu'on devait à Taylor, était donc fondée sur le même principe que la solution de Lagrange; mais D. Bernouilli ne faisait pas voir comment on pouvait représenter par des séries de quantités périodiques, l'état initial de la corde, supposé entièrement arbitraire; et c'est en cela que l'analyse de Lagrange était indispensable pour compléter la solution de Taylor et de D. Bernouilli.

Les vibrations des lames élastiques ont été déterminées par Euler et D. Bernouilli, dans tous les cas où les extrémités de la lame vibrante peuvent se trouver. Leurs solutions sont aussi formées de la superposition d'un nombre quelconque de solutions particulières; mais il y manque d'avoir montré comment elles peuvent toujours représenter l'état initial de la lame; ce qui, toutefois, n'influe nullement sur les lois des vibrations qu'ils en ont déduites, et qui sont conformes à celles que les physiciens ont trouvées par l'expérience.

Tels sont, en peu de mots, les principaux résultats relatifs à l'équilibre et au mouvement des corps élastiques, qui étaient connus lorsque j'essayai d'aller plus loin dans un *Mémoire sur les surfaces élastiques,* lu à l'Institut en 1814. J'ai supposé que les points d'une plaque élastique, courbée d'une manière quelconque, se repoussent mutuellement suivant une fonction de la distance qui décroît très-rapidement et devient insensible dès que la variable a acquis une grandeur sensible; hypothèse qui m'a conduit à une équation d'équilibre des surfaces élastiques, laquelle prend la même forme que celle de la simple lame courbée en un seul sens, quand on l'applique à ce cas particulier. Mais cette manière d'envisager la question ne convient rigoureusement qu'à une surface sans

épaisseur, sur laquelle sont placés des points matériels, contigus ou très-peu distants les uns des autres ; et quand, au contraire, on a égard à l'épaisseur de la plaque courbée, ses particules se distinguent en deux sortes : les unes se repoussent effectivement en vertu de la contraction qui a lieu du côté de la concavité, et les autres s'attirent en vertu de la dilatation produite du côté opposé. Il était donc nécessaire de reprendre de nouveau cette question ; et pour qu'elle soit complètement résolue il faudra trouver, relativement à une plaque élastique d'une épaisseur donnée, les conditions qui doivent être satisfaites, soit en tous ses points, soit à ses bords en particulier, pour l'équilibre des forces qui lui sont appliquées et des actions mutuelles de ses molécules. Ajoutons qu'il serait à désirer que les géomètres reprissent sous ce point de vue physique et conforme à la nature les principales questions de la mécanique. Il a fallu les traiter d'une manière tout-à-fait abstraite, pour découvrir les lois générales de l'équilibre et du mouvement ; et en ce genre de généralité et d'abstraction, Lagrange est allé aussi loin qu'on puisse le concevoir, lorsqu'il a remplacé les liens physiques des corps par des équations entre les coordonnées de leurs différents points : c'est là ce qui constitue la *Mécanique analytique ;* mais à côté de cette admirable conception, on pourrait maintenant élever la *Mécanique physique,* dont le principe unique serait de ramener tout aux actions moléculaires, qui transmettent d'un point à un autre l'action des forces données, et sont l'intermédiaire de leur équilibre. De cette manière, on n'auraitplus d'hypothèses spéciales à faire lorsqu'on voudra appliquer les règles générales de la mécanique à des questions particulières. Ainsi, dans le problème de l'équi-

libre des cordes flexibles, la tension qu'on introduit pour le résoudre, sera le résultat immédiat des actions mutuelles des molécules, un tant soit peu écartées de leurs positions naturelles; dans le cas de la lame élastique, le moment d'élasticité par flexion proviendra de ces mêmes actions, considérées dans toute l'épaisseur de la plaque, et son expression sera déterminée sans aucune hypothèse; enfin, les pressions exercées par les fluides dans leur intérieur et sur les parois des vases qui les contiennent, seront aussi les résultantes des actions de leurs molécules sur les surfaces pressées, ou plutôt sur une couche fluide extrêmement mince, en contact avec chaque surface. Le principe de l'égalité de pression en tous sens, qui sert de base à l'hydrostatique et que l'on emprunte de l'expérience, sera actuellement une conséquence de cette notion de la pression moléculaire, et de la parfaite mobilité des particules fluides. En effet, par un point quelconque d'une masse fluide que j'appellerai A, menons une droite aussi petite que l'on voudra, et cependant extrêmement grande eu égard aux intervalles qui séparent les molécules et au rayon de leur sphère d'activité, de sorte que cette droite rencontre un nombre très-grand et comme infini de particules matérielles. Supposons que ce nombre soit d'abord sensiblement le même dans toutes les directions autour du point A; condition qui suffira pour que la pression, telle qu'on vient de la définir, soit aussi la même en tous sens autour de ce même point : cela étant, si l'on exerce sur une partie libre de la surface du fluide une pression quelconque, les molécules se rapprocheront les unes des autres; et ce qui caractérise une masse fluide, et la distingue généralement d'un corps solide élastique, c'est qu'en vertu de leur mobilité par-

faite, les particules fluides se disposeront toujours autour de chaque point A, comme on vient de le supposer; d'où il résulte que la pression moléculaire aura augmenté par l'effet du rapprochement des molécules, sans cesser d'être la même en tous sens autour de chacun des points de la masse fluide. Cette conséquence ne dépend pas de son degré de compressibilité; il suffit seulement que le fluide jouisse de cette propriété, à un degré aussi faible que l'on voudra; et c'est effectivement ce qui a lieu dans les liquides même dont le volume résiste le plus aux forces extérieures. Elle ne dépend pas non plus du petit intervalle de temps pendant lequel les molécules parviennent à la disposition autour de chaque point A, que suppose l'égalité de pression en tous sens. Cependant, ce temps, quoique très-court et sans doute inappréciable dans les fluides parfaits où l'on observe cette égalité de pression; ce temps, disons-nous, peut être néanmoins très-différent dans ces différents fluides. Cette diversité n'influera nullement sur leur équilibre, qui ne s'établit qu'après que le petit intervalle de temps dont nous parlons est écoulé; mais en sera-t-il de même par rapport à leur mouvement? c'est une question que nous pourrons examiner dans une autre occasion.

En général, dans les applications de la mécanique, on doit avoir égard, autant qu'on le peut, à toutes les circonstances physiques qui tiennent à la nature intime des corps; et il y a déja long-temps qu'on en a senti la nécessité, pour faire disparaître l'indétermination de certaines questions de mécanique abstraite; indétermination qui ne saurait avoir lieu dans la nature, où tout, en effet, doit être déterminé et ne comporter qu'une seule solution. L'exemple le plus simple

de cette abstraction est celui que présente le choc des corps durs, lorsqu'on ne leur suppose aucun degré de compressibilité : le phénomène alors est instantané; et la seule condition qu'on ait à remplir, c'est que la vitesse du corps qui va devant ne soit pas moindre que celle du corps qui va derrière; condition à laquelle on peut satisfaire d'une infinité de manières, et qui laisse indéterminé l'état des deux mobiles après le choc. Mais si les mobiles sont compressibles, aussi peu que l'on voudra, le phénomène du choc dure un certain temps; il s'achève à l'instant précis où leurs vitesses étant parvenues graduellement à l'égalité par l'effet de leur compression mutuelle, les deux corps n'agissent plus l'un sur l'autre; et cette condition de l'égalité des deux vitesses après le choc détermine complètement celles dont les mobiles se trouveront animés. Soit encore, pour exemple, un poids posé sur une table soutenue par plus de trois pieds. Si l'on considère la table comme un plan rigoureusement inflexible, les charges que ses pieds devront supporter auront une infinité de valeurs différentes, dont la somme sera égale au poids donné; ce qui ne présente rien d'inconcevable, en observant qu'il ne s'agit que d'une simple décomposition de forces, et que cet énoncé ne signifie rien autre chose, si ce n'est qu'une force donnée peut se décomposer d'une infinité de manières différentes, en plus de trois autres forces parallèles à sa direction. Cependant, il serait absurde qu'en réalité la charge de chaque pied pût avoir plusieurs valeurs; et en effet, l'indétermination disparaît, lorsque l'on tient compte du degré d'élasticité propre à la matière de la table, et de la flexion qu'elle éprouve, quelque peu considérable qu'on la suppose. On trouvera dans mon Mémoire la solution d'un cas particulier de ce problème de mécanique physique, dans lequel on suppose

qu'une plaque circulaire est appuyée à la fois par son centre et par son contour, et où l'on demande suivant quel rapport la charge due à son poids se partagera entre ces deux appuis : j'ai obtenu pour ce rapport une quantité déterminée, qui ne dépend ni du diamètre, ni de l'épaisseur de la plaque, non plus que de son degré d'élasticité, mais qui n'est pas la même selon que le contour est encastré, ou qu'il n'est qu'appuyé verticalement.

Je reviens maintenant à l'objet principal de ce Mémoire, où je me suis proposé spécialement de former les équations de l'équilibre et du mouvement des verges et des plaques élastiques, d'après la considération des actions mutuelles de leurs molécules. Mais il importe d'abord de faire à ce sujet une observation sans laquelle le calcul des forces dues à cette cause deviendrait illusoire. Dans tous les cas où l'on a considéré jusqu'ici l'action moléculaire, par exemple, dans les théories de la capillarité et de la chaleur, on a toujours exprimé les forces qui dérivent de cette action, par des intégrales définies ; cependant cette manière de les représenter ne leur est point applicable, ainsi qu'on va le voir par les considérations suivantes.

Lorsqu'un corps est dans son état naturel, c'est-à-dire lorsqu'il n'est comprimé par aucune force, qu'il est placé dans le vide, et qu'on fait même abstraction de son poids, non-seulement chaque molécule est en équilibre dans son intérieur et à sa surface, mais on verra de plus, dans ce Mémoire, que la résultante des actions moléculaires est séparément nulle des deux côtés opposés de chaque petite partie du corps. Dans cet état, les distances qui séparent les molécules doivent être telles que cette condition soit remplie, en ayant égard à leur attraction mutuelle et à la répulsion

calorifique que nous comprenons aussi parmi les actions moléculaires. Quelque dur et quelque solide que soit un corps, la force qui s'oppose à la séparation de ses parties est nulle ou n'existe pas dans l'état dont nous parlons : elle ne commence à naître que quand nous cherchons à effectuer cette séparation, et que nous changeons un tant soit peu les distances des molécules. Or, si l'on exprime cette force par une intégrale, il arrive que sa valeur étant nulle dans l'état naturel du corps, elle le sera encore après la variation quelconque des distances moléculaires, en sorte que le corps n'opposerait aucune résistance à la séparation de ses parties, ce qui serait une absurdité. Il en résulte donc que la somme qui exprime l'action totale d'une série de molécules disjointes ne peut pas se convertir en une intégrale définie ; ce qui tient à la nature de la fonction des distances qui représente l'action de chaque molécule. Les forces moléculaires, dont on trouvera les expressions dans le § Ier de ce Mémoire, ont été calculées d'après ce principe, et réduites néanmoins à la forme la plus simple dont elles soient susceptibles.

Les paragraphes suivants contiennent les équations de l'équilibre et du mouvement, déduites de ces forces, et relatives soit à tous les points, soit aux extrémités des cordes et des verges, des membranes et des plaques élastiques. Parmi ces équations, celles qui répondent au contour d'une plaque élastique pliée d'une manière quelconque, et celles qui appartiennent à tous les points d'une plaque ou d'une membrane qui est restée plane, n'avaient pas encore été données ; les autres coïncident avec les équations précédemment trouvées par différents moyens. Lorsque j'ai intégré ces équations pour en déduire les lois des vibrations sonores, j'ai exprimé les

intégrales par des séries de solutions particulières de chaque question, ainsi qu'il a été dit plus haut. Les coefficients de ces séries ont été déterminés en suivant la méthode que j'ai déja employée dans un autre Mémoire, et dont les applications diverses, que l'on trouvera dans celui-ci, montreront toute la généralité et l'uniformité. Un avantage de cette méthode, est de fournir en même temps un moyen de démontrer la réalité de toutes les racines des équations transcendantes, d'où dépendent les coefficients du temps sous les *sinus* et *cosinus*, suivant lesquels les séries sont ordonnées; ce qu'on pourrait d'ailleurs conclure de l'état d'équilibre stable dont les corps vibrants sont écartés (1).

---

(1) Dans les problèmes qui concernent la distribution de la chaleur dans les corps solides, cette même méthode sert à la fois à déterminer les coefficients des séries, et à prouver que les coefficients du temps dans les exponentielles suivant lesquelles elles sont ordonnées, sont des quantités réelles et négatives; ce qui est nécessaire à la solution complète de chaque question, et à la connaissance des lois de variation des températures dans les corps primitivement échauffés d'une manière quelconque.

J'ai déja eu l'occasion de remarquer que les règles fournies par l'algèbre pour s'assurer qu'une équation n'a pas de racines imaginaires, ne s'appliquent pas généralement aux équations transcendantes, et j'ai cité un exemple d'un cas où elles sont en défaut (Journal de l'École polytechnique, 19e cahier, page 382). Ces règles supposent qu'en différentiant un nombre de fois suffisant, l'équation que l'on considère, on parvient enfin à une autre équation dont on sait que toutes les racines sont réelles. Elles conviendront, par conséquent, à une équation comme celle-ci :

$$1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{(1.2.3.4)^2} - \text{etc.} = 0,$$

que l'on rencontre dans plusieurs questions de physique; car en la diffé-

J'ai eu soin, autant qu'il m'a été possible, de comparer à l'expérience les résultats relatifs à la mesure des sons et à la position des lignes *nodales*, auxquels j'ai été conduit par mon analyse, et qui n'étaient pas encore connus. J'ai employé, à cet effet, des expériences de MM. Savart et Cagniard-Latour, qu'ils ont bien voulu me communiquer. On a déja vu, dans deux notes qui font partie du tome XXXVI des *Annales de physique et de chimie*, l'accord remarquable qui existe entre le calcul et l'expérience; on en verra encore d'autres exemples dans ce Mémoire : cette concordance sur les points les plus décisifs, fournira une confirmation importante de la théorie, et en même temps une preuve nouvelle de l'habileté des observateurs et de l'exactitude de leurs observations.

§ I.

Expression des forces résultantes de l'action moléculaires.

(1) Les molécules de tous les corps sont soumises à leur attraction mutuelle et à la répulsion due à la chaleur. Selon que la première de ces deux forces est plus grande ou moindre que la seconde, il en résulte entre deux molécules une force attrac-

---

rentiant indéfiniment, on parviendra à un résultat qui différera aussi peu qu'on voudra d'une équation du premier degré. Mais ces mêmes règles ne prouveraient absolument rien relativement aux équations $\sin. x = 0$, $\cos. x = 0$, et à toutes celles qui se présentent dans le problème de la distribution de la chaleur dans une sphère, soit que la température primitive ait été la même à égale distance du centre, soit qu'elle ait varié d'une manière quelconque avec les directions des rayons.

tive ou répulsive; mais dans les deux cas, cette résultante est une fonction de la distance d'une molécule à l'autre dont la loi nous est inconnue : on sait seulement que cette fonction décroît d'une manière très-rapide, et devient insensible dès que la distance a acquis une grandeur sensible. Toutefois nous supposerons que le rayon d'activité des molécules est très-grand par rapport aux intervalles qui les séparent, et nous admettrons, en outre, que le décroissement rapide de cette action n'a lieu que quand la distance est devenue la somme d'un très-grand nombre de ces intervalles. On verra bientôt les motifs de ces deux hypothèses; pour les bien faire comprendre par un exemple, prenons la fonction :

$$a\,b^{-\left(\frac{r}{n\alpha}\right)^m},$$

dans laquelle r exprime la distance variable, a est une constante quelconque, b une autre constante qui surpasse l'unité, m un très-grand exposant positif, α l'intervalle compris entre deux molécules consécutives, et n un très-grand nombre entier, tel cependant que $n\alpha$ soit une ligne d'une grandeur imperceptible. Cette fonction sera à peu près constante tant que la distance r ne sera pas un multiple très-considérable de α; mais dès que r le sera devenu, et qu'on aura $r > n\alpha$, cette fonction décroîtra très-rapidement, et sera bientôt tout-à-fait insensible. C'est par une fonction de cette espèce que nous supposerons la loi de l'action moléculaire exprimée; et sans en déterminer autrement la nature, nous la représenterons généralement par fr entre deux molécules dont la distance est r.

S'il s'agissait d'un corps formé de fibres juxtaposées, la

fonction fr pourrait varier indépendamment de la distance r entre des molécules appartenant à des fibres de nature différente. Le même cas aurait lieu dans les corps cristallisés, dont les molécules s'attirent différemment par leurs diverses faces; ce qu'on peut conclure, par exemple, de ce qu'ils ne sont pas également compressibles en tous sens. Il faudrait alors supposer que fr dépendît des angles qui déterminent la direction de r; mais, pour ne pas trop compliquer le calcul, nous exclurons ce cas particulier, et nous regarderons fr comme une fonction de r seulement. Nous exclurons aussi le cas où les intervalles compris entre les molécules ne seraient pas les mêmes dans tous les sens, autour d'un même point. Ainsi, M étant un des points du corps, si l'on mène par ce point une ligne d'une très-petite longueur, mais cependant très-grande par rapport aux intervalles moléculaires, nous supposerons qu'elle comprenne le même nombre de molécules, quelle que soit sa direction. Il sera possible, néanmoins, que ces intervalles varient irrégulièrement dans l'étendue de la sphère d'activité des molécules; mais l'hypothèse d'après laquelle son rayon est très-grand eu égard à chacun de ces intervalles, fera disparaître l'influence de cette irrégularité sur la grandeur de la force qui sollicite le point M suivant chaque direction, pourvu que, dans le calcul de cette force, on prenne pour la distance mutuelle de deux molécules consécutives, la moyenne de tous les intervalles moléculaires dans la sphère d'activité de M. C'est ce que nous ferons effectivement, et nous désignerons par α cette distance moyenne.

Observons enfin que si ce corps est hétérogène, ou s'il n'a pas partout la même température, la forme de la fonction

fr et la distance α pourront varier avec la position du point M dans son intérieur; mais cette variation ne devenant sensible qu'à des distances sensibles, on en pourra faire abstraction dans le calcul des forces qui agissent sur chaque point M du corps.

Cela posé, nous allons considérer un corps de forme et de matière quelconques, dont les points sont soumis à leur action mutuelle, telle qu'on vient de la définir. Nous supposerons que d'autres forces données changent sa forme, et produisent de très-petits écartements ou rapprochements entre ses molécules; il s'agira de déterminer en grandeur et en direction, dans ce nouvel état, l'action exercée par une partie du corps en chaque point de la surface qui la termine.

(2) Désignons par $x, y, z,$ les trois coordonnées rectangulaires du point quelconque M de ce corps dans son état primitif; soient ensuite $x+u, y+v, z+w,$ ce qu'elles deviennent après le changement de forme produit par les forces données; et considérons $u, v, w,$ comme des fonctions de $x, y, z,$ qui conviennent à tous les points du corps. Soient $x+x', y+y', z+z'$, les coordonnées primitives, et $x+x'+u', y+y'+v', z+z'+w'$, les coordonnées subséquentes d'un autre point M$'$, compris dans la sphère d'activité de M. Les variables x', y', z', étant alors très-petites, nous ne conserverons que leurs premières puissances dans les développements de u', v', w', et nous aurons simplement :

$$u' = u + x'\frac{du}{dx} + y'\frac{du}{dy} + z'\frac{du}{dz},$$
$$v' = v + x'\frac{dv}{dx} + y'\frac{dv}{dy} + z'\frac{dv}{dz},$$
$$w' = w + x'\frac{dw}{dx} + y'\frac{dw}{dy} + z'\frac{dw}{dz}.$$

Par le point M, menons trois nouveaux axes rectangulaires. Soient x_1, y_1, z_1, les coordonnées primitives du point M′ par rapport à ces axes. Nous aurons

$$
\begin{aligned}
x' &= a x_1 + b y_1 + c z_1, \\
y' &= a' x_1 + b' y_1 + c' z_1, \\
z' &= a'' x_1 + b'' y_1 + c'' z_1;
\end{aligned}
$$

les neuf coefficients a, b, etc, étant les cosinus des angles que font les axes des x_1, y_1, z_1, avec ceux des x, y, z, lesquels cosinus ont entre eux des relations connues.

Considérons un troisième point M_1, situé sur l'axe des z_1 positives, à une très-petite distance de M que nous représenterons par ζ_1. Les formules précédentes conviendront à ce point M_1 en y faisant $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $z_1 = \zeta_1$. D'après cela, si nous posons, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
& a x_1 + b y_1 + c(z_1 - \zeta_1) = \varphi, \\
& a' x_1 + b' y_1 + c'(z_1 - \zeta_1) = \psi, \\
& a'' x_1 + b'' y_1 + c''(z_1 - \zeta_1) = \theta, \\
& \varphi \frac{du}{dx} + \psi \frac{du}{dy} + \theta \frac{du}{dz} = \varphi', \\
& \varphi \frac{dv}{dx} + \psi \frac{dv}{dy} + \theta \frac{dv}{dz} = \psi', \\
& \varphi \frac{dw}{dx} + \psi \frac{dw}{dy} + \theta \frac{dw}{dz} = \theta',
\end{aligned}
$$

et que nous représentions par r la distance primitive du point M_1 au point M′, et par r' leur distance après le changement de forme du corps, nous aurons

$$
\begin{aligned}
r^2 &= \varphi^2 + \psi^2 + \theta^2, \\
r'^2 &= (\varphi + \varphi')^2 + (\psi + \psi')^2 + (\theta + \theta')^2;
\end{aligned}
$$

formules qui se réduiront à

$$r^2 = x_1^2 + y_1^2 + (z_1 - \zeta_1)^2,$$
$$r'^2 = r^2 + 2\varphi\varphi' + 2\psi\psi' + 2\theta\theta' + \varphi'^2 + \psi'^2 + \theta'^2,$$

en ayant égard aux équations connues qui ont lieu entre les neuf cosinus a, b, etc.

L'action primitive de M' sur M_1 sera fr; elle deviendra fr' dans le second état du corps : nous la regarderons comme attractive ou comme répulsive selon qu'elle sera positive ou négative; et cela étant, les composantes parallèles aux axes des x, y, z, et tendantes à augmenter les coordonnées du point M_1, seront

$$\frac{\varphi + \varphi'}{r'} fr', \quad \frac{\psi + \psi'}{r'} fr', \quad \frac{\theta + \theta'}{r'} fr'.$$

En prenant la somme de chacune de ces quantités, étendue à tous les points M' qui répondent à des valeurs positives ou négatives de x_1 et y_1, et seulement à des valeurs négatives de z_1, on aura les composantes suivant les mêmes axes de l'action exercée sur le point M_1 par la partie du corps qui était primitivement terminée par le plan des x_1, y_1. Cela fait, prenons de nouveau la somme de chaque résultat, étendue à tous les points M_1 qui répondent à des valeurs positives de ζ_1; puis multiplions ces nouvelles sommes par le nombre de molécules contenues dans une surface ω assez petite pour que leurs valeurs ne changent pas sensiblement dans toute son étendue; ces produits exprimeront les composantes de l'action totale de cette même partie du corps, relative à la portion ω de sa surface dont le point M fait partie. La moyenne des intervalles moléculaires ayant été

représentée par α, si les dimensions de cette petite surface ω sont supposées très-grandes eu égard à ces intervalles, on pourra prendre $\frac{\omega}{\alpha^2}$ pour le nombre de molécules comprises dans ω; les composantes qui s'y rapportent, respectivement parallèles aux axes des x, y, z, seront alors ωP, ωQ, ωR, en posant

$$P = \Sigma \frac{\varphi + \varphi'}{\alpha^2 r'} fr', \quad Q = \Sigma \frac{\psi + \psi'}{\alpha^2 r'} fr', \quad R = \Sigma \frac{\theta + \theta'}{\alpha^2 r'} fr',$$

et supposant que les sommes Σ sont relatives aux quatre variables x_1, y_1, z_1, ζ_1, et s'étendent à tous les points M' et M_1 compris dans la sphère d'activité du point M.

Ces quantités P, Q, R, sont, après le changement de forme, les composantes de l'action d'une partie du corps sur l'autre, rapportée à l'unité de surface, et relative au point M de leur surface de séparation. Leur résultante est la pression qui aurait lieu sur une surface prise pour unité, si dans tous ses points l'action du corps était la même qu'au point M. Mais cette force n'est pas, comme dans les fluides, normale à la surface pressée; et pour un même point M, elle varie en direction et en grandeur avec la direction de cette surface. En ne considérant que son intensité, elle est équivalente à un poids d'un grandeur déterminée, par lequel on pourrait la représenter. Il s'agit actuellement d'obtenir les valeurs des sommes Σ qui expriment ses trois composantes, ou de les réduire autant qu'il sera possible.

(3) Nous prouverons d'abord que les doubles sommes relatives aux variables z_1 et ζ_1, peuvent se réduire à des sommes relatives à une seule variable.

En effet, d'après les valeurs de φ, ψ, θ, et celles de φ', ψ', θ',

qui en dérivent, les quantités soumises à ces sommations sont des fonctions de $\zeta_{,} - z_{,}$; on aura donc à considérer des sommes doubles de la forme :

$$\Sigma\Sigma F(\zeta_{,} - z_{,}).$$

La distance comprise entre deux molécules consécutives étant α, on devra donner successivement à $\zeta_{,}$ les valeurs $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha$, etc., et à $z_{,}$ les valeurs $0, -\alpha, -2\alpha, -3\alpha$, etc. De cette manière, nous aurons

$$\begin{aligned}\Sigma\Sigma F(\zeta_{,} - z_{,}) = F\alpha &+ F2\alpha + F3\alpha + F4\alpha + \text{etc.}\\ &+ F2\alpha + F3\alpha + F4\alpha + \text{etc.}\\ &+ F3\alpha + F4\alpha + \text{etc.}\\ &+ F4\alpha + \text{etc.}\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

De plus, à cause que la fonction F est insensible dès que la variable a acquis une grandeur sensible, on pourra, sans aucune erreur, étendre toutes ces séries jusqu'à l'infini ; et alors on aura

$$\Sigma\Sigma F(\zeta_{,} - z_{,}) = F\alpha + 2F2\alpha + 3F3\alpha + 4F4\alpha + \text{etc.},$$

ou, ce qui est la même chose,

$$\Sigma\Sigma F(\zeta_{,} - z_{,}) = \Sigma \frac{\zeta}{\alpha} F\zeta;$$

cette dernière somme s'étendant depuis $\zeta = \alpha$ jusqu'à $\zeta = \infty$.

Au moyen de cette réduction, si nous faisons $\zeta_{,} - z_{,} = \zeta$, les valeurs précédentes de P, Q, R, deviendront

$$P = \Sigma \frac{(\varphi + \varphi')\zeta}{\alpha^3 r'} fr', \; Q = \Sigma \frac{(\psi + \psi')\zeta}{\alpha^3 r'} fr', \; R = \Sigma \frac{(\theta + \theta')\zeta}{\alpha^3 r'} fr'.$$

(4) Puisque dans le changement de forme du corps, les écartements ou les rapprochements de ses molécules sont supposés très-peu considérables, il faut que les différences $u'-u$, $v'-v$, $w'-w$, soient de très-petites parties des variables x', y', z', et, par conséquent, que les différences partielles $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, etc., soient de très-petites fractions. Si donc on développe r' suivant les puissances et les produits de $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$, etc., on aura une série très-convergente; mais pour que les expressions de P, Q, R, ne soient pas trop compliquées, nous nous arrêterons aux premières puissances, et nous négligerons en conséquence les termes de seconde dimension et au-delà par rapport à φ', ψ', θ'. Nous aurons donc simplement

$$r' = r + \frac{1}{r}(\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta'),$$

et, au même degré d'approximation,

$$\frac{1}{r'}fr' = \frac{1}{r}fr + (\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr},$$

ce qui changera les dernières expressions de P, Q, R, en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}
P &= \Sigma\frac{(\varphi+\varphi')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \Sigma(\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\varphi\zeta}{\alpha^3 r}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr},\\
Q &= \Sigma\frac{(\psi+\psi')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \Sigma(\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\psi\zeta}{\alpha^3 r}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr},\\
R &= \Sigma\frac{(\theta+\theta')\zeta}{\alpha^3 r}fr + \Sigma(\varphi\varphi' + \psi\psi' + \theta\theta')\frac{\theta\zeta}{\alpha^3 r}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr},
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Les sommes Σ qui y sont indiquées sont des sommes triples qui répondent, d'après ce qui précède, aux molécules voisines du point M, et situées d'un même côté du plan des x_1, y_1, mené par ce point, leurs positions étant déterminées par les coordonnées x_1, y_1 et ζ, dont l'origine est en ce même point. Si nous désignons par θ l'angle compris entre le rayon vecteur r de l'une de ces molécules et l'axe des ζ, et par γ l'angle que fait la projection de ce rayon sur le plan de x_1, y_1, avec l'axe des x_1, nous aurons :

$$\zeta = r\cos.\theta,\ y_1 = r\sin.\theta\sin.\gamma,\ x_1 = r\cos.\theta\cos.\gamma.$$

Les quantités comprises sous les signes Σ prendront la forme $p\,\mathrm{F}\,r$, en représentant par p une fonction entière de sinus et cosinus de θ et γ, et par $\mathrm{F}\,r$ une fonction de la même espèce que fr, dont les valeurs sont insensibles pour toute valeur sensible de la variable, et qui, en outre, est égale à zéro pour la valeur particulière zéro de r. Cela étant, les sommes dont il est question se composeront de parties de la forme :

$$\Sigma[(\Sigma\Sigma p)\,\mathrm{F}\,r],$$

le Σ extérieur répondant à la variable r, et pouvant s'étendre, d'après la nature de $\mathrm{F}r$, jusqu'à $r=\infty$, et les deux autres Σ se rapportant aux variables θ et γ.

(5) La double somme que ceux-ci indiquent se change en une intégrale double dont la valeur s'obtiendra ensuite aisément. Pour effectuer cette transformation, décrivons du point M comme centre et d'un rayon quelconque r, une surface sphérique; partageons cette surface en un très-grand nombre de parties assez petites pour qu'on puisse regarder dans chacune d'elles, la quantité p comme sensiblement constante; et dé-

signons par sr^2 l'une de ces parties, de sorte que s soit un coefficient indépendant de r et une très-petite partie de la surface sphérique qui répond à $r=1$. La valeur de $\Sigma\Sigma p$ relative à sr^2 sera le produit de p et du nombre de molécules qui appartiennent à cette portion de surface sr^2, pour lequel nombre, on pourra prendre $\frac{sr^2}{\alpha^2}$, si, comme nous le supposerons d'abord, r est très-grand par rapport à α. De cette manière, la double somme $\Sigma\Sigma p$ relative à toute la demi-surface située d'un côté du plan des x_1, y_1, aura pour valeur :

$$\frac{r^2}{\alpha^2}\Sigma\Sigma ps;$$

cette nouvelle somme s'étendant à toutes les parties s de la demi-surface qui a l'unité pour rayon. Or, vu la petitesse de ces parties, et parce que p n'est pas une fonction du genre de celles qui décroissent très-rapidement, on pourra changer s en l'élément différentiel de cette dernière surface, et les signes Σ en des signes d'intégration, c'est-à-dire, qu'on pourra prendre :

$$s=\sin.6\,d6\,d\gamma,\quad \Sigma\Sigma ps=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}p\sin.6\,d6\,d\gamma,$$

π désignant à l'ordinaire le rapport de la circonférence au diamètre. On aura, par conséquent, pour la double somme demandée :

$$\Sigma\Sigma p=\frac{r^2}{\alpha^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}p\sin.6\,d6\,d\gamma.$$

Ce résultat exige, à la vérité, que r soit un multiple très-considérable de α; mais d'après la supposition que nous avons

faite sur le mode de décroissement de l'action moléculaire (n° 1), on peut, sans erreur sensible, négliger dans la somme Σ relative à r, la partie où cette condition n'est pas remplie par rapport à l'autre partie. Ainsi, nous aurons

$$\Sigma[(\Sigma\Sigma p)\mathrm{F}r]=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi} p\sin.\beta\, d\beta\, d\gamma.\ \Sigma\frac{r^2}{\alpha^2}\mathrm{F}r;$$

et il sera permis de comprendre dans la somme Σ, ou de négliger à volonté les plus petites valeurs de r, puisque la partie de cette somme qui s'y rapporte n'altère pas sensiblement la somme entière : nous supposerons, pour fixer les idées, qu'elle s'étend depuis $r=0$ jusqu'à $r=\infty$.

(6) Je substitue actuellement dans $\varphi, \psi, \theta, \varphi', \psi', \theta'$, les valeurs de x_1, y_1 et ζ, en fonctions de r, β, γ; je fais ensuite

$$\varphi=gr,\quad \psi=hr,\quad \theta=lr,$$
$$\varphi'=g'r,\quad \psi'=h'r,\quad \theta'=l'r;$$

de sorte que g, h, etc., soient des coefficients indépendants de r, qui représentent les valeurs de φ, ψ, etc., relatives à $r=1$, savoir :

$$g=a\sin.\beta\cos.\gamma+b\sin.\beta\sin.\gamma-c\cos.\beta,$$
$$h=a'\sin.\beta\cos.\gamma+b'\sin.\beta\sin.\gamma-c'\cos.\beta,$$
$$l=a''\sin.\beta\cos.\gamma+b''\sin.\beta\sin.\gamma-c''\cos.\beta,$$
$$g'=g\frac{du}{dx}+h\frac{du}{dy}+l\frac{du}{dz},$$
$$h'=g\frac{dv}{dx}+h\frac{dv}{dy}+l\frac{dv}{dz},$$
$$l'=g\frac{dw}{dx}+h\frac{dw}{dy}+l\frac{dw}{dz}.$$

Au moyen de la transformation que nous venons d'effectuer,

les équations (1) deviendront :

$$P=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\left[(g+g')\Sigma\frac{r^3}{\alpha^5}fr+(gg'+hh'+ll')g\Sigma\frac{r^5}{\alpha^5}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}\right]\Delta,$$

$$Q=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\left[(h+h')\Sigma\frac{r^3}{\alpha^5}fr+(gg'+hh'+ll')h\Sigma\frac{r^5}{\alpha^5}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}\right]\Delta,$$

$$R=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}\left[(l+l')\Sigma\frac{r^3}{\alpha^5}fr+(gg'+hh'+ll')l\Sigma\frac{r^5}{\alpha^5}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}\right]\Delta,$$

où l'on a mis, pour abréger, Δ à la place de cos. β sin. $\beta\, d\beta\, d\gamma$.

On aura immédiatement

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}(g+g')\Delta=-\frac{2\pi}{3}\left(c+c\frac{du}{dx}+c'\frac{du}{dy}+c''\frac{du}{dz}\right),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}(h+h')\Delta=-\frac{2\pi}{3}\left(c'+c\frac{dv}{dx}+c'\frac{dv}{dy}+c''\frac{dv}{dz}\right),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}(l+l')\Delta=-\frac{2\pi}{3}\left(c''+c\frac{dw}{dx}+c'\frac{dw}{dy}+c''\frac{dw}{dz}\right).$$

On aura aussi, sans difficulté,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}g^3\Delta=-\frac{2\pi c}{5}(a^2+b^2+c^2),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}g^2h\Delta=-\frac{2\pi}{15}(3c^2c'+2aa'c+2bb'c+a^2c'+b^2c'),$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{2\pi}ghl\Delta=-\frac{2\pi}{15}\Big(3cc'c''+aa'c''+aa''c'+a'a''c$$
$$+bb'c''+bb''c'+b'b''c\Big);$$

et comme on a

$$a^2+b^2+c^2=1,\ aa'+bb'+cc'=0, \text{ etc.},$$

ces valeurs se réduiront à

$$\iint g^3\Delta=-\frac{2\pi c}{5},\ \iint g^2h\Delta=-\frac{2\pi c'}{15},\ \iint ghl\Delta=0.$$

On trouve au de même

$$\iint h^3\Delta=-\frac{2\pi c'}{5},\ \iint l^3\Delta=-\frac{2\pi c''}{5},$$

$$\iint gh^2\Delta=-\frac{2\pi c}{15},\ \iint gl^2\Delta=-\frac{2\pi c}{15},\ \iint g^2l\Delta=-\frac{2\pi c''}{15},$$

$$\iint h^2l\Delta=-\frac{2\pi c''}{15},\ \iint hl^2\Delta=-\frac{2\pi c'}{15}.$$

Au moyen de ces différents résultats, et en faisant, pour abréger,

$$\frac{2\pi}{3}\Sigma\frac{r^3}{\alpha^3}fr=\mathrm{K},\quad \frac{2\pi}{15}\Sigma\frac{r^5}{\alpha^5}\frac{d.\frac{1}{r}fr}{dr}=k,$$

nous aurons définitivement

$$\mathrm{P}=-\mathrm{K}\left(c+\frac{du}{dx}c+\frac{du}{dy}c'+\frac{du}{dz}c''\right)$$
$$-k\left(3\frac{du}{dx}c+\frac{du}{dy}c'+\frac{du}{dz}c''+\frac{dv}{dx}c'+\frac{dv}{dy}c+\frac{dw}{dx}c''+\frac{dw}{dz}c\right),$$

$$\mathrm{Q}=-\mathrm{K}\left(c'+\frac{dv}{dx}c+\frac{dv}{dy}c'+\frac{dv}{dz}c''\right)$$
$$-k\left(3\frac{dv}{dy}c'+\frac{dv}{dx}c+\frac{dv}{dz}c''+\frac{du}{dx}c'+\frac{du}{dy}c+\frac{dw}{dy}c''+\frac{dw}{dz}c'\right),$$

$$\mathrm{R}=-\mathrm{K}\left(c''+\frac{dw}{dx}c+\frac{dw}{dy}c'+\frac{dw}{dz}c''\right)$$
$$-k\left(3\frac{dw}{dz}c''+\frac{dw}{dx}c+\frac{dw}{dy}c'+\frac{du}{dx}c''+\frac{du}{dz}c+\frac{dv}{dy}c''+\frac{dv}{dz}c'\right).$$

On devra se rappeler que c, c', c'', sont les cosinus des angles que la normale à la surface de séparation des deux parties du corps dont l'une agit sur l'autre, faisait primitivement avec les axes des x, y, z; que cette normale est menée par le point de cette surface auquel répondent les composantes P, Q, R, de cette action; et enfin qu'elle est située en dehors de la partie du corps que l'on considère comme agissante.

(7) Si l'on fait coïncider cette droite avec une parallèle à l'axe des z, en sorte que la surface de séparation des deux parties du corps avant son changement de forme, soit un plan parallèle à celui des x, y, on aura $c=0$, $c'=0$, $c''=1$; et si l'on désigne, dans ce cas, pour P_1, Q_1, R_1, les valeurs de P, Q, R, elles seront :

$$P_1 = -K\frac{du}{dz} - k\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),$$
$$Q_1 = -K\frac{dv}{dz} - k\left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right),$$
$$R_1 = -K\left(1 + \frac{dw}{dz}\right) - k\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + 3\frac{dw}{dz}\right).$$

Dans le cas où la normale à la surface primitive de séparation sera parallèle à l'axe des y, on aura $c=0$, $c'=1$, $c=0$; et en désignant par P_2, Q_2 R_2, les valeurs de P, Q, R, il en résultera

$$P_2 = -K\frac{du}{dy} - k\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),$$
$$Q_2 = -K\left(1 + \frac{dv}{dy}\right) - k\left(\frac{du}{dx} + 3\frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right),$$
$$R_2 = -K\frac{dw}{dy} - k\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right);$$

enfin si cette normale est parallèle à l'axe des x, et qu'on

désigne alors par P_3, Q_3, R_3, les valeurs de P, Q, R, nous aurons $c=1$, $c'=0$, $c''=0$, et par suite

$$P_3=-K\left(1+\frac{du}{dx}\right)-k\left(3\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$
$$Q_3=-K\frac{dv}{dx}-k\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right),$$
$$R_3=-K\frac{dw}{dx}-k\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right).$$

En comparant ces valeurs particulières aux expressions générales de P, Q, R, on en conclura

$$\left.\begin{aligned} P&=P_1c''+P_2c'+P_3c,\\ Q&=Q_1c''+Q_2c'+Q_3c,\\ R&=R_1c''+R_2c'+R_3c;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

résultats que nous pouvons vérifier de la manière suivante.

Concevons, dans l'intérieur du corps avant son changement de forme, un tétraèdre dont le point M soit un sommet, et dont les trois faces adjacentes soient parallèles aux plans des coordonnées x, y, z. Désignons l'aire de cette quatrième face par ω, et supposons-la, comme plus haut, assez petite pour que l'action du corps, après le changement de forme, ne varie pas sensiblement dans toute son étendue. Soit alors $\omega P'$, $\omega Q'$, $\omega R'$, les composantes de l'action exercée sur le tétraèdre par la partie du corps contiguë à cette quatrième face, lesquelles forces seront respectivement parallèles aux axes des x, y, z, et dirigées dans le sens des coordonnées positives; élevons, de dedans en dehors, sur cette quatrième face du tétraèdre, une normale qui fera avec les axes des x, y, z, des angles dont les cosinus seront respectivement c, c', c''.

Les trois autres faces étant les projections de celle-ci, leurs aires seront $\omega c, \omega c', \omega c''$, et les composantes de l'action du corps qui s'y rapportent auront pour valeurs les produits de ces aires et des quantités précédentes P_1, P_2, etc. Or, toutes les forces qui agissent sur le tétraèdre devant se faire équilibre, on aura

$$P' + P_1 c'' + P_2 c' + P_3 c = 0,$$
$$Q' + Q_1 c'' + Q_2 c' + Q_3 c = 0,$$
$$R' + R_1 c'' + R_2 c' + R_3 c = 0,$$

en supprimant le facteur ω commun à tous les termes de chaque équation.

Nous négligeons dans ces équations les quantités du troisième ordre par rapport aux dimensions du tétraèdre. C'est pour cela que nous ne tenons pas compte des forces données, comme le poids ou autres, qui proviennent de tous ses points et sont proportionnelles à son volume, et que nous avons seulement égard aux actions des parties extérieures du corps qui ne dépendent que de la surface du tétraèdre. Par la même raison, quoique sa quatrième face ne passe pas par le point M, nous pourrons considérer P', Q', R', comme se rapportant à un plan parallèle à cette face et passant par le point M; ce qui n'altère ces forces que d'une quantité du premier ordre, qui, multipliée par ω, donnera une quantité du troisième, ou de l'ordre que nous avons négligé. Il résulte de là qu'en ayant d'ailleurs égard au sens dans lequel les forces P', Q', R', sont dirigées, elles seront égales et contraires aux composantes P, Q, R; ainsi l'on aura

$$P' + P = 0, \quad Q' + Q = 0, \quad R' + R = 0;$$

et les équations précédentes coïncideront avec les équations (2) qu'il s'agissait de vérifier.

On verra dans le nº 14 que la quantité K est nulle; d'où il résulte

$$R_3 = P_1, \quad R_2 = Q_1, \quad Q_3 = P_2;$$

ce qui réduit les neuf forces P_1, P_1, etc., à six quantités distinctes.

(8) Les composantes de l'action moléculaire étant exprimées par les formules précédentes, on formera, par les règles ordinaires de la statique, les équations d'équilibre du corps après son changement de forme produit par des forces données. On y parviendrait en conservant, dans le cas du tétraèdre que nous venons de considérer, les termes du troisième ordre par rapport à ses dimensions; mais il sera plus simple d'employer pour cet objet un parallélépipède.

Concevons donc, avant le changement de forme du corps, un parallélépipède rectangle dont le point M soit un sommet, et soient l, l', l'', ses trois arêtes adjacentes, respectivement parallèles aux axes de x, y, z. Supposons, comme précédemment, chacune de ces dimensions extrêmement petite, de sorte que l'action du corps qui répond, par exemple, à la face parallèle au plan des x, y, et adjacente au point M, ait pour composantes $P_1 ll'$, $Q_1 ll'$, $R_1 ll'$, après le changement de forme. Transportées à la face opposée, ces composantes deviendront respectivement

$$P_1 ll' + \frac{dP_1}{dz} ll'l'', \quad Q_1 ll' + \frac{dQ_1}{dz} ll'l'', \quad R_1 ll' + \frac{dR_1}{dz} ll'l'',$$

en négligeant les termes d'un ordre supérieur au troisième par rapport à l, l', l''; et celles-ci, prises en sens contraire

de leurs directions, agiront sur le parallélépipède. En considérant ainsi deux à deux ses six faces, on obtiendra toutes les forces qui proviennent de l'action du reste du corps sur cette petite partie; si l'on désigne par λ son volume, et que l'on supprime les parties de ces forces qui se détruisent, celles qui subsistent seront :

$$-\frac{dP_1}{dz}\lambda, \quad -\frac{dQ_1}{dz}\lambda, \quad -\frac{dR_1}{dz}\lambda,$$
$$-\frac{dP_2}{dy}\lambda, \quad -\frac{dQ_2}{dy}\lambda, \quad -\frac{dR_2}{dy}\lambda,$$
$$-\frac{dP_3}{dx}\lambda, \quad -\frac{dQ_3}{dx}\lambda, \quad -\frac{dR_3}{dx}\lambda.$$

Celles de la première ligne verticale agiront parallèlement à l'axe de x, celles de la seconde parallèlement à l'axe des y, et celles de la troisième parallèlement à l'axe des z; et toutes seront dirigées dans le sens des coordonnées positives.

Comme ces forces sont proportionnelles au volume λ, il faudra tenir compte des forces données qui agissent sur tous les points du parallélépipède et leur sont comparables. Nous désignerons donc par X, Y, Z, les composantes de celles-ci, relatives au point M, respectivement parallèles aux axes des x, y, z, tendantes à augmenter ses coordonnées, et rapportées aux unités de masse et de volume. Nous appellerons ρ la densité du corps au même point M; les forces données qui agissent sur la masse du parallélépipède seront

$$X\rho\lambda, \quad Y\rho\lambda, \quad Z\rho\lambda,$$

en négligeant toujours les quantités d'un ordre supérieur à λ, ce qui permet de considérer ρ, X, Y, Z, comme constantes dans toute l'étendue du petit volume. D'après cela, pour l'équilibre de ce parallélépipède, il faudra qu'on ait ces trois

équations :

$$\left.\begin{aligned} X\rho &= \frac{dP_1}{dz} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx}, \\ Y\rho &= \frac{dQ_1}{dz} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dQ_3}{dx}, \\ Z\rho &= \frac{dR_1}{dz} + \frac{dR_2}{dy} + \frac{dR_3}{dx}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

en supprimant le facteur λ commun à tous leurs termes.

Elles sont, comme on voit, les mêmes que si l'on eût supposé les dimensions du parallélépipède infiniment petites; hypothèse qui n'aurait pu convenir à un corps formé de molécules qui ne sont pas contiguës. Il est même nécessaire que ces dimensions soient de très-grands multiples du rayon d'activité des molécules, afin que l'on puisse négliger, par rapport à l'action entière du corps sur chaque face, la partie qui répond aux points dont les distances aux arêtes sont moindres que ce rayon : sans cela, cette partie influerait sur les composantes relatives à deux faces adjacentes, et l'on ne pourrait plus employer dans les équations (3), les valeurs de P_1, Q_1, etc., précédemment calculées.

(9) L'équilibre du parallélépipède exige encore que l'on ait égard aux moments des forces qui le sollicitent; et les sommes de leurs composantes étant déja nulles suivant trois axes rectangulaires, on pourra rapporter leurs moments à tels axes que l'on voudra : nous prendrons pour ces axes, trois droites menées par le point M, parallèlement aux axes des x, y, z. Il est évident qu'alors les moments des forces données qui agissent sur tous les points du parallélépipède seront des quantités du quatrième ordre par rapport à ses dimensions, et devront, par conséquent, être négligés. Il n'en sera

pas même à l'égard des forces dues à l'action moléculaire, qui sont appliquées à ses différentes faces : leurs moments renfermeront des termes du troisième ordre; mais nous allons prouver que les équations qui en résulteront, seront identiques d'après les valeurs précédentes de ces forces.

Leurs composantes qui agissent sur toute l'étendue de la face parallèle au plan des x, y, et passant par le point M, étant $P_1 ll'$, $Q_1 ll'$, $R_1 ll'$, on peut supposer que les forces appliquées à chacune des molécules qu'elle comprend sont égales à ces forces totales, divisées par le nombre $\frac{ll'}{\alpha^2}$ des molécules, c'est-à-dire, à $\alpha^2 P_1$, $\alpha^2 Q_1$, $\alpha^2 R_1$. Désignons par x', y', z', les coordonnées d'un point M' de cette face avant le changement de forme du corps, et par $x'+u'$, $y'+v'$, $z'+w'$, ses coordonnées après ce changement; les unes et les autres ayant pour origine le point M, et les mêmes directions que x, y, z, de sorte que les axes des coordonnées de M' soient ceux des moments qu'il s'agit de considérer. Le moment de la force appliquée à ce point M', par rapport à l'axe des x', aura pour valeur :

$$(z'+w')\alpha^2 Q_1 - (y'+v')\alpha^2 R_1.$$

Relativement à un point M_1 de la face opposée, dont les coordonnées primitives étaient $x', y', z'+l''$, le moment analogue se déduira de celui-là, en y mettant $z'+l''$ à la place de z', et changeant les signes de Q_1 et R_1; il sera donc

$$-\left(z'+l''+w'+\frac{dw'}{dz'}l''\right)\left(Q_1+\frac{dQ_1}{dz'}l''\right)\alpha^2$$
$$+\left(y'+v'+\frac{dv'}{dz'}l''\right)\left(R_1+\frac{dR_1}{dz'}l''\right)\alpha^2,$$

en négligeant les puissances de l'' supérieures à la première.

Si l'on néglige, en outre, les produits de l'' et des coordonnées de M' ou M_1, la somme des moments rapportés à l'axe des x', des forces appliquées à ces deux points, sera simplement :

$$\frac{dv'}{dz'}R_1\alpha^2 l'' - \left(1 + \frac{dw'}{dz'}\right)Q_1\alpha^2 l''.$$

Il faudra prendre la somme des valeurs de cette quantité, relative à tous les couples de points M' et M_1 des deux faces parallèles au plan des x, y; dans cette sommation, on pourra considérer $\frac{dv'}{dz'}$ et $\frac{dw'}{dz'}$ comme constantes et égales à $\frac{dv}{dz}$ et $\frac{dw}{dz}$ qui répondent au point M; la quantité précédente sera aussi constante, et il suffira de la multiplier par le nombre $\frac{ll'}{\alpha^2}$ de molécules appartenant à chaque face; ce qui donnera

$$\left[\frac{dv}{dz}R_1 - \left(1 + \frac{dw}{dz}\right)Q_1\right]\lambda,$$

à cause de $ll'l'' = \lambda$.

L'axe des moments étant toujours celui des x', on trouvera de même

$$\left[\left(1 + \frac{dv}{dy}\right)R_2 - \frac{dw}{dy}Q_2\right]\lambda,$$

pour la somme des moments des forces appliquées aux deux faces parallèles au plan des x, z, et

$$\left[\frac{dv}{dx}R_3 - \frac{dw}{dx}Q_3\right]\lambda,$$

pour celle des moments des forces qui agissent sur les faces parallèles au plan des y, z.

Pour l'équilibre du parallélépipède, il faut que la somme des moments, par rapport à une même droite, de toutes les forces qui lui sont appliquées, soit égale à zéro; en supprimant le facteur λ, on aura donc

$$\frac{dv}{dz}R_1+\left(1+\frac{dv}{dy}\right)R_2+\frac{dv}{dx}R_3-\left(1+\frac{dw}{dz}\right)Q_1-\frac{dw}{dy}Q_2-\frac{dw}{dx}Q_3=0;$$

équation qui devient identique quand on y substitue les valeurs précédentes de R_1, R_2, etc., et qu'on néglige les carrés et les produits des différences partielles de u, v, w, comme dans le calcul qui a donné ces valeurs. On parviendra à la même conclusion, en considérant les moments rapportés aux axes des y' ou des z'.

Ainsi, les équations (3) suffisent pour assurer l'équilibre du parallélépipède que nous avons considéré dans l'intérieur du corps; mais indépendamment de ces trois équations, communes à tous ses points, il en existe d'autres qui n'ont lieu qu'à sa surface, et qu'on obtiendra sans difficulté.

(10) Pour cela, plaçons le point M à une distance insensible de la surface, qui soit néanmoins égale ou supérieure au rayon d'activité des molécules. Par ce point menons, avant le changement de forme, une normale à la surface et un plan perpendiculaire à cette droite; soit ω l'aire de la section faite dans le corps par ce plan : les dimensions de ω seront encore insensibles, mais très-grandes par rapport à son éloignement de la surface; on pourra conséquemment prendre ωP, ωQ, ωR, pour les composantes de l'action du corps après son changement de forme, sur la partie comprise entre sa surface et le plan mené par le point M; et dans les valeurs de P, Q, R, données par les équations (2), c, c', c'', seront les cosinus des

angles que la perpendiculaire à ce plan faisait primitivement avec les axes des x, y, z, laquelle perpendiculaire rencontrera la surface en un point que nous appellerons M_1. Supposons que d'autres forces données soient appliquées à la surface. Soient X_1, Y_1, Z_1, leurs composantes, relatives au point M_1, rapportées à l'unité de surface, comme les forces P, Q, R, et dirigées dans le même sens que celles-ci, c'est-à-dire, parallèles aux axes des x, y, z, et tendantes à augmenter les coordonnées de leur point d'application. Désignons par ω_1 la portion de surface qui termine la petite partie du corps que nous considérons, de sorte que les forces extérieures qui lui correspondent aient pour valeurs : $\omega_1 X_1$; $\omega_1 Y_1$, $\omega_1 Z_1$. On pourra négliger les autres forces données qui agissent sur tous les points de cette même partie, et qui seraient proportionnelles à son volume; on aura, en conséquence, pour l'équilibre de cette portion du corps :

$$\omega_1 X_1 + \omega P_1 = 0, \quad \omega_1 Y_1 + \omega Q = 0, \quad \omega_1 Z_1 + \omega R = 0;$$

équations qui deviennent

$$\left.\begin{aligned} X_1 + P_1 c'' + P_2 c' + P_3 c = 0, \\ Y_1 + Q_1 c'' + Q_2 c' + Q_3 c = 0, \\ Z_1 + R_1 c'' + R_2 c' + R_3 c = 0, \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

en y mettant pour P, Q, R, leurs valeurs, et observant que ω_1 ne diffère pas sensiblement de ω.

Il en est de même des coordonnées du point M à l'égard de celles de M_1; les cosinus c, c', c'' ne diffèrent pas non plus sensiblement de ceux des angles que fait la normale en M_1 à la surface même du corps; si donc on désigne par x_1, y_1, z_1, les trois coordonnées d'un point quelconque M_1 de la surface

primitive du corps, on pourra, dans les équations (4), considérer P_1, P_2, etc., aussi bien que les forces données X_1, Y_1, Z_1, comme des fonctions de x_1, y_1, z_1; et substituer pour c, c', c'', leurs valeurs en fonctions de ces variables, qui se déduiront de l'équation de la surface. Si le corps renferme dans son intérieur un ou plusieurs espaces vides, les équations (4) subsisteront pour les surfaces qui les terminent, comme pour la surface extérieure du corps. Jointes aux équations (5), elles exprimeront toutes les conditions nécessaires et suffisantes à son équilibre.

(11) Les équations (3) peuvent être remplacées par d'autres qui leur sont équivalentes, mais dont l'usage sera quelquefois plus commode. En effet, considérons une portion quelconque du corps; soit dm l'élément différentiel de la masse, en sorte qu'on ait $dm = \rho\, dx\, dy\, dz$, ρ étant toujours la densité; multiplions la première équation (3) par $dx\, dy\, dz$, puis intégrons ses deux membres, et étendons les intégrales à toute cette portion du corps; nous aurons

$$\int X\, dm = \iiint \left(\frac{dP_1}{dz} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx} \right) \rho\, dx\, dy\, dz.$$

Pour fixer les idées, supposons que le plan des x, y, soit horizontal, et l'axe des z vertical et dirigé de bas en haut. On aura

$$\iiint \frac{dP_1}{dz} \rho\, dx\, dy\, dz = \iint (P_1 \rho)\, dx\, dy - \iint [P_1 \rho]\, dx\, dy;$$

$(P_1 \rho)$ et $[P_1 \rho]$ étant les valeurs de $P_1 \rho$ relatives aux deux points de la surface qui ont la même projection horizontale, savoir : $(P_1 \rho)$ au point supérieur, et $[P_1 \rho]$ au point in-

férieur : la première intégrale devra s'étendre à tous les points supérieurs, et la seconde à tous les points inférieurs ; or, si nous désignons par γ l'angle que fait, en un point quelconque de la surface, la partie extérieure de la normale avec l'axe des z positives, et par ds l'élément différentiel de cette même surface, nous aurons

$$dx\,dy = \gamma\,ds, \quad \text{ou} \quad dx\,dy = -\gamma\,ds,$$

selon qu'il s'agira des premiers points pour lesquels γ sera positif, ou des seconds pour lesquels ce cosinus sera négatif; par conséquent la différence des deux intégrales doubles se réduira à une seule intégrale étendue à la surface entière, et l'on aura simplement

$$\iiint \frac{dP_1}{dz}\,dx\,dy\,dz = \int \gamma P_1\,ds.$$

On trouvera de même

$$\iiint \frac{dP_2}{dy}\,dx\,dy\,dz = \int \beta P_2\,ds, \quad \iiint \frac{dP_3}{dx}\,dx\,dy\,dz = \int \alpha P_3\,ds,$$

en appelant β et α les cosinus des angles que fait la partie extérieure de la normale en un point quelconque de la surface, avec les axes des y et des x positives. Il en résultera donc

$$\int X\,dm = \int (\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3)\,ds;$$

et en opérant de la même manière sur les deux dernières équations (3), on en conclura

$$\int Y\,dm = \int (\gamma Q_1 + \beta Q_2 + + \alpha Q_3)\,ds,$$

$$\int Z\,dm = \int (\gamma R_1 + \beta R_2 + \alpha R_3)\,ds.$$

Ces trois équations sont par rapport à une portion quelconque du corps ce qu'étaient les équations (3) relativement à un élément infiniment petit de sa masse. Si une partie de la surface de cette portion appartient à la surface même du corps, on aura, en tous ses points, $\gamma = c''$, $\beta = c'$, $\alpha = c$, et, d'après les équations (4), celles que nous venons de former deviendront

$$\left.\begin{aligned}\int X\,dm &= \int(\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3)\,ds - \int X_1\,ds,\\ \int Y\,dm &= \int(\gamma Q_1 + \beta Q_2 + \alpha Q_3)\,ds - \int Y_1\,ds,\\ \int Z\,dm &= \int(\gamma R_1 + \beta R_2 + \alpha R_3)\,ds - \int Z_1\,ds;\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

les premières intégrales des seconds membres répondant aux portions de surface tracées dans le corps, et les secondes à celles qui appartiennent à sa superficie.

(12) S'il s'agit du corps entier, les équations (5) ne contiendront plus que les forces données qui agissent à l'intérieur et à la surface du corps, et elles se réduiront à

$$\int X\,dm + \int X_1\,ds = 0,\quad \int Y\,dm + \int Y_1\,ds = 0,\quad \int Z\,dm + \int Z_1\,ds = 0.$$

Ce sont ces équations qui expriment que le corps ne peut prendre aucun mouvement de translation, commun à tous ses points. On déduira de même des équations (3) et (4), celles qui expriment qu'aucun mouvement de rotation, commun à tous les points du corps, ne peut non plus avoir lieu. En effet, d'après les deux premières équations (3) et (4), et la remarque qui termine le n° 7, on aura

$$(\mathrm{X}y-\mathrm{Y}x)\rho=\frac{d(y\mathrm{P}_1-x\mathrm{Q}_1)}{dz}+\frac{d(y\mathrm{P}_2-x\mathrm{Q}_2)}{dy}+\frac{d(y\mathrm{P}_3-x\mathrm{Q}_3)}{dx},$$

$$y_1\mathrm{X}_1-x_1\mathrm{Y}_1+(y\mathrm{P}_1-x_1\mathrm{Q}_1)c''+(y_1\mathrm{P}_2-x_1\mathrm{Q}_2)c'+(y_1\mathrm{P}_3-x_1\mathrm{Q}_3)=0;$$

et celles-ci ayant la même forme que ces premières équations, on en déduira, comme précédemment,

$$\int(\mathrm{X}y-\mathrm{Y}x)\,dm+\int(y_1\mathrm{X}_1-x_1\mathrm{Y}_1)\,ds=0;$$

les intégrales s'étendant à la masse et à la surface entière du corps. D'après les autres équations (3) et (4), on aura aussi

$$\int(\mathrm{Z}x-\mathrm{X}z)\,dm+\int(x_1\mathrm{Z}_1-z_1\mathrm{X}_1)\,ds=0,$$
$$\int(\mathrm{Y}z-\mathrm{Z}y)\,dm+\int(z_1\mathrm{Y}_1-y_1\mathrm{Z}_1)\,ds=0.$$

Ces trois équations sont celles de l'équilibre qui s'obtiennent dans la statique par la considération des moments.

Lorsque le corps sera gêné par des obstacles fixes, on devra comprendre parmi les forces qui le sollicitent, les résistances inconnues de ces obstacles, et faire entrer leurs composantes dans les équations (3) et (4) et dans les précédentes, qui serviront à les déterminer en même temps que la forme du corps et les déplacements de ses molécules. Dans tous les cas, les six équations générales de l'équilibre, que nous venons de former, sont comprises, comme on sait, dans une seule formule qui se déduit du principe des vitesses virtuelles. Il ne sera pas inutile d'observer qu'on parvient directement à cette équation unique, par la considération immédiate de l'action moléculaire, qui est la force intermédiaire au moyen de laquelle d'autres forces peuvent

se faire équilibre quoiqu'elles ne soient pas appliquées en un même point.

(13) Soit donc en général Π, Π', Π'', etc., des forces qui agissent à différents points de l'intérieur ou de la surface d'un corps. Après qu'il aura changé de forme, et sera parvenu à l'état d'équilibre, soit M un de ces points, auquel est appliquée la force Π; r sa distance à un autre point M'; fr leur action mutuelle; α, $\mathcal{E}$, γ, les angles que la direction de r fait avec trois axes rectangulaires; a, b, c, ceux que fait la direction de Π avec les mêmes axes; il faudra, pour l'équilibre du point M, qu'on ait ces trois équations :

$$\Pi \cos. a + \Sigma fr \cos. \alpha = 0,$$
$$\Pi \cos. b + \Sigma fr \cos. \mathcal{E} = 0,$$
$$\Pi \cos. c + \Sigma fr \cos. \gamma = 0;$$

les sommes Σ s'étendant à tous les points M' compris dans la sphère d'activité de M. Transportons le point M dans une position infiniment voisine; désignons par q, q', q'', les projections de l'espace qu'il aura parcouru, sur les axes auxquels répondent les angles a, b, c, ou α, $\mathcal{E}$, γ; soit aussi p la projection du même espace sur la direction de la force Π, et $\delta_{,} r$ sa projection sur la direction primitive de r; nous aurons

$$p = q \cos. b + q' \cos. b + q'' \cos. c,$$
$$\delta_{,} r = q \cos. \alpha + q' \cos. \mathcal{E} + q'' \cos. \gamma;$$

et les équations précédentes donneront

$$\Pi p + \Sigma fr \, \delta_{,} r = 0.$$

La quantité $\delta_{,} r$ exprime l'accroissement de la distance MM', quand le point M se déplace et que le point M' reste fixe;

si l'on désigne par $\delta'_{,}r$ l'accroissement partiel de MM′ qui serait dû au déplacement de M′, et par δr l'accroissement total de cette distance, dû aux déplacements simultanés de M et M′, on aura

$$\delta r = \delta_{,} r + \delta'_{,} r;$$

or, si l'on forme des équations d'équilibre semblables à la précédente pour tous les points du corps, et qu'on en prenne la somme, il est évident que chaque force fr y entrera deux fois, et s'y trouvera multipliée par $\delta_{,} r + \delta'_{,} r$, ou par δr; de manière que l'on aura

$$\Pi p + \Pi' p' + \Pi'' p'' + \text{etc.} + \Sigma fr \delta r = 0;$$

la somme Σ s'étendant actuellement à tous les points du corps considérés deux à deux, et p, p', p'', etc., étant les projections sur les directions des forces Π, Π', Π'', etc., des espaces infiniment petits, parcourus par leurs points d'application respectifs. Les déplacements de tous ces points sont arbitraires; mais si l'on suppose qu'ils soient tels que les distances mutuelles des points du corps ne changent pas, on aura $\delta r = 0$; ce qui fera disparaître la somme Σ contenue dans l'équation précédente, et la réduira à celle-ci :

$$\Pi p + \Pi' p' + \Pi'' p'' + \text{etc.} = 0,$$

qui est celle qu'il s'agissait d'obtenir.

(14) Les équations (3) et (4) conviennent aussi à l'état primitif du corps; et pour les appliquer à ce cas particulier, il suffit d'y faire $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, et d'y supprimer toutes les forces données, extérieures ou intérieures. On a alors

$$R_1 = Q_2 = P_3 = -K;$$

les six autres quantités P_1, Q_1, etc., sont nulles, et les six équations (3) et (4) se réduisent à quatre, savoir :

$$\frac{dK}{dx}=0,\ \frac{dK}{dy}=0,\ \frac{dK}{dz}=0,\ K=0.$$

D'après les trois premières, la quantité K est une constante qui est nulle en vertu de la dernière. En remettant donc pour K ce que cette lettre représente (n° 6), et supprimant le facteur constant $\frac{2\pi}{3\alpha^5}$, on aura

$$\Sigma r^3 fr=0.$$

Ainsi, dans l'état du corps qu'on peut regarder comme son état naturel, où il n'est soumis qu'à l'action mutuelle de ses molécules, due à leur attraction et à la chaleur, les intervalles qui les séparent doivent être tels que cette équation ait lieu pour tous les points du corps. Si l'on y introduit une nouvelle quantité de chaleur, ce qui augmentera, pour la même distance, l'intensité de la force répulsive, sans changer celle de la force attractive, il faudra que les intervalles moléculaires augmentent de manière que cette équation continue de subsister; et de là vient la dilatation calorifique, différente dans les différentes matières, à cause que la fonction fr n'y est pas la même.

Cette équation donne lieu de faire une remarque importante; c'est que les sommes Σ du n° 6, que représentent les lettres K et k, ne peuvent être changées en des intégrales, quoique la variable r croisse dans chacune d'elles par de très-petites différences égales à α; car si cette transformation était possible, k serait zéro en même temps que K; d'où il résulterait qu'après le changement de forme du corps, les

forces P, Q, R, seraient nulles comme auparavant, et que des forces données qui agiraient sur le corps ne pourraient se faire équilibre, ce qui est inadmissible. Pour faire voir que k s'évanouirait au même temps que K, observons qu'on aurait

$$K = \frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} fr\,dr,\quad k = \frac{2\pi}{15}\int_0^\infty \frac{r^5}{\alpha^6} d.\frac{1}{r}fr,$$

en multipliant sous les signes Σ par $\frac{dr}{\alpha}$, et remplaçant ces signes par ceux de l'intégration. Or, si l'on intègre par partie, et si l'on fait attention que fr est nulle aux deux limites, il en résultera

$$k = -\frac{2\pi}{3}\int_0^\infty \frac{r^3}{\alpha^6} fr\,dr = -K;$$

ce qui montre que la quantité K étant nulle, on aurait aussi $k=0$.

Au reste, la formule d'Euler, qui sert à transformer les sommes en intégrales, contient une série ordonnée suivant les puissances de la différence finie de la variable, qui n'est pas toujours convergente, quoique cette différence soit supposée très-petite. L'exception a lieu surtout dans le cas des fonctions comme fr qui varient très-rapidement. J'ai donné dans un autre Mémoire la limite du reste de cette série (*) : si l'on en fait l'application à l'exemple que j'ai cité plus haut (nº 1), on s'assurera aisément que ce reste ne peut être négligé, et que la série devient divergente, quand on suppose

(*) Voyez le tome VI de ces Mémoires.

l'exposant m très-grand par rapport au nombre n. Quoique la forme de la fonction fr ne nous soit pas connue, il est prouvé par ce qui précède que les sommes K et k tombent dans le cas d'exception, et que la seconde n'est pas réductible à la première. La quantité k dépendra de la nature et de la chaleur du corps que l'on considère; on peut la représenter par le poids d'un cylindre d'une matière convenue, ayant pour base l'unité de surface, et une hauteur convenable : sa valeur devra être donnée pour chaque corps en particulier, et pour chaque degré de température.

Nous voyons encore par la remarque que nous venons de faire, que les règles du *calcul des variations* pour la transformation des intégrales ne s'appliquent pas aux corps que l'on regarde comme des assemblages de molécules soumises à leur attraction ou répulsion mutuelle, et séparées par des intervalles de grandeur finie, aussi petits qu'on voudra. L'usage que Lagrange a fait de ce calcul dans la *Mécanique analytique* ne convient réellement qu'à des masses continues; et l'analyse d'après laquelle on étend les résultats trouvés de cette manière aux corps de la nature, doit être rejetée comme insuffisante.

(15) Supposons toujours les forces intérieures X, Y, Z, nulles, mais le corps soumis à l'action de forces extérieures, normales à sa surface. Soit N la force relative au point M_1, dont les composantes sont X_1, Y_1, Z_1; en regardant cette force donnée comme positive ou comme négative, selon qu'elle agit de dehors en dedans ou dedans en dehors, c'est-à-dire, selon qu'elle tend à comprimer ou à dilater le corps, nous aurons

$$X_1 = -Nc,\ Y_1 = -Nc',\ Z_1 = -Nc'';$$

c, c', c'', étant les cosinus des angles que la partie extérieure de la normale au point M_1 fait avec les axes des x, y, z, laquelle normale ne change pas de direction dans le changement de forme que nous allons considérer, en sorte que c, c', c'', seront les mêmes que dans les équations (4) relatives à la surface.

Supposons en outre la force N constante et le corps homogène; on satisfera aux équations (3) et (4), en admettant que le corps soit partout et dans toutes les directions, également comprimé ou dilaté. Ainsi, la distance r comprise entre deux points voisins M et M' étant devenue r' après le changement de forme du corps, on fera

$$r' = r - r\delta,$$

en désignant par δ une quantité indépendante de la direction de la droite MM' et des coordonnées x, y, z, du point M, qui sera positive ou négative selon qu'il y aura compression ou dilatation. D'après les valeurs de u', v', w', du n° 2, et celle de $r' - r$ qui s'en déduit, il faudra, pour que cette condition soit remplie, que l'on ait

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = -\delta,$$

et que toutes les autres différences partielles $\frac{du}{dy}$, $\frac{dv}{dx}$, etc., soient égales à zéro. Il en résultera

$$R_1 = Q_2 = P_3 = 5k\delta;$$

les six autres quantités P_1, Q_1, etc., seront nulles, et les équations (3) deviendront

$$\frac{d.k\delta}{dx} = 0, \quad \frac{d.k\delta}{dy} = 0, \quad \frac{d.k\delta}{dz} = 0.$$

Elles seront effectivement satisfaites, puisque δ est une constante par hypothèse, et que k l'est aussi à cause de l'homogénéité du corps. En même temps les équations (4) se réduiront à une seule, savoir :

$$5k\delta = \text{N}.$$

On voit par là que k est une quantité essentiellement positive, puisque δ doit toujours être du même signe que la force N comprimante ou dilatante. Dans les différentes matières δ sera en raison inverse de k, et dans chaque matière en particulier δ variera proportionnellement à N. Le volume d'un corps étant V dans son état naturel, il deviendra $\text{V}(1 - 3\delta)$ par l'action de la force N ; et si l'expérience fait connaître sa variation, on en conclura, au moyen de l'équation précédente, la valeur de k relative à la matière et à la température du corps.

Les équations (2) deviendront

$$\text{P} = 5k\delta c, \quad \text{Q} = 5k\delta c', \quad \text{R} = 5k\delta c'';$$

d'où l'on conclut que dans le cas particulier dont il s'agit, l'action d'une partie du corps sur l'autre, ou la résultante des forces P, Q, R, sera normale à la surface de séparation, et partout égale à $5k\delta$, ou à la force extérieure N ; résultat semblable à celui que présentent les liquides et les fluides, d'après la propriété qu'ils ont de transmettre également en tous sens les pressions exercées à leurs surfaces.

(16) Si le corps que nous avons considéré jusqu'ici n'est pas en équilibre, et que ses molécules fassent de très-petites oscillations, on obtiendra les équations de ce mouvement, d'après les principes de la dynamique, en remplaçant, dans

celles que nous avons trouvées pour l'équilibre, les forces X, Y, Z, par

$$X-\frac{d^2u}{dt^2},\ \ Y-\frac{d^2v}{dt^2},\ \ Z-\frac{d^2w}{dt^2};$$

dt étant l'élément du temps pris pour la différentielle constante, ce qui aura lieu dans toute la suite de ce Mémoire sans qu'on soit obligé de le répéter. Les inconnues u, v, w, seront alors des fonctions de x, y, z et t qui exprimeront au bout du temps t, les déplacements très-petits parallèlement aux axes des x, y, z, du point M dont la position dans l'état naturel du corps répond aux coordonnées x, y, z; leurs différences partielles $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$, exprimeront au même instant, les composantes de la vitesse de ce point, suivant les mêmes directions.

Je substitue, en outre, dans les équations (3) à la place de P_1, Q_1, etc., leurs valeurs, et je suppose le corps homogène; en observant que $K=0$, il vient

$$\left.\begin{aligned}
X-\frac{d^2u}{dt^2}+a^2\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{2}{3}\frac{d^2v}{dy\,dx}+\frac{2}{3}\frac{d^2w}{dz\,dx}+\frac{1}{3}\frac{d^2u}{dy^2}+\frac{1}{3}\frac{d^2u}{d^2z}\right)&=0,\\
Y-\frac{d^2v}{dt^2}+a^2\left(\frac{d^2v}{dy^2}+\frac{2}{3}\frac{d^2u}{dx\,dy}+\frac{2}{3}\frac{d^2w}{dz\,dy}+\frac{1}{3}\frac{d^2v}{dx^2}+\frac{1}{3}\frac{d^2v}{dz^2}\right)&=0,\\
Z-\frac{d^2w}{dt^2}+a^2\left(\frac{d^2w}{dz^2}+\frac{2}{3}\frac{d^2w}{dx\,dz}+\frac{2}{3}\frac{d^2w}{dy\,dz}+\frac{1}{3}\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{1}{3}\frac{d^2w}{dy^2}\right)&=0;
\end{aligned}\right\}\ (6)$$

a^2 étant un coefficient constant, égal à $\frac{3k}{\rho}$. Ces équations ont la même forme que celles qui ont été données par M. Navier (*), et qu'il a obtenues en partant de l'hypothèse que

(*) Tome VII de ces Mémoires.

les molécules du corps, après son changement de forme, s'attirent proportionnellement aux accroissements de leurs distances mutuelles; et en admettant, de plus, que les résultantes de ces forces peuvent s'exprimer par des intégrales, ce qui rendrait nul le coefficient a^2, ainsi qu'on l'a vu plus haut. Les équations relatives à la surface, formées de la même manière, se trouvent aussi dans le Mémoire de M. Navier.

Les composantes X, Y, Z, des forces qui ont lieu dans la nature s'expriment toujours par les différences partielles relatives à x, y, z, d'une même fonction de ces variables. Supposons donc

$$X = \frac{d\Pi}{dx}, \quad Y = \frac{d\Pi}{dy}, \quad Z = \frac{d\Pi}{dz};$$

Π étant une fonction donnée de x, y, z, qui contiendra aussi le temps t, si les forces appliquées aux corps varient pendant son mouvement. On satisfera aux équations (6), en prenant pour u, v, w, les différences partielles relatives à x, y, z, d'une même quantité, c'est-à-dire, en faisant

$$u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad v = \frac{d\varphi}{dy}, \quad w = \frac{d\varphi}{dz},$$

et regardant φ comme une fonction inconnue de x, y, z et t En effet, après la substitution de ces diverses valeurs, on verra que les équations (6) seront les différentielles par rapport à x, y, z, d'une même équation, savoir :

$$\Pi - \frac{d^2\varphi}{dt^2} + a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) = 0, \qquad (7)$$

laquelle servira à déterminer la valeur de φ. Mais cette manière de résoudre les équations (6) n'en donne qu'une solution très-particulière.

Les équations (4) ont lieu, soit qu'il y ait équilibre, ou qu'il y ait mouvement. Toutefois, dans le cas du mouvement, on doit observer que l'état initial du corps étant absolument arbitraire, il peut arriver qu'il ne satisfasse pas à ces équations, qui ne subsisteront alors dans les premiers instants du mouvement que si l'on tient compte des forces qui ont produit l'état initial. C'est principalement pour éclaircir cette difficulté et pour donner une application de l'équation (7) que j'ai choisi l'exemple du paragraphe suivant.

§ II.

Vibrations d'une sphère élastique.

(17) Supposons que le corps élastique soit une sphère homogène, dont tous les points également éloignés du centre ont à chaque instant un même mouvement dirigé suivant leurs rayons respectifs. Soit r le rayon du point M dans l'état naturel de la sphère; θ son déplacement au bout du temps t. suivant le prolongement de ce rayon; en fixant l'origine des coordonnées x, y, z, au centre de la sphère, les déplacements u, v, w, parallèles à leurs axes, seront

$$u=\frac{\theta x}{r},\quad v=\frac{\theta y}{r},\quad w=\frac{\theta z}{r};$$

et comme, d'après notre hypothèse, θ est une fonction de r et t, si l'on désigne par φ une autre fonction inconnue de ces deux variables, et qu'on fasse

$$\theta=\frac{d\varphi}{dr},$$

il en résultera

$$u=\frac{d\varphi}{dx},\quad v=\frac{d\varphi}{dy},\quad w=\frac{d\varphi}{dz};$$

par conséquent l'exemple que nous prenons rentrera dans le cas particulier auquel s'applique l'équation (7). Nous supposerons nulles les forces X, Y, Z; ce qui rendra la quantité Π indépendante de x, y, z : ce sera une fonction inconnue de t que nous représenterons par T; et à cause que φ est une fonction de r et t, l'équation (7) deviendra

$$\mathrm{T}\,r-\frac{d^2.r\varphi}{dt^2}+a^2\frac{d^2.r\varphi}{dr^2}=0. \qquad (1)$$

On connaît son intégrale sous forme finie, qui contient deux fonctions arbitraires, l'une de $r-at$, et l'autre de $r+at$; d'où l'on peut conclure, comme dans la théorie du son, qu'un ébranlement circonscrit dans une petite étendue autour de l'origine du rayon r, se propagera dans l'intérieur d'un corps élastique avec une vitesse constante et égale à a, ou à $\sqrt{\frac{3k}{\rho}}$; mais pour déterminer les vibrations d'une sphère dont le rayon a une longueur déterminée, il nous sera plus commode d'employer sous une autre forme l'intégrale complète de l'équation (1).

Quelle que soit la fonction T, on peut la représenter par

$$\mathrm{T}=\Sigma\,(\mathrm{C}\cos.mt+\mathrm{C}'\sin.mt);$$

C, C′, m, étant des constantes indéterminées, et la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de ces trois quantités. Si l'on fait ensuite

$$r\varphi=\varpi-\Sigma\frac{r}{m^2}(\mathrm{C}\cos.mt+\mathrm{C}'\sin.mt),$$

l'équation (1) se réduira à

$$\frac{d^2\varpi}{dt^2}=a^2\frac{d^2\varpi}{dr^2}.$$

On y satisfait en prenant

$$\varpi=(A\cos.\mu at+B\sin.\mu at)\sin.\mu r + (A'\cos.\mu at+B'\sin.\mu at)\cos.\mu r;$$

A, B, A′, B′, μ, étant des quantités indépendantes de r et t; on y satisfait aussi au moyen de la somme de plusieurs valeurs de ϖ, exprimées par cette formule; et si l'on étend cette somme à toutes les valeurs possibles de A, A′, B, B′, μ, on aura l'expression la plus générale de ϖ. Donc, en indiquant cette somme, comme la précédente, par la caractéristique Σ, l'intégrale complète de l'équation (1) sera

$$\varphi=\frac{1}{r}\Sigma\left[(A\cos.\mu at+B\sin.\mu at)\sin.\mu r + (A'\cos.\mu at+B'\sin.\mu at)\cos.\mu r\right]-\Sigma\frac{1}{m^2}(C\cos.mt+C'\sin.mt).$$

Dans l'hypothèse que nous avons faite sur le mouvement des points de la sphère, son centre doit être immobile; on aura donc $\theta=\frac{d\varphi}{dr}=0$, pour $r=0$ et quelque soit t; condition qui exige que les coefficients A′ et B′ soient nuls. D'ailleurs on peut supprimer la seconde somme Σ, qui n'influerait pas sur les déplacements des points de la sphère, exprimés par les différences partielles de φ relatives à leurs coordonnées. Nous aurons donc simplement

$$\varphi=\Sigma(A\cos.\mu at+B\sin.\mu at)\frac{\sin.\mu r}{r}. \qquad (2)$$

(18) A la surface, je supposerai la sphère soumise à une

pression normale, égale en tous les points, et variable avec le temps; je représenterai cette force, rapportée à l'unité de surface et dirigée de dehors en dedans, par Ne^{-ht}, e étant la base des logarithmes népériens, N et h deux constantes positives. Ses trois composantes qui entrent dans les équations (4) du n° 10, seront

$$X_{1}=-\frac{x}{r}Ne^{-ht}, \quad Y_{1}=-\frac{y}{r}Ne^{-ht}, \quad Z_{1}=-\frac{z}{r}Ne^{-ht},$$

à cause que le rayon de la sphère est la normale à sa surface; et pour la même raison, on y fera

$$c=\frac{x}{r}, \quad c'=\frac{y}{r}, \quad c''=\frac{z}{r}.$$

En substituant les valeurs de u, v, w, dans les expressions de P_1, P_2, P_3, du n° 7, on aura, en outre,

$$P_1=-2k\frac{d^2\varphi}{dxdz}, \quad P_2=-2k\frac{d^2\varphi}{dxdy}, \quad P_3=-k\left(3\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right).$$

La première équation (4) deviendra donc

$$\frac{x}{r}Ne^{-ht}+2k\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{x}{r}+\frac{d^2\varphi}{dxdy}\frac{y}{r}+\frac{d^2\varphi}{dxdz}\frac{z}{r}\right)$$
$$+k\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}\right)\frac{x}{r}=0;$$

mais à cause que φ est une fonction de r et t, on a

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}=\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr},$$
$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{x}{r}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{y}{r}+\frac{d\varphi}{dz}\frac{z}{r}=\frac{d\varphi}{dr};$$

en différentiant cette dernière formule par rapport à x, et

réduisant, on en conclut

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}\frac{x}{r}+\frac{d^2\varphi}{dxdy}\frac{y}{r}+\frac{d^2\varphi}{dxdz}\frac{z}{r}=\frac{d^2\varphi}{dr^2}\frac{x}{r};$$

nous aurons, par conséquent,

$$Ne^{-ht}+3k\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2k}{r}\frac{d\varphi}{dr}=0. \qquad (3)$$

On parvient au même résultat en ayant égard aux deux autres équations (4); ainsi, dans l'exemple qui nous occupe, les trois équations relatives à la surface se réduisent à une seule qui n'aura lieu que pour $r=l$, en désignant par l le rayon de la sphère.

En y mettant pour φ sa valeur, elle devient :

$$\frac{k}{l^3}\Sigma(A\cos.\mu at+B\sin.\mu at)[(4-3\mu^2l^2)\sin.\mu l-4\mu l\cos.\mu l]=-Ne^{-ht}.$$

Si l'on fait d'abord abstraction de son second membre, il faudra, pour y satisfaire quelque soit t, égaler à zéro le facteur compris entre les crochets; ce qui donne cette équation :

$$(4-3\mu^2l^2)\sin.\mu l-4\mu l\cos.\mu l=0, \qquad (4)$$

qui servira à déterminer les valeurs de μ. Pour tenir compte du second membre, je prends

$$\mu=\frac{h\sqrt{-1}}{a};$$

je fais ensuite, pour abréger,

$$\frac{k}{a^2l^3}\left\{(4a^2+3h^2l^2)\left(e^{\frac{hl}{a}}-e^{-\frac{hl}{a}}\right)-4ahl\left(e^{\frac{hl}{a}}+e^{-\frac{hl}{a}}\right)\right\}=\lambda;$$

et je prends enfin

$$A = \frac{2}{\;} N\sqrt{-1}, \quad B = -\frac{2}{\lambda} N.$$

Il en résulte qu'après avoir assujéti la formule (2) à la condition relative à la surface, exprimée par l'équation (3), elle prendra la forme :

$$\varphi = \Sigma(A\cos.\mu a t + B\sin.\mu a t)\frac{\sin.\mu r}{r} - \left(e^{\frac{hr}{a}} - e^{-\frac{hr}{a}}\right)\frac{N e^{-ht}}{\lambda r}. \quad (5)$$

La somme Σ devra s'étendre à toutes les valeurs de μ tirées de l'équation (4), dont les racines, autres que $\mu = 0$, sont deux à deux égales et de signes contraires ; mais nous supposerons que l'on réunisse en un seul terme, comme cela se peut évidemment, les deux termes qui répondent à chaque couple de racines, et nous n'étendrons en conséquence la somme Σ qu'à des valeurs de μ dont les carrés sont différents.

J'ai supposé que la pression extérieure était exprimée par une exponentielle, parce que cela suffit à l'objet que je me propose ; mais lorsque cette fonction sera la somme d'un nombre quelconque de termes tels que $N\cos. ht$ ou $N\sin. ht$, on satisfera encore sans difficulté à l'équation relative à la surface, et par conséquent aussi quand elle sera une autre fonction donnée du temps, que l'on transformera préalablement au moyen des formules connues, en une intégrale de semblables quantités.

(19) Il ne reste plus qu'à déterminer les coefficients A et B en fonctions de μ, d'après l'état initial de la sphère. J'emploierai à cet effet, la méthode qui se trouve dans mon second Mémoire sur la *Distribution de la chaleur,* et que j'ai rappelée succinctement dans le Bulletin de la Société phylomatique du mois d'octobre 1826.

La formule (5) se compose de deux parties qui satisfont séparément à l'équation (1). Si l'on représente par φ' la partie de $\frac{d\varphi}{dr}$ indépendante de la force extérieure, que l'on divise l'équation (1) par r, et qu'on la différentie ensuite par rapport à cette variable, on aura

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi'}{dr}-\frac{2}{r^2}\varphi'\right);$$

et d'après l'équation (3), on aura, en même temps,

$$3\frac{d\varphi'}{dr}+\frac{2}{r}\varphi'=0,$$

pour $r=l$. Si nous faisons $r\varphi'=\psi$, l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^2\psi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\psi}{dr^2}-\frac{2}{r^2}\psi\right),$$

la valeur de ψ, conclue de la formule (5), sera

$$\psi=\Sigma(\mathrm{A}\cos.\mu at+\mathrm{B}\sin.\mu at)\mathrm{R}, \qquad (7)$$

en faisant, pour abréger,

$$\mathrm{R}=(\mu r\cos.\mu r\cos.\mu r-\sin.\mu r)\frac{1}{r};$$

cette quantité R satisfera à l'équation

$$\left(\mu^2-\frac{2}{r^2}\right)\mathrm{R}+\frac{d^2\mathrm{R}}{dr^2}=0; \qquad (8)$$

pour $r=0$, on aura $\psi=0$ et $\mathrm{R}=0$; et pour $r=l$, à cause de $3\frac{d\varphi'}{dr}+\frac{2}{r}\varphi'=0$, on aura aussi

$$3\frac{d\psi}{dr}-\frac{1}{r}\psi=0, \quad 3\frac{d\mathrm{R}}{dr}-\frac{1}{r}\mathrm{R}=0, \qquad (9)$$

ce qui est d'ailleurs facile à vérifier en ayant égard à l'équation (4).

Cela posé, je multiplie l'équation (6) par $R\,dr$, puis j'intègre les deux membres depuis $r=o$ jusqu'à $r=l$, ce qui donne

$$\frac{d^2 . \int_0^l \psi R\,dr}{t^2} = a^2 \left(\int_0^l \frac{d^2\psi}{dr^2} R\,dr - 2 \int_0^l \frac{\psi R}{r^2}\,dr \right). \qquad (10)$$

En intégrant par partie, et observant que R et ψ s'évanouissent à la limite $r=0$, on a

$$\int_0^l \frac{d^2\psi}{dr^2} R\,dr = \frac{d\psi}{dr} R - \psi \frac{dR}{dr} + \int_0^l \psi \frac{d^2 R}{dr^2}\,dr.$$

Les termes compris hors du signe $\int$ se rapportent à la seconde limite $r=l$, pour laquelle on a

$$\frac{d\psi}{dr} R - \psi \frac{dR}{dr} = 0,$$

en vertu des équations (9). Mettant, en outre, sous le signe $\int$, à la place de $\frac{d^2 R}{dr^2}$ sa valeur tirée de l'équation (8), on aura

$$\int_0^l \frac{d^2\psi}{dr^2} R\,dr = -\mu^2 \int_0^l \psi R\,dr + 2 \int_0^l \frac{\psi R}{r^2}\,dr;$$

au moyen de quoi l'équation (10) se changera en celle-ci :

$$\frac{d^2 . \int_0^l \psi R\,dr}{dr^2} + a^2 \mu^2 \int_0^l \psi R\,dr = 0,$$

c'est-à-dire, en une équation différentielle du second ordre, dont l'intégrale complète est

$$\int_0^l \psi R\,dr = D \cos. \mu a t + D' \sin. \mu a t, \qquad (11)$$

D et D′ désignant les deux constantes arbitraires.

Pour les déterminer, j'observe qu'à l'origine du mouvement le déplacement $\frac{d\varphi}{dr}$ de chaque point de la sphère et sa vitesse $\frac{d^2\varphi}{dr\,dt}$ doivent être connues en fonctions de r; les valeurs initiales de φ', $\frac{d\varphi'}{dt}$, ψ, $\frac{d\psi}{dt}$, seront donc aussi données; et si l'on compte le temps t à partir de cette origine et que l'on fasse

$$\varphi' = fr, \quad \frac{d\varphi'}{dt} = f'r, \quad \psi = rfr, \quad \frac{d\psi}{dt} = rf'r,$$

pour $t = 0$, les deux fonctions fr et $f'r$ seront données pour toutes les valeurs de r, depuis $r = 0$ jusqu'à $r = l$. En faisant par conséquent $t = 0$ dans l'équation (11) et dans sa différentielle relative à t, et remettant pour R ce que cette lettre représente, nous aurons

$$D = \int_0^l (\mu r \cos.\mu r - \sin.\mu r) fr\,dr,$$

$$D' = \frac{1}{\mu a} \int_0^l (\mu r \cos.\mu r - \sin.\mu r) f'r\,dr,$$

pour les valeurs demandées de D et D'.

Ces deux quantités étant ainsi déterminées, je mets dans le premier membre de l'équation (11), la formule (7) à la place de ψ. Cette équation devant subsister quelque soit t, il faut que les coefficients des termes semblables soient égaux dans ses deux membres; d'où l'on conclut 1° que μ' et μ étant deux racines de l'équation (4), telles que μ'^2 et μ^2 soient différents, il faudra qu'on ait

$$\int_0^l RR'\,dr = 0, \qquad (12)$$

R' désignant ce que devient R quand on y met μ' au lieu de μ; 2° que dans le cas particulier de $\mu'=\mu$, on aura

$$A\int_0^l R^2 dr = D, \quad B\int_0^l R^2 dr = D',$$

ce qui fera connaître les valeurs de A et B d'après celles de D et D'.

L'intégrale que ces formules renferme s'obtient facilement, car on a

$$\int_0^l R^2 dr = \int_0^l (\mu r \cos.\mu r - \sin.\mu r)\, d.\frac{\sin.\mu r}{r};$$

en intégrant par partie, il vient

$$\int_0^l R^2 dr = (\mu l \cos.\mu l - \sin.\mu l)\frac{\sin.\mu l}{l} + \mu^2\int_0^l \sin.^2\mu r;$$

et en achevant l'intégration, il en résulte

$$\int_0^l R^2 dr = \frac{1}{2l}(\mu^2 l^2 + \mu l \sin.\mu l \cos.\mu l - 2\sin.^2\mu l).$$

Maintenant que la formule (5) ne contient plus rien d'inconnu, les valeurs de $\frac{d\varphi}{dr}$ et $\frac{d^2\varphi}{dr\,dt}$ qui s'en déduisent feront connaître à chaque instant le déplacement et la vitesse d'un point quelconque de la sphère; ce qui est la solution complète du problème que nous avions à résoudre. Ces valeurs devant subsister pour toutes celles de t, en y faisant $t=0$, on aura les valeurs initiales du déplacement et de la vitesse, et, par suite, des expressions de fr et $f'r$ sous forme de séries, qui seront équivalentes à ces deux fonctions arbitraires depuis $r=0$ jusqu'à $r=l$.

(20) Lorsque la force extérieure n'existera pas, on fera $N=0$, ce qui rendra égales les deux quantités φ' et $\frac{d\varphi}{dr}$. On aura alors $\frac{d\varphi}{dr}=fr$ pour $t=0$; il faudrait donc, en vertu de l'équation (3), que l'on eût

$$3\frac{dfr}{dr}+\frac{2}{r}fr=0,$$

pour $r=l$; et quand l'état initial de la sphère sera tel que cela ne soit pas, il paraîtrait que la condition relative à la surface ne serait pas remplie dans les premiers instants du mouvement; mais il faut alors avoir égard aux forces qui ont produit cet état, ainsi que nous l'avons déja dit à la fin du nº 16.

Supposons, par exemple, que la sphère était également comprimée en tous ses points, de sorte que dans son état initial le rayon r d'un point quelconque M se trouvait diminué d'une quantité proportionnelle à sa longueur et réduit à $r-r\delta$, δ étant un coefficient constant. Pour $t=0$, nous aurons

$$\frac{d\varphi}{dr}=fr=-r\delta;$$

par conséquent la quantité $3\frac{dfr}{dr}+\frac{2}{r}fr$ sera partout égale à -5δ, et ne sera pas nulle à la surface. Mais on peut regarder la compression initiale, comme ayant été produite par une force normale à la surface et la même en tous ses points, que nous représenterons par N : on suppose donc que cette force a été enlevée subitement, et que la sphère s'est trouvée abandonnée à elle-même; or, quelque rapide qu'ait été l'anéantissement de cette pression, il n'a pu s'accomplir que

dans un intervalle de temps fini; et pour faire usage des calculs précédents, nous admettrons que pendant un temps aussi court que l'on voudra, la pression décroissante était exprimée par $\mathrm{N}e^{-ht}$, $\frac{1}{h}$ étant un temps extrêmement petit. Alors, pour $t=0$, l'équation (3) deviendra

$$\mathrm{N}-5k\delta=0;$$

résultat identique d'après la valeur de δ due à la pression N et calculée dans le n° 15.

Au reste, d'après la grandeur supposée de h, le terme provenant de cette force $\mathrm{N}e^{-ht}$ disparaîtra très-promptement, soit dans l'équation (3), soit dans la formule (5); et il n'est utile à considérer que pour montrer que la condition relative à la surface est remplie sans aucune exception et dès l'origine du mouvement. En en faisant donc abstraction, supposant l'état initial quelconque et substituant pour A et B leurs valeurs, ainsi que celles de D, D', $\int_0^l \mathrm{R}^2 dr$, dont elles dépendent, la formule (5) deviendra

$$\varphi=2l\Sigma\left\{\frac{\int_0^l(\mu r\cos.\mu r-\sin.\mu t)(\mu afr.\cos.\mu at+f'r.\sin.\mu at)dr}{\mu a(\mu^2l^2+\mu l\sin.\mu l\cos.\mu l-2\sin.^2\mu l)}\cdot\frac{\sin.\mu r}{r}\right\}. \quad (13)$$

(21) L'équation (12) à laquelle nous avons été conduit par notre analyse, se vérifie aisément de la manière suivante.

L'intégrale qui forme son premier membre peut s'écrire de ces deux manières :

$$\int_0^l \mathrm{RR}'dr=\int_0^l(\mu r\cos.\mu r-\sin.\mu r)d.\frac{\sin.\mu' r}{r},$$

$$\int_0^l \mathrm{RR}'dr=\int_0^l(\mu' r\cos.\mu' r-\sin.\mu' r)d.\frac{\sin.\mu r}{r};$$

en intégrant par parties, il vient

$$\int_0^l \mathrm{RR}'\,dr = (\mu l \cos.\mu l - \sin.\mu l)\frac{\sin.\mu' l}{l} + \mu^2\int_0^l \sin.\mu r \sin.\mu' r\, dr,$$

$$\int_0^l \mathrm{RR}'\,dr = (\mu' l \cos.\mu' - \sin.\mu' l)\frac{\sin.\mu l}{l} + \mu'^2\int_0^l \sin.\mu r \sin.\mu' r\, dr;$$

d'après l'équation (4), dont μ et μ' sont des racines, on a

$$\mu l \cos.\mu l - \sin.\mu l = -\frac{3\mu^2 l^2}{4}\sin.\mu l,$$

$$\mu' l \cos.\mu' l - \sin.\mu' l = -\frac{3\mu'^2 l^2}{4}\sin.\mu' l;$$

on aura donc

$$\int_0^l \mathrm{RR}'\,dr = \mu^2\left(\int_0^l \sin.\mu r \sin.\mu' r\, dr - \frac{3l}{4}\sin.\mu l \sin.\mu' l\right),$$

$$\int_0^l \mathrm{RR}'\,dr = \mu'^2\left(\int_0^l \sin.\mu r \sin.\mu' r\, dr - \frac{3l}{4}\sin.\mu l \sin.\mu' l\right);$$

d'où il résulte

$$(\mu^2 - \mu'^2)\int_0^l \mathrm{RR}'\,dr = 0;$$

par conséquent l'intégrale $\int_0^l \mathrm{RR}'\,dr$ est zéro, quand le facteur $\mu^2 - \mu'^2$ ne l'est pas, ce qu'il s'agissait de vérifier.

On conclut de cette équation (12), ainsi vérifiée, que l'équation (4) n'a que des racines réelles. En effet, supposons qu'elle ait des racines imaginaires, et soit $p + q\sqrt{-1}$ une couple de semblables racines; p et q étant des quantités réelles dont la seconde n'est pas nulle: on pourra prendre

$$\mu = p + q\sqrt{-1}, \quad \mu' = p - q\sqrt{-1},$$

et désigner par

$$R = P + Q\sqrt{-1}, \quad R' = P - Q\sqrt{-1},$$

les valeurs correspondantes de R et R′; P et Q étant aussi des quantités réelles : l'équation (12) sera alors

$$\int_0^l (P^2 + Q^2)\,dr = 0;$$

mais tous les éléments de cette intégrale étant positifs, elle ne peut être nulle à moins qu'on n'ait

$$P^2 + Q^2 = 0, \quad \text{ou} \quad P = 0 \quad \text{et} \quad Q = 0,$$

pour toutes les valeurs de r; or, on tirerait de ces équations des valeurs de p et q dépendantes de cette variable, ce qui est inadmissible, et par conséquent aussi la supposition des racines imaginaires. D'après la forme de R, les quantités P et Q sont des fonctions de pr et qr, en sorte que les valeurs de p et q dont il est question seraient en raison inverse de r.

(22) Le terme de la formule (13) qui répond à $\mu = 0$ est évidemment nul; cette formule ne sera donc composée que de termes périodiques; et si l'on appelle τ le temps périodique de l'un quelconque d'entre eux, on aura

$$\mu a \tau = 2\pi, \quad \tau = \frac{2\pi}{\mu}\sqrt{\frac{\rho}{3k}},$$

en remettant pour a sa valeur (n° 16). Mais toutes les valeurs de μ étant incommensurables, la sphère ne pourra exécuter des vibrations isochrones et faire entendre un son unique et appréciable, à moins que, d'après son état initial, tous les termes de la formule (13) ne se réduisent à un seul. En

appelant m, relativement à ce terme, la valeur numérique de μl tirée de l'équation (4), et désignant par n le nombre de vibrations d'égale durée qui auront lieu dans l'unité de temps, ou la valeur de $\frac{1}{\tau}$, nous aurons

$$n = \frac{m}{2\pi l}\sqrt{\frac{3k}{\rho}};$$

où l'on voit que la série des sons qu'une même sphère peut faire entendre, suivra la même loi que la série des valeurs de m. Dans deux sphères de même matière et de dimensions différentes, les sons du même rang seront en raison inverse de leurs rayons. Ici, et dans toute la suite de ce Mémoire, nous entendons par la durée d'une vibration sonore, l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux retours consécutifs du corps vibrant au même état, c'est-à-dire, de tous ses points aux mêmes positions et aux mêmes vitesses, et nous prenons pour mesure du son, le nombre de ces vibrations, supposées isochrones, que le corps exécute dans l'unité de temps.

Pour éliminer k de la formule précédente, supposons que la sphère, ou un autre corps de la même matière, ait été soumis à une pression N, et ait éprouvé une condensation δ, comme dans le n° 15; appelons h la hauteur d'un fluide de même densité que la sphère qui produirait cette pression rapportée à l'unité de surface, et désignons par g la gravité; nous aurons

$$\mathrm{N} = \rho g h, \quad k = \frac{\rho g h}{5\delta},$$

et par conséquent

$$n = \frac{m}{2\pi l}\sqrt{\frac{3gh}{5\delta}}.$$

Après quelques essais, on trouve pour les valeurs approchées des deux plus petites racines de l'équation (4);

$$m=2{,}56334,\quad m=6{,}05973\,;$$

d'où il résulte que les deux sons les plus graves de la sphère répondront à

$$n=(0{,}31602)\sqrt{\frac{gh}{l^2\delta}},\quad n=(0{,}74705)\sqrt{\frac{gh}{l^2\delta}},$$

c'est-à-dire qu'ils seront entre eux à peu près comme 2 est à 5.

S'il existe dans l'intérieur de la sphère, une ou plusieurs surfaces concentriques à la sienne, dont tous les points restent immobiles pendant les vibrations isochrones, correspondantes à une racine déterminée de l'équation (4), leurs rayons seront donnés par l'équation $\frac{d\varphi}{dr}=0$, laquelle est

$$\mu r\cos.\mu r-\sin.\mu r=0,$$

en vertu de la formule (13). Le son correspondant de la sphère sera donc accompagné d'autant de *surfaces nodales* que cette équation donnera de valeurs de r moindres que l, ou, ce qui est la même chose, de valeurs de μr moindres que μl ou m. Ses deux plus petites racines ont pour valeurs approchées :

$$\mu r=4{,}49331,\quad \mu r=7{,}73747.$$

En les comparant aux deux plus petites valeurs de m, on voit qu'il n'y aura pas de surfaces nodales dans le cas du son le plus grave, et qu'il y en aura une seule dans le cas du son qui vient ensuite; le rayon de celle-ci étant

$$r = \frac{(4,49331)l}{6,05973} = (0,74150)l,$$

ou à peu près les trois quarts du rayon de la sphère. Il est inutile de dire que l'existence des surfaces nodales intérieures ne pourrait pas se vérifier par l'expérience; et il paraît même difficile que l'observation puisse faire connaître les différents sons d'une sphère élastique qui sont déterminés par le calcul.

Les premières racines de l'équation (4) ne peuvent s'obtenir que par des essais; mais les valeurs approchées des autres se déterminent plus directement. Si la valeur de μl est très-grande, cette équation se réduit à très-peu près à $\sin.\mu l = 0$; d'où l'on tire $\mu l = i\pi$, i étant un nombre entier. En désignant par x la correction qu'il faut faire subir à cette valeur, de manière qu'on ait

$$\mu l = i\pi - x,$$

on trouvera, à très-peu près,

$$\text{tang.}\, x = \frac{i\pi}{\frac{3}{4}i^2\pi^2 - 1}\left[1 + \frac{\frac{3}{4}i^2\pi^2 + 1}{(\frac{3}{4}i^2\pi^2 - 1)^2}\right].$$

La valeur de μl ainsi corrigée sera d'autant plus approchée que i sera plus grand : si l'on y fait $i = 2$, on trouve

$$\mu l = 6,05917,$$

ce qui diffère déja fort peu de la seconde racine de l'équation (4), ou de la seconde valeur de m donnée plus haut.

§ III.

Équations de l'équilibre et du mouvement d'une corde élastique.

(23) Lorsqu'une verge de matière quelconque a été écartée de sa forme naturelle, sa tendance à y revenir dépend de son épaisseur, qui peut toujours être rendue assez petite pour que cette tendance devienne insensible. Dans ce cas, la verge n'est plus élastique que par l'effet d'une tension qu'on lui fait éprouver suivant sa longueur; c'est proprement ce qu'on appelle une *corde élastique;* et, ce cas étant le plus simple, nous allons d'abord nous en occuper. Nous traiterons l'épaisseur comme infiniment petite; en sorte que les forces P_1, P_2, etc., seront regardées comme constantes dans toute l'étendue de chaque section de la corde, normale à la courbe qu'elle forme, soit dans son état d'équilibre, soit à chaque instant pendant son mouvement.

Pour obtenir les équations d'équilibre, nous ferons usage des formules (5) du n° 11, que nous appliquerons à une portion de la corde, comprise entre deux sections normales. Nous supposerons qu'aucune force n'agit à sa surface, ce qui rendra nulles les composantes X_1, Y_1, Z_1, et fera disparaître les secondes intégrales que contiennent les seconds membres des équations (5). Les premières se partageront chacune en deux autres qui appartiendront aux sections extrêmes de la portion de corde. L'une de ces sections sera faite par le point M dont les coordonnées sont x, y, z, et auquel répondent les forces P_1, P_2, etc.; nous désignerons par ω l'aire de cette section, qu'il suffira de substituer à son élément différentiel dans les intégrales qui s'y rapportent; de plus la nor-

male à cette section n'étant autre chose que la tangente à la corde, si l'on appelle s l'arc qui aboutit au point M, il faudra prendre, dans ces mêmes intégrales :

$$\alpha = -\frac{dx}{ds}, \quad \beta = -\frac{dy}{ds}, \quad \gamma = -\frac{dz}{ds};$$

d'où il résulte que l'intégrale relative à ω contenue dans le second membre de la première équation (5), par exemple, sera

$$-\left(P_1 \frac{dz}{ds} + P_2 \frac{dy}{ds} + P_3 \frac{dx}{ds}\right)\omega.$$

En désignant par les mêmes lettres accentuées, ce que deviennent les forces P_1, P_2, P_3, les variables x, y, z, s, et l'aire ω, relativement à l'autre section extrême de la portion de corde que nous considérons; en observant de plus, que les normales aux deux sections extrêmes sont toutes deux extérieures par rapport à cette portion de corde, et, par conséquent, dirigées en sens contraires, on aura

$$\left(P'_1 \frac{dz'}{ds'} + P'_2 \frac{dy'}{ds'} + P'_3 \frac{dx'}{ds'}\right)\omega',$$

pour la partie de l'intégrale contenue dans la première équation (5), qui répond à la section ω'. Cela étant, la première équation (5) deviendra

$$\int X\,dm = \left(P'_1 \frac{dz'}{ds'} + P'_2 \frac{dy'}{ds'} + P'_3 \frac{dx'}{ds'}\right)\omega'$$
$$- \left(P_1 \frac{dz}{ds} + P_2 \frac{dy}{ds} + P_3 \frac{dx}{ds}\right)\omega;$$

l'intégrale qui forme son premier membre s'étendant à toute la portion de corde dont la longueur est $s' - s$.

Rendons maintenant cette longueur infiniment petite et égale à ds, ce qui réduira l'intégrale $\int X\,dm$ à un seul élément, et cette équation à

$$X\,dm = d.P_1\omega\frac{dz}{ds} + d.P_2\omega\frac{dy}{ds} + d.P_3\omega\frac{dx}{ds}.$$

On trouvera de même ce que deviennent, dans cette hypothèse, les deux autres formules (5). Si l'on appelle ρ la densité de la matière de la corde au point M, l'élément de sa masse sera

$$dm = \rho\omega\,ds;$$

et les trois équations (5) seront remplacées par celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} X\rho\omega &= \frac{d.P_1\omega\frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{d.P_2\omega\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{d.P_3\omega\frac{dx}{ds}}{ds}, \\ Y\rho\omega &= \frac{d.Q_1\omega\frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{d.Q_2\omega\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{d.Q_3\omega\frac{dx}{ds}}{ds}, \\ Z\rho\omega &= \frac{d.R_1\omega\frac{dz}{ds}}{ds} + \frac{d.R_2\omega\frac{dy}{ds}}{ds} + \frac{d.R_3\omega\frac{dx}{ds}}{ds}. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Les forces X_1, Y_1, Z_1, ayant été supposées nulles, les équations (4) du n° 10 se réduiront à

$$\begin{aligned} P_1c'' + P_2c' + P_3c &= 0, \\ Q_1c'' + Q_2c' + Q_3c &= 0, \\ R_1c'' + R_2c' + R_3c &= 0. \end{aligned}$$

Les trois cosinus c, c', c'', qu'elles contiennent appartiennent à une normale quelconque de la corde, menée par le point M; on a donc l'équation de condition :

$$\frac{dz}{ds}c'' + \frac{dy}{ds}c' + \frac{dx}{ds}c = 0.$$

Si l'on s'en sert pour éliminer c, par exemple, et si l'on observe que chacun des deux autres cosinus c' et c'' pourra prendre une infinité de valeurs différentes, on en conclura qu'après l'élimination, leurs coefficients devront être séparément nuls dans chacune des trois équations précédentes; ce qui fournira six équations, savoir :

$$P_1\frac{dx}{ds} - P_3\frac{dz}{ds} = 0, \quad P_2\frac{dx}{ds} - P_3\frac{dy}{ds} = 0,$$

$$Q_1\frac{dx}{ds} - Q_3\frac{dz}{ds} = 0, \quad Q_2\frac{dx}{ds} - Q_3\frac{dy}{ds} = 0,$$

$$R_1\frac{dx}{ds} - R_3\frac{dz}{ds} = 0, \quad R_2\frac{dx}{ds} - R_3\frac{dy}{ds} = 0.$$

D'ailleurs, à cause de $K = 0$, nous avons déja remarqué (nº 7) qu'on a

$$Q_3 = P_2, \quad R_2 = Q_1, \quad R_3 = P_1.$$

Voilà donc neuf équations entre les neuf inconnues P_1, Q_1, etc.; mais l'une d'elles est une suite des autres; et elles ne peuvent servir à déterminer que huit inconnues, ou, ce qui revient au même, les neuf quantités P_1, Q_1, etc., au moyen d'une nouvelle inconnue. On y satisfait effectivement en prenant

$$R_3 = P_1 = T\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds}, \quad Q_3 = P_2 = T\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds}, \quad R_2 = Q_1 = T\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds},$$

$$P_3 = T\frac{dx^2}{ds^2}, \qquad Q_2 = T\frac{dy^2}{ds^2}, \qquad R_1 = T\frac{dz^2}{ds^2};$$

T étant cette nouvelle inconnue qui reste indéterminée.

En observant que $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$, on conclut de

ces résultats :

$$\left.\begin{array}{l} P_1\frac{dz}{ds}+P_2\frac{dy}{ds}+P_3\frac{dx}{ds}=T\frac{dx}{ds}, \\ Q_1\frac{dz}{ds}+Q_2\frac{dy}{ds}+Q_3\frac{dx}{ds}=T\frac{dy}{ds}, \\ R_1\frac{dz}{ds}+R_2\frac{dy}{ds}+R_3\frac{dx}{ds}=T\frac{dz}{ds}; \end{array}\right\} \quad (2)$$

ce qui change les équations (1) en celles-ci :

$$X\rho\omega=\frac{d.T\omega\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad Y\rho\omega=\frac{d.T\omega\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad Z\rho\omega=\frac{d.T\omega\frac{dz}{ds}}{ds}, \quad (3)$$

entre lesquelles il ne restera plus qu'à éliminer T pour avoir les deux équations de la courbe formée par la corde en équilibre.

(24) Ces dernières formules sont, en effet, les équations connues de l'équilibre d'un fil parfaitement flexible, dont tous les points sont sollicités par des forces données X, Y, Z, parallèles aux axes des x, y, z, et données en fonctions de ces trois variables. Les déplacements relatifs des points de la corde, produits par ces forces, sont supposés très-petits; les changements qui peuvent en résulter dans les valeurs de ρ et ω le seront donc également; on pourra en conséquence employer ces valeurs telles qu'elles ont lieu dans l'état naturel de la corde, et regarder ρ et ω comme des fonctions de s aussi données. Si la corde est homogène, ρ sera une constante, et il en sera de même à l'égard de ω lorsque la corde aura partout la même épaisseur.

En multipliant les équations (3) par dx, dy, dz, les ajoutant ensuite, et observant que

$$\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds}=0,$$

nous aurons

$$(\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz)\rho\omega=d.\mathrm{T}\omega.$$

Ces équations donnent aussi

$$\left(\mathrm{X}d.\frac{dy}{ds}-\mathrm{Y}d.\frac{dx}{ds}\right)\rho\omega=\left(\frac{dx}{ds}d.\frac{dy}{ds}-\frac{dy}{ds}d.\frac{dx}{ds}\right)\frac{d.\mathrm{T}\omega}{ds},$$

$$\left(\mathrm{X}d.\frac{dz}{ds}-\mathrm{Z}d.\frac{dx}{ds}\right)\rho\omega=\left(\frac{dx}{ds}d.\frac{dz}{ds}-\frac{dz}{ds}d.\frac{dx}{ds}\right)\frac{d.\mathrm{T}\omega}{ds};$$

et en substituant dans celles-ci, à la place de $d.\mathrm{T}\omega$, sa valeur précédente, on aura les deux équations différentielles secondes de la courbe formée par la corde en équilibre. L'équation précédente fera connaître la valeur de T. Si les quantités ρ et ω sont constantes, et que la formule $\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy+\mathrm{Z}dz$ soit la différentielle d'une fonction donnée des x, y, z, on aura

$$\mathrm{T}=\rho f(x,y,z)+c,$$

en désignant par $f(x,y,z)$ cette fonction, et par c une constante arbitraire. Les intégrales complètes de ces trois équations comporteront cinq constantes arbitraires, que l'on déterminera d'après les diverses conditions relatives aux points extrêmes de la corde.

(25) En vertu des formules (2) du n° 7, les premiers membres des équations (2) que nous venons de former sont les composantes parallèles aux axes des x, y, z, de l'action moléculaire exercée par une portion de la corde sur la portion contiguë, leur surface de séparation étant normale à la corde; d'après ces équations, leur résultante sera donc égale à T,

perpendiculaire à cette surface, ou tangente à la corde, et dirigée de dehors en dedans par rapport à la portion de corde qui reçoit son action. Elle est ici rapportée à l'unité de surface; par conséquent sa valeur pour la section entière de la corde sera $T\omega$. Cette force $T\omega$, prise en sens contraire de sa direction, est ce qu'on appelle ordinairement la *tension* de la corde en chacun de ses points.

Pour la comparer à l'extension ou à la contraction qu'elle produit, selon qu'elle est positive ou négative, prenons un point M′ très-voisin de M, dont les coordonnées primitives soient $x+x'$, $y+y'$, $z+z'$; désignons par σ la distance primitive de M′ à M; et supposons qu'après le déplacement de ces deux points, leur distance devienne $\sigma+\sigma\delta$, de sorte que δ soit la dilatation de la ligne MM′. En représentant comme dans le § I[er], par u, v, w, les déplacements du point M, et par u', v', w', ceux du point M′; négligeant les carrés et les produits de $u'-u$, $v'-v$, $w'-v$, ainsi que le carré de δ, on aura

$$\sigma\delta=(u'-u)\frac{x'}{\sigma}+(v'-v)\frac{y'}{\sigma}+(w'-v)\frac{z'}{\sigma};$$

si l'on néglige de même les carrés et les produits de x', y', z', on aura en même temps

$$u'-u=\frac{du}{dx}x'+\frac{du}{dy}y'+\frac{du}{dz}z',$$

$$v'-v=\frac{dv}{dx}x'+\frac{dv}{dy}y'+\frac{dv}{dz}z',$$

$$w'-w=\frac{dw}{dx}x'+\frac{dw}{dy}y'+\frac{dw}{dz}z';$$

enfin, si l'on suppose que la distance σ devienne infiniment

petite, et que l'on regarde les deux points M et M′ comme appartenant à la tangente à la corde, menée par le point M, il en résultera

$$\frac{x'}{\sigma}=\frac{dx}{ds}, \quad \frac{y'}{\sigma}=\frac{dy}{ds}, \quad \frac{z'}{\sigma}=\frac{dz}{ds};$$

par conséquent nous aurons

$$\delta=\frac{du}{dx}\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dv}{dy}\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dw}{dz}\frac{dz^2}{ds^2}$$
$$+\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\frac{dxdy}{ds^2}+\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\frac{dxdz}{ds^2}+\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\frac{dydz}{ds^2}.$$

Mais d'après les formules du n° 7, et les résultats du n° 23, nous avons

$$P_2=T\frac{dydx}{ds^2}=-k\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right),$$
$$P_1=T\frac{dxdz}{ds^2}=-k\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right),$$
$$Q_1=T\frac{dydz}{ds^2}=-k\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right);$$

ce qui change d'abord la formule précédente en celle-ci :

$$k\delta=k\left(\frac{du}{dx}\frac{dx^2}{ds^2}+\frac{dv}{dy}\frac{dy^2}{ds^2}+\frac{dw}{dz}\frac{dz^2}{ds^2}\right)-T\left(\frac{dx^2dy^2+dx^2dz^2+dy^2dz^2}{ds^2}\right).$$

Nous avons de plus

$$P_3=T\frac{dx^2}{ds^2}=-k\left(3\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$
$$Q_2=T\frac{dy^2}{ds^2}=-k\left(\frac{du}{dx}+3\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$
$$R_1=T\frac{dz^2}{ds^2}=-k\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+3\frac{dw}{dz}\right);$$

d'où je tire les valeurs de $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dy}$, $\frac{dw}{dz}$, pour les substituer

dans celle de $k\delta$: toutes réductions faites, il vient

$$\delta = -\frac{2T}{5k}. \qquad (4)$$

Cette quantité δ est la dilatation de l'élément ds de la corde qui a lieu au point quelconque M en vertu de la force T ; sa valeur est de signe contraire à T, ce qui est dû à ce que cette force tangentielle agit de dehors en dedans de cet élément.

(26) Lorsque la corde sera homogène et d'une épaisseur constante, et que les forces X, Y, Z, seront nulles, la tension sera constante dans toute sa longueur, et par conséquent aussi la dilatation δ, laquelle sera égale à l'allongement total de la corde, divisé par sa longueur entière. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'une corde attachée par une extrémité à un point fixe, tandis qu'un poids donné ϖ est appliqué à son autre extrémité, et tient la corde dans une direction verticale; négligeons son propre poids par rapport à ϖ; appelons l sa longueur primitive, et α son allongement, de sorte qu'on ait $\alpha = l\delta$. Si l'on considère une portion quelconque de la corde aboutissante à son extrémité inférieure, on voit qu'elle est soumise à deux forces ϖ et $T'\omega$ qui agissent à ses deux bouts, et sont dirigées l'une et l'autre dans le sens de la pesanteur ; il faudra donc qu'on ait pour son équilibre :

$$T\omega + \varpi = 0;$$

et de là et de l'équation (4), on déduit

$$\alpha = \frac{2l\varpi}{5k\omega}.$$

Ainsi, l'allongement α est proportionnel, toutes choses d'ailleurs égales, au poids ϖ qui l'a produit, pourvu toute-

fois que ce poids ne soit pas assez grand pour changer notablement l'épaisseur de la corde, ou pour altérer son élasticité d'où dépend la quantité k. L'observation de cet allongement est le moyen le plus propre à déterminer par l'expérience, la valeur de la quantité k relative à la matière et à la température de la corde. Pour plus d'exactitude, si l'on veut avoir égard à son poids, il faudra augmenter le poids ϖ, dans la formule précédente, de la moitié du poids de la corde.

(27) Quand les extrémités de la corde ne sont pas fixement attachées, elles sont, en général, soumises à des forces données qui devront faire équilibre aux tensions extrêmes. Nous représenterons leurs composantes parallèles aux axes des $x, y, z,$ par A, B, C, à l'un des bouts de la corde, et par A', B', C', à l'autre bout. Pour fixer les idées, nous supposerons que l'arc s soit compté à partir de la première extrémité, qui répondra alors à $s=0$, et la seconde extrémité à $s=l$, l étant toujours la longueur de la corde entière. L'élément de la corde adjacent à cette seconde extrémité, sera poussé à l'un de ses deux bouts par la force tangentielle $T\omega$, et tiré à l'autre bout par la résultante des forces A', B', C'; par conséquent, on aura, pour l'équilibre de ces forces, ces trois équations :

$$A'+T\omega\frac{dx}{ds}=0, \quad B'+T\omega\frac{dy}{ds}=0, \quad C'+T\omega\frac{dz}{ds}=0,$$

dans lesquelles on fera $s=l$. En considérant de même l'élément adjacent à l'autre extrémité, on obtiendra ces trois autres équations :

$$A-T\omega\frac{dx}{ds}=0, \quad B-T\omega\frac{dy}{ds}=0, \quad C-T\omega\frac{dz}{ds}=0,$$

qui auront lieu pour $s=0$. Lorsque l'un des bouts de la

corde, par exemple, celui qui répond à $s=0$, sera attaché fixement, les forces A, B, C, ne seront plus données ; mais ces dernières équations en feront connaître les valeurs; et une force égale et contraire à leur résultante exprimera la pression que le point d'attache aura à supporter. Dans tous les cas, ces six équations, ou, à leur place, les positions données des points extrêmes de la corde quand ils seront fixes, et sa longueur aussi donnée, seront les conditions qui serviront à déterminer les constantes arbitraires dont il a été question dans le n° 24.

Il est facile de déduire des équations (3) et des précédentes, les six équations connues auxquelles doivent satisfaire toutes les forces appliquées à la corde, pour qu'elle ne prenne aucun mouvement de translation ou de rotation commun à tous ses points. Cette déduction ne présentant aucune difficulté, nous croyons inutile de nous y arrêter.

(28) Si la corde n'est pas en équilibre, on formera les équations de son mouvement en remplaçant dans les équations (3), les forces X, Y, Z, par

$$X-\frac{d^2 u}{dt^2},\quad Y-\frac{d^2 v}{dt^2},\quad Z-\frac{d^2 w}{dt^2};$$

u, v, w, étant les déplacements du point quelconque M au bout du temps t. Nous nous bornerons à considérer le cas où la corde, pendant toute la durée du mouvement, s'écarte très-peu d'une droite qui sera l'axe des x : on négligera en conséquence les carrés de $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$; d'où il résultera $ds=dx$. Les coordonnées y et z de la courbe que la corde formera au bout du temps t, exprimeront les petits déplacements v et w du point M; et les quantités u, y, z, seront les trois inconnues

qu'il s'agira de déterminer en fonctions de x et de t. Mais pour simplifier la question encore davantage, nous supposerons que la corde soit homogène et d'une épaisseur constante, ce qui rendra ρ et ω constantes, et qu'elle ne soit soumise à aucune force donnée, ce qui rendra nulles X, Y, Z.

Cela posé, les équations du mouvement déduites des équations (3), seront :

$$\rho\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{d\mathrm{T}}{dx}=0,$$

$$\rho\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d\mathrm{T}}{dx}\frac{dy}{dx}+\mathrm{T}\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

$$\rho\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{d\mathrm{T}}{dx}\frac{dz}{dx}+\mathrm{T}\frac{d^2z}{dx^2}=0.$$

De plus l'élément dx devenant $dx+du$ au bout du temps t, sa dilatation sera $\frac{du}{dx}$; et comme il remplace l'élément ds de la courbe, on aura, d'après le n° 25,

$$\delta=\frac{du}{dx},\quad \mathrm{T}=-\frac{5k}{2}\frac{du}{dx}.$$

Pour plus de clarté, je distinguerai deux parties dans le déplacement u du point M. Je supposerai qu'on ait d'abord fait éprouver à la corde une tension constante, qui ait produit un allongement α; la partie correspondante de u sera $\frac{\alpha x}{l}$, l étant, comme plus haut, la longueur primitive de la corde, et la variable x ayant pour origine une de ses extrémités. Dans cet état, on fixe les deux bouts de la corde, puis on la met en mouvement d'une manière quelconque. Il en résultera pour le point M, un nouveau déplacement qui sera une fonction inconnue de x et t, et que je représenterai par θ; les valeurs

complètes de u et T seront alors :

$$u=\frac{\alpha x}{l}+\theta,\quad T=-\frac{5k\alpha}{2l}-\frac{5k}{2}\frac{d\theta}{dx};$$

mais nous supposerons que le second terme de T soit constamment très-petit par rapport au premier; et après avoir substitué cette valeur de T dans les équations du mouvement, nous négligerons les termes qui dépendront à la fois de θ et de y ou z. De cette manière, ces équations deviendront

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=a^2\frac{d^2\theta}{dt^2},\quad \frac{d^2y}{dt^2}=b^2\frac{d^2y}{dx^2},\quad \frac{d^2z}{dt^2}=b^2\frac{d^2z}{dx^2},\quad (5)$$

en faisant, pour abréger

$$\frac{5k}{2\rho}=a^2,\quad \frac{a^2\alpha}{l}=b^2.$$

Si l'on représente par g la gravité, par p le poids de la corde entière, et, comme dans le n° 25, par ϖ le poids qui a produit l'allongement α, on aura

$$p=g\rho\omega l,\quad \frac{5k\alpha}{2l}=\frac{\varpi}{\omega};$$

d'où l'on conclut

$$b^2=\frac{gl\varpi}{p};$$

expression qui ne contient plus que les données les plus simples de chaque cas particulier.

(29) La solution du problème des *cordes vibrantes* est comprise dans les équations (5), auxquelles il faut joindre les équations relatives aux deux extrémités. Comme on les a supposées fixes et qu'on a pris l'une d'elles pour l'origine de la variable x, on aura

$$\theta = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

pour $x = 0$ et $x = l$, et pour toutes les valeurs de t. Les vibrations *longitudinales* se détermineront au moyen de la première équation (5), et les *transversales* au moyen des deux autres; ces trois équations ayant la même forme, on en conclut immédiatement que ces deux genres de mouvement de la corde suivront les mêmes lois : leur détermination est d'ailleurs assez connue pour qu'il nous suffise de la rappeler en peu de mots.

L'intégrale complète de la première équation (5) est

$$\theta = f(x + at) + \mathrm{F}(x - at); \qquad (6)$$

f et F désignant les deux fonctions arbitraires. A l'origine du mouvement, le déplacement θ et la vitesse $\frac{d\theta}{dt}$ sont donnés pour toute la longueur de la corde; si l'on compte le temps t à partir de cette époque, fx et $\mathrm{F}x$ seront donc aussi données depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$. En vertu des conditions relatives aux extrémités de la corde, on aura de plus

$$f(at) + \mathrm{F}(-at) = 0, \quad f(l + at) + \mathrm{F}(l - at) = 0, \quad (7)$$

depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \infty$, c'est-à-dire, pour toutes les valeurs positives de at, en regardant la constante a comme positive; et d'après ces équations, il est facile de voir que fx et $\mathrm{F}x$ seront connues pour toutes les valeurs positives ou négatives de x, au moyen des valeurs données de ces fonctions depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$. Ainsi, par exemple, les valeurs de $\mathrm{F}x$ depuis $x = 0$ jusqu'à $x = -l$, seront égales et de signes contraires aux valeurs de fx depuis $x = 0$ jusqu'à

$x=l$; les valeurs de fx depuis $x=l$ jusqu'à $x=2l$, seront égales et de signes contraires à celles de Fx depuis $x=l$ jusqu'à $x=0$; et ainsi des autres. La quantité θ sera donc connue, au moyen de la formule (6), pour tous les instants et pour tous les points de la corde; ce qui est la solution complète du problème.

Cette valeur pourra s'exprimer au moyen de la seule fonction f; car en mettant $at+l-x$ à la place de at dans la seconde équation (7), il vient

$$F(x-at)=-f(2l-x+at);$$

ce qui change la formule (6) en celle-ci :

$$\theta=f(x+at)-f(2l-x+at).$$

En mettant $at+l$ à la place de at dans la seconde équation (7), et la retranchant ensuite de la première, on a

$$f(2l+at)=f(at);$$

d'où l'on conclut que la fonction f reprend la même valeur toutes les fois que la variable augmente de $2l$. La quantité θ redeviendra donc aussi la même toutes les fois que at augmentera de $2l$; par conséquent la corde reviendra au même état au bout de chaque intervalle de temps égal à $\frac{2l}{a}$; en sorte qu'elle exécutera une série de vibrations isochrones et semblables, et que $\frac{2l}{a}$ sera la durée de chaque vibration entière.

Si l'on appelle n le nombre de ces vibrations qui ont lieu dans l'unité de temps, on aura

$$n=\frac{a}{2l}=\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{5k}{2\rho}}.$$

Le son mesuré par ce nombre ne dépend donc que de la matière et de la longueur de la corde; il est indépendant de son état initial, de son épaisseur et de la tension qu'on lui a fait subir, en supposant toutefois que cette tension ne soit pas assez considérable pour altérer l'élasticité propre de la corde, et, par suite, faire varier la quantité k. L'expérience paraît indiquer que le son longitudinal d'une corde tendue augmente un peu avec la tension; mais cela peut tenir à l'allongement qu'elle éprouve, et qui est toujours accompagné d'une diminution de densité, ainsi qu'on le verra dans la suite de ce Mémoire (nº 35). Le poids qui tend la corde venant à augmenter, la corde s'allonge; on lui conserve sa longueur primitive entre les deux points fixes qui la terminent; mais son épaisseur est un peu diminuée, et aussi sa densité ρ; et de cette petite diminution de ρ, il doit résulter une augmentation de n, ou une élévation du son.

(30) Le nombre de vibrations transversales se déduira de celui des longitudinales, en y remplaçant le coefficient a de la première équation (5), par le coefficient b des deux autres. En l'appelant n', on aura donc, quel que soit l'état initial de la corde :

$$n' = \frac{b}{2l} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g\varpi}{lp}};$$

résultat connu et vérifié par l'expérience, il y a déja longtemps. Mais à cause de $b = a\sqrt{\frac{\alpha}{l}}$, on a aussi

$$\frac{n'}{n} = \sqrt{\frac{\alpha}{l}};$$

et ce rapport fort simple entre les nombres des deux sortes de vibrations d'une même corde, n'avait pas encore été re-

marqué. Il serait à désirer qu'il fût confirmé par l'observation; voici déja une expérience de M. Cagniard-Latour qui s'accorde avec cette formule.

La longueur de la corde était de près de 15 mètres; on avait exactement $l = 14^m,8$; l'observation a donné $\frac{n}{n'} = \frac{188}{7}$; d'après la formule précédente, on devait donc avoir

$$\alpha = l\sqrt{\frac{n'}{n}} = 0^m,052,$$

pour l'allongement produit par le poids qui tendait la corde; or, en le mesurant, on a trouvé $\alpha = 0^m,05$, ce qui ne diffère que d'un vingt-cinquième de l'allongement calculé.

Les valeurs précédentes des nombres n et n' répondent aux vibrations les plus lentes, soit longitudinales, soit transversales que la même corde puisse exécuter, ou aux sons les plus graves qu'elle puisse faire entendre; on sait d'ailleurs que chaque vibration de l'une ou l'autre espèce, se décompose en un nombre quelconque de vibrations égales, lorsque la corde, dans son état initial, est divisée en un pareil nombre de parties symétriques : cela se déduit de l'intégrale sous forme finie dont nous venons de faire usage, ou encore plus simplement, de l'intégrale exprimée en série de sinus et de cosinus. En effet, chaque terme de cette expression, assujétie aux conditions relatives aux points extrêmes, est de la forme :

$$\left(A\cos.\frac{i\pi at}{l} + B\sin.\frac{i\pi at}{l}\right)\sin.\frac{i\pi x}{l};$$

i étant un nombre entier qui marque le rang de ce terme, et A et B désignant des coefficients constants qui dépendent de i et de l'état initial de la corde. Si donc cet état est tel qu'il

ne reste que des termes pour lesquels i soit un multiple d'un autre nombre entier m, la corde reviendra au même état au bout de chaque intervalle de temps égal à $\frac{2l}{ma}$, qui sera la durée de ses vibrations semblables et isochrones. Dans ce cas, les $m-1$ points de la corde qui répondent à $x=\frac{l}{m}, =\frac{2l}{m}$, etc., formeront des *nœuds* de vibrations, c'est-à-dire, qu'ils seront immobiles comme ses deux points extrêmes pendant toute la durée du mouvement.

(31) Si la corde s'étend indéfiniment, et que cependant son ébranlement longitudinal soit d'abord compris dans une étendue limitée, l'équation (6) servira à déterminer la propagation de cet ébranlement dans toute la longueur de la corde. Supposons qu'à l'origine du mouvement, ou quand $t=0$, les quantités θ et $\frac{d\theta}{dt}$ avaient des valeurs données arbitrairement depuis $x=-\varepsilon$ jusqu'à $x=\varepsilon$, et étaient nulles pour toute autre valeur de x. Il en sera de même à l'égard des fonctions fx et $\mathrm{F}x$, et il en résultera

$$f(x+at)=0, \quad \mathrm{F}(x-at)=0,$$

pour toute valeur de $x+at$ ou de $x-at$, non comprise entre les limites $\pm\varepsilon$. Le point M qui répond à la variable x plus grande que ε, abstraction faite du signe, commencera donc à s'ébranler, quand

$$t=\frac{\pm x \pm \varepsilon}{a},$$

et son mouvement cessera lorsque

$$t=\frac{\pm x \mp \varepsilon}{a},$$

en prenant les signes supérieurs ou inférieurs selon que x sera positive ou négative. Ainsi, le mouvement se propagera avec une vitesse constante, indépendante de l'ébranlement primitif, et égale à a; sa durée sera la même et égale à $\frac{2\varepsilon}{a}$, pour tous les points de la corde; mais il pourra être différent des deux côtés de son origine. Du côté des x positives, on aura

$$\theta = \mathrm{F}(x - at),$$

et de l'autre côté,

$$\theta = f(a + at),$$

la distance x étant toujours supposée plus grande que ε. On en conclut

$$\frac{d\theta}{dt} = -a\frac{d\theta}{dx}, \quad \frac{d\theta}{dt} = a\frac{d\theta}{dx};$$

et comme $\frac{d\theta}{dx}$ exprime la dilatation de la corde au point M, cela signifie qu'en dehors de l'ébranlement primitif, la vitesse en un point quelconque pour s'éloigner du lieu de cet ébranlement, est égale et de signe contraire à la vitesse de la propagation, multipliée par la dilatation qui a lieu au même point et au même instant.

Ces lois sont celles de la propagation du son dans l'air, et la constante a est la vitesse du son dans une fibre de la matière dont la corde est formée. On pourra aussi la prendre pour la vitesse du son dans une barre, d'une très-grande longueur, et dont les autres dimensions sont très-petites; mais il y a entre la propagation du son dans les corps solides et sa propagation dans l'air, une différence essentielle qui n'avait pas encore été remarquée. On sait que la vitesse du

son est la même, soit qu'il se propage en tous sens dans une masse d'air indéfinie, soit qu'il se propage suivant une colonne d'air contenue dans un canal; au contraire, cette vitesse est différente dans un corps solide et dans une barre de la même matière dont la surface est entièrement libre : dans un corps solide, elle serait, d'après le n° 17, égale à $\sqrt{\frac{3k}{\rho}}$, et dans la barre elle a pour valeur $\sqrt{\frac{5k}{2\rho}}$, c'est-à-dire, qu'elle est moindre que la première dans le rapport de $\sqrt{\frac{5}{6}}$ à l'unité. La vitesse a qui a lieu dans une barre se conclura immédiatement du son ou du nombre de vibrations longitudinales d'une corde de même matière, puisqu'on a, d'après le n° précédent, $a = 2nl$, n étant ce nombre et l la longueur de la corde. On l'obtiendra aussi en déterminant, comme dans le n° 26, la quantité k dont elle dépend, au moyen de l'allongement dû à un poids donné.

Observons enfin que, si le rapport qui s'établit entre $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dx}$ de chaque côté de l'ébranlement primitif, existait à l'origine du mouvement, la propagation n'aurait lieu que d'un seul côté. Si l'on avait, par exemple, $\frac{d\theta}{dt} = a\frac{d\theta}{dx}$; quand $t = 0$, l'équation (6) donnerait

$$a\left(\frac{dfx}{dx} - \frac{d\text{F}x}{dx}\right) = a\left(\frac{d\text{F}x}{dx} + \frac{d\text{F}x}{dx}\right), \text{ ou } \frac{d\text{F}x}{dx} = 0\,;$$

la vitesse du point M, déduite de l'équation $\theta = \text{F}(x - at)$, serait donc constamment nulle pour toute valeur de x positive et $> \varepsilon$; et le mouvement ne se propagerait que du côté des x négatives, en vertu de l'équation $\theta = f(x + at)$. Le con-

traire aurait lieu si l'on avait primitivement $\frac{d\theta}{dt} = -a\frac{d\theta}{dx}$. C'est, comme on sait, d'après cette remarque qu'Euler et Lagrange ont expliqué comment les ondes successives ne se décomposent pas chacune en deux autres, ainsi que cela arrive, en général, à l'égard de l'onde primitive.

§ IV.

Equations de l'équilibre et du mouvement d'une verge élastique.

(32) Dans ce paragraphe, nous allons considérer une verge élastique proprement dite, qui tend à revenir à sa forme naturelle quand on l'en a écartée en la faisant fléchir, et capable de vibrer transversalement sans avoir besoin, comme une simple corde, d'être tendue suivant sa longueur. Cette verge sera homogène et partout à la même température; dans son état naturel, nous supposerons qu'elle soit un cylindre droit à base circulaire; et quoique le rayon de sa base soit très-petit, nous aurons maintenant égard, dans chaque section perpendiculaire à l'axe, aux petites variations des forces moléculaires et du mouvement des points de la verge, circonstances dont on fait abstraction dans le cas d'une corde élastique.

Soit M un point appartenant à l'axe de ce cylindre, dont x soit l'abscisse primitive, comptée sur cette droite. Après le changement de forme de la verge, désignons par $x+u$ l'abscisse de M, et par y et z, ses deux autres coordonnées, perpendiculaires à l'axe des x, de manière que $u, y, z,$ soient

de très-petites quantités qui expriment les déplacements du point M. Ces trois variables seront des fonctions de x; et les valeurs de y et z feront connaître la courbe à double courbure, formée par l'axe de la verge après son changement de forme. Appelons M′ un autre point de la verge, situé primitivement dans la section normale à l'axe des x, qui passe par le point M; son abscisse primitive sera x; nous désignerons par η et ζ, ses deux autres coordonnées primitives, respectivement parallèles aux axes des y et z, et par $x+u'$, $\eta+v'$, $\zeta+w'$, ses trois coordonnées subséquentes, de sorte que u', v', w', soient des fonctions de x, η, ζ, qui expriment les petits déplacements de M′, parallèlement aux axes des x, y, z. Dans le cas de $\eta=0$, $\zeta=0$, le point M′ sera le même que M, et l'on aura $u'=u$, $v'=y$, $w'=z$. Relativement à ce point M′, et à cause de $K=0$, les forces P_1, P_2, etc., du n° 7, auront pour expressions :

$$\left.\begin{aligned}
R_3=P_1&=-k\left(\frac{du'}{d\zeta}+\frac{dw'}{dx}\right),\\
Q_3=P_2&=-k\left(\frac{du'}{d\eta}+\frac{dv'}{dx}\right),\\
R_2=Q_1&=-k\left(\frac{dv'}{d\zeta}+\frac{dw'}{d\eta}\right),\\
P_3&=-k\left(3\frac{du'}{dx}+\frac{dv'}{d\eta}+\frac{dw'}{d\zeta}\right),\\
Q_2&=-k\left(\frac{du'}{dx}+3\frac{dv'}{d\eta}+\frac{dw'}{d\zeta}\right),\\
R_1&=-k\left(\frac{du'}{dx}+\frac{dv'}{d\eta}+3\frac{dw'}{d\zeta}\right);
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

et les équations (3) du n° 8 seront :

$$\left.\begin{aligned} X'\rho-\frac{dP_1}{d\zeta}-\frac{dP_2}{dy}-\frac{dP_3}{dx}&=0,\\ Y'\rho-\frac{dQ_1}{d\zeta}-\frac{dQ_2}{d\eta}-\frac{dP_2}{dx}&=0,\\ Z'\rho-\frac{dR_1}{d\zeta}-\frac{dQ_1}{d\eta}-\frac{dP_1}{dx}&=0;\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

X', Y', Z', désignant les trois composantes parallèles aux x, y, z, de la force donnée qui agit en M'.

Soit encore r la distance primitive du point M' à M, et θ l'angle compris entre la droite MM' et une parallèle à l'axe des y, menée par le point M, de manière que l'on ait

$$\eta=r\cos.\theta,\quad \zeta=r\sin.\theta.$$

La droite MM' prolongée étant normale à la surface de la verge, pour appliquer à cette surface les équations (4) du n° 10, il y faudra faire

$$c=0,\quad c'=\cos.\theta,\quad c''=\sin.\theta;$$

et si l'on suppose qu'aucune force donnée n'agit à cette surface, ce qui rendra nulles les trois termes X_1, Y_1, Z_1, de ces équations, elles deviendront

$$\left.\begin{aligned} P_1\sin.\theta+P_2\cos.\theta&=0,\\ Q_1\sin.\theta+Q_2\cos.\theta&=0,\\ R_1\sin.\theta+Q_1\cos.\theta&=0.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

En appelant ε le rayon du cylindre, elles subsisteront pour $r=\varepsilon$, et pour toutes les valeurs de x et θ. Il y aura, en outre, des équations relatives aux extrémités de la verge, que nous formerons plus loin. Nous allons, pour plus de facilité, appliquer les formules précédentes, successivement au cas où

l'axe de la verge n'éprouve aucune flexion, et au cas où il se courbe sans éprouver une extension sensible : lorsque les deux mouvements de flexion et d'extension auront lieu à la fois, on réunira les valeurs de u', v', w', qui s'y rapportent, pour avoir les expressions complètes de ces trois inconnues.

(33) Dans le premier cas, on aura $y=0$, $z=0$, pour tous les points de l'axe de la verge, et il faudra que les forces normales Y′ et Z′ soient aussi nulles pour $r=0$ et pour toutes les valeurs de x. L'accroissement du rayon r du point M′ dû au changement de forme de la verge, devra également s'évanouir avec r; nous le représenterons par $r\varphi$; nous désignerons par ψ, l'accroissement de l'angle θ qui répond au même point; les variations v' et w' de ses coordonnées η et ζ, seront alors

$$v'=\eta\varphi-\zeta\psi, \quad w'=\eta\psi+\zeta\varphi,$$

en négligeant les carrés et les produits de ψ et φ. Ces deux inconnues seront, en général, des fonctions de x, r et θ; mais, pour simplifier la question, nous les supposerons indépendantes de l'angle θ; ce qui revient à dire que tous les points qui appartenaient primitivement à une même circonférence, ayant son centre dans l'axe et son plan perpendiculaire à cette droite, éprouveront des déplacements égaux, soit dans le sens de cette circonférence, soit dans les directions parallèle et normale à l'axe. Cela étant, on aura

$$\frac{du'}{d\eta}=\frac{du'}{dr}\frac{\eta}{r}, \quad \frac{du'}{d\zeta}=\frac{du'}{dr}\frac{\zeta}{r},$$

et de même pour les différences partielles de φ et ψ par rapport à η et ζ; au moyen de quoi l'on trouvera que les formules (1) deviennent :

$$P_1 = -k\left(\eta \frac{d\psi}{dx} + \zeta \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\zeta}{r}\frac{du'}{dr}\right),$$

$$P_2 = -k\left(\eta \frac{d\varphi}{dx} - \zeta \frac{d\psi}{dx} + \frac{\eta}{r}\frac{du'}{dr}\right),$$

$$Q_1 = -k\left(\frac{\eta^2 - \zeta^2}{r}\frac{d\psi}{dr} + \frac{\eta\zeta}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

$$P_3 = -k\left(3\frac{du'}{dx} + 2\varphi + r\frac{d\varphi}{dr}\right),$$

$$Q_2 = -k\left(\frac{du'}{dx} + 4\varphi + \frac{\zeta^2 + 3\eta^2}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{2\eta\zeta}{r}\frac{d\psi}{dr}\right),$$

$$R_1 = -k\left(\frac{du'}{dx} + 4\varphi + \frac{\eta^2 + 3\zeta^2}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{2\eta\zeta}{r}\frac{d\psi}{dr}\right).$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (3), elles se changent en celles-ci :

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\varphi}{dx} + \frac{1}{r}\frac{du'}{dr} = 0,\\ &\frac{du'}{dx} + 4\varphi + 3r\frac{d\varphi}{dr} = 0,\\ &\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr} = 0,\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

qui n'auront toujours lieu que pour $r = \varepsilon$.

Dans les équations (2), je remplace les forces normales Y' et Z' par une force dirigée suivant le prolongement du rayon r, et une force perpendiculaire à ce rayon et tendante à augmenter l'angle θ. Ces deux nouvelles composantes devant s'évanouir avec r, je représenterai la première par $r\Phi$, et la seconde par $r\Psi$, et il en résultera :

$$Y' = \eta\Phi - \zeta\Psi, \quad Z' = \eta\Psi + \zeta\Phi.$$

Au moyen de ces valeurs et de celles de P_1, P_2, etc., ces équa-

tions deviennent, toutes réductions faites :

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\rho}{k}X' + 3\frac{d^2u'}{dx^2} + \frac{d^2u'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du'}{dr} + 4\frac{d\varphi}{dx} + 2r\frac{d^2\varphi}{drdx} = 0,\\
&\frac{\rho}{k}\Phi + 3\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{9}{r}\frac{d\varphi}{dr} + \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2}{r}\frac{d^2u'}{drdx} = 0,\\
&\frac{\rho}{k}\Psi + \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{3}{r}\frac{d\psi}{dr} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

D'après l'hypothèse qu'on a faite sur le mode de déplacement des points de la verge, les forces données X', $r\Phi$, $r\Psi$, devront être des fonctions de x et r indépendantes de θ, comme les inconnues, u', φ, ψ.

(34) Jusqu'ici nous n'avons pas exprimé que le rayon de la verge cylindrique fût très-petit à l'égard de sa longueur. Dans cette hypothèse, si l'on développe les valeurs de u', φ, ψ, suivant les puissances de r, on aura généralement des séries très-convergentes. Il n'y aurait d'exception que si ces valeurs variaient beaucoup dans l'épaisseur de la verge, et qu'elles dussent contenir le rapport $\frac{r}{\varepsilon}$. C'est ce qui arriverait dans le cas du mouvement, si la verge exécutait, par exemple, des vibrations normales très-rapides, dont la durée dépendît de son épaisseur ε ; mais quoique ce genre de vibrations paraisse indiqué par l'expérience, nous ne nous en occuperons pas dans ce Mémoire : nous admettrons que les inconnues u', φ, ψ, varient très-peu avec le rayon r, et que leurs valeurs peuvent conséquemment se développer en séries convergentes suivant les puissances de cette variable. C'est sur la possibilité de ce développement que sont fondées essentiellement l'analyse suivante et les conséquences qui s'en déduisent.

Nous supposerons, en même temps, que les valeurs don-

nées de X′, Φ, Ψ, soient exprimées par des séries qui procèdent suivant les puissances entières et positives de r; les équations (5) devant subsister pour toutes les valeurs de cette variable, il sera nécessaire que les développements des inconnues u', φ, ψ, aient la même forme; c'est pourquoi, nous ferons

$$u' = u + rf + r^2 f' + \text{etc.},$$
$$\varphi = g + rg' + r^2 g'' + \text{etc.},$$
$$\psi = h + rh' + r^2 h'' + \text{etc.};$$

f, f', etc., g, g', etc., h, h', etc., étant des fonctions de x, qu'il s'agira de déterminer. Or, si l'on substitue ces séries avec celles qui représenteront X′, Φ, Ψ, dans les premiers membres des équations (5), et que l'on égale ensuite à zéro la somme des coefficients de chaque puissance de r, on obtiendra une série d'équations, qui étant jointes aux équations (4), feront connaître les valeurs, au moyen les unes des autres, d'autant de ces quantités f, g, h, f', etc., qu'on le jugera convenable; par conséquent les trois inconnues u', φ, ψ, seront déterminées à tel degré d'approximation qu'on voudra.

On remarquera d'abord que chacune des équations (5) renfermera un seul terme divisé par r, lequel proviendra du second terme de u', φ, ψ; en l'égalant à zéro, on aura

$$f = 0, \quad g' = 0, \quad h' = 0.$$

Si l'on considère ensuite les termes indépendants de r, et si l'on suppose qu'on ait

$$X' = X, \quad \Phi = p, \quad \Psi = q,$$

pour $r = 0$, il en résultera

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\rho}{k}X + 3\frac{d^2u}{dx^2} + 4f' + 4\frac{dg}{dx} = 0,\\
&\frac{\rho}{k}p + \frac{d^2g}{dx^2} + 24g'' + 4f' = 0,\\
&\frac{\rho}{k}q + \frac{d^2h}{dx^2} + 8h'' = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Les équations qui viendraient ensuite nous seraient inutiles, au degré d'approximation où il suffira de nous arrêter.

En substituant les valeurs de u', φ, ψ, dans les équations (4), faisant $r=\varepsilon$, et négligeant ensuite les termes de ces équations qui ont ε pour facteur, il vient :

$$\frac{dg}{dx} + 2f' = 0, \quad \frac{du}{dx} + 4g = 0, \quad h'' = 0;$$

d'où l'on tire

$$g = -\frac{1}{4}\frac{du}{dx}, \quad f' = \frac{1}{8}\frac{d^2u}{dx^2}.$$

Nous négligerons le carré de r dans les expressions de u', φ, ψ; et comme les coefficients de la première puissance sont zéro, nous aurons simplement

$$u' = u, \quad \varphi = g, \quad \psi = h,$$

c'est-à-dire qu'à ce degré d'approximation, le déplacement u' parallèle à l'axe, la dilatation φ dans le sens normal à cette droite, et l'angle de torsion ψ autour de cette même droite, seront les mêmes dans une même section de la verge perpendiculaire à son axe, et varieront seulement d'une section à une autre. La dilatation normale se déduira immédiatement de celle qui a lieu dans le sens de l'axe, au moyen de la formule :

$$\varphi = -\frac{1}{4}\frac{du}{dx}. \quad (7)$$

D'après les valeurs de g, h', f', la première et la troisième équations (6) deviendront

$$X + a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \quad \Psi + c^2 \frac{d^2 \psi}{dx^2} = 0, \qquad (8)$$

en remettant Ψ et ψ à la place de g et h, et faisant

$$\frac{5k}{2\rho} = a^2, \quad \frac{k}{\rho} = c^2.$$

Ces deux équations serviront à déterminer u et ψ; quant à la seconde équation (6), elle ferait connaître la valeur de g'', dont nous n'avons pas besoin.

(35) Les trois forces P_1, P_2, P_3, respectivement parallèles aux axes des z, y, x, et relatives à une section de la verge normale à son axe, auront pour valeurs :

$$P_1 = -k \frac{d\psi}{dx} \eta, \quad P_2 = -k \frac{d\psi}{dx} \zeta, \quad P_3 = -\frac{5k}{2} \frac{du}{dx}.$$

Cela résulte des formules du n° 33, en ayant égard aux deux premières équations (4), et négligeant toujours le carré de r, ce qui fait disparaître la quantité $r \frac{d\varphi}{dr}$.

L'expression de la force P_3 et la première équation (8) étant les mêmes que dans le cas de la corde élastique, les déplacements dans le sens longitudinal le seront aussi. L'équation (7) montre de plus que la dilatation longitudinale en un point quelconque, sera accompagnée d'une condensation normale, égale au quart de cette dilatation. Quand celle-ci changera de signe, et deviendra une condensation, l'autre changéra de même, et deviendra une dilatation. S'il s'agit, par exemple, d'une tige verticale, posée sur un plan horizontal, et chargée à son extrémité supérieure, d'un poids

qui la comprime également dans toute sa longueur, elle s'élargira en même temps. Si elle était cylindrique, elle conservera cette forme, et son rayon éprouvera une dilatation égale au quart de la compression de la hauteur; mais cela suppose qu'elle puisse se dilater librement à ses deux extrémités : quand elle sera assujétie de manière que les sections extrêmes, normales à son axe, ne puissent pas varier, la forme qu'elle devra prendre sera très-difficile à déterminer; la quantité que nous avons appelée φ ne pourra plus se développer en série convergente, ordonnée suivant les puissances de la variable r; et ce cas tombera dans l'exception que nous avons exclue au commencement de ce paragraphe (n° 32).

Lorsqu'une corde ou une verge élastique est attachée par une extrémité, et qu'on l'allonge en la tirant par l'autre bout, son diamètre diminuera en même temps. Si on appelle l et ε sa longueur et son rayon, dans l'état naturel, et si l'on suppose qu'ils deviennent $l(1+\delta)$ et $\varepsilon(1-6)$ après l'allongement, on aura, en vertu de la formule (7),

$$6=\frac{1}{4}\delta.$$

Le volume était primitivement $\pi\varepsilon^2 l$; il sera devenu

$$\pi\varepsilon^2 l\left(1-\frac{1}{4}\delta\right)^2(1+\delta),$$

ou simplement $\pi\varepsilon^2 l(1+\frac{1}{2}\delta)$, en ne conservant que la première puissance de δ; il aura donc augmenté dans le rapport de $1+\frac{1}{2}\delta$ à l'unité, et la densité aura diminué dans le même rapport. Ce fait intéressant de l'augmentation de volume des fils élastiques, par l'effet de leur allongement, a été observé

par M. Cagniard-Latour; et sur ce point, le calcul et l'observation s'accordent d'une manière remarquable, comme on peut le voir dans la note où j'ai rendu compte de son expérience (*).

(36) Dans le cas du mouvement, on remplacera dans la première équation (8), la force X par $X-\frac{d^2 u}{dx}$, le temps étant toujours représenté par t. A une extrémité libre de la verge, la force P_3 devra être nulle, ce qui exige qu'on ait $\frac{du}{dx}=0$; à une extrémité fixe, on aura $u=0$. On peut conclure de là que les vibrations longitudinales d'une verge élastique suivront les mêmes lois que celles de l'air dans un tube ouvert ou bouché à ses extrémités. En représentant par l la longueur de la verge, le nombre des vibrations les plus lentes qu'elle exécutera dans l'unité de temps, sera égal à $\frac{a}{2l}$, quand ses extrémités seront toutes deux fixes ou toutes deux libres; il sera double, ou égal à $\frac{a}{l}$, quand une extrémité sera fixe et l'autre libre. Lorsque la verge, dans son état initial, se divisera en un nombre quelconque de parties symétriques, chacune de ses vibrations se partagera en un pareil nombre de vibrations égales et d'égale durée, et les points de division de l'axe formeront des nœuds de vibrations, ou resteront immobiles pendant toute la durée du mouvement. Il serait inutile d'insister sur cet objet, dont il a déja été question à l'occasion des cordes élastiques. Mais il faut ajouter que, dans tous les cas, les vibrations longi-

---

(1) Annales de physique et de chimie, tome XXXVI, page 384.

tudinales seront accompagnées de vibrations normales de la même durée : en chacun de ses points la verge se renflera et s'amincira alternativement; les sections normales dans lesquelles ces mouvements n'auront pas lieu, seront déterminées par l'équation $\frac{du}{dx}=0$, résultante de la formule (7) ; elles différeront des nœuds de vibrations longitudinales qui répondent à $u=0$; et, au contraire, elles répondront aux points de la verge où les amplitudes de ces dernières vibrations sont les plus grandes. Tout cela se déduit sans difficulté de l'équation (7), qui convient à l'état de mouvement de la verge, aussi bien qu'à son état d'équilibre.

(37) La résultante des deux forces P_1 et P_2, dont on vient de donner les valeurs, sera perpendiculaire au rayon r du point M′ auquel elle répond, et comprise d'ailleurs dans le plan normal à l'axe de la verge. En la représentant par P, on aura

$$P=kr\frac{d\psi}{dx}.$$

La résultante de ces mêmes forces dans la section normale à la verge, sera nulle; mais la somme de leurs moments par rapport à son axe, ne sera pas égale à zéro; et si nous la désignons par μ, nous aurons

$$\mu=2\pi\int_0^\varepsilon Pr^2\,dr=\frac{1}{2}\pi k\varepsilon^4\frac{d\psi}{dx}.$$

Si une force donnée agit à l'un des bouts de la verge, dans un plan perpendiculaire à son axe, directement ou à l'extrémité d'un bras de levier, il faudra, pour l'équilibre en ce point, que son moment par rapport à l'axe soit égal à la va-

leur de μ qui répond à ce même point. Cette condition disparaîtra, et sera remplacée par l'équation $\psi = 0$ à l'extrémité de la verge où elle sera *encastrée* de manière qu'elle ne puisse pas tourner autour de son axe. C'est en joignant ces conditions relatives aux extrémités de la verge, à la seconde équation (8), commune à tous ses points, que l'on déterminera la torsion produite dans toute sa longueur par des forces données.

Supposons, par exemple, que la verge soit encastrée par un bout, et qu'on ait appliqué à son autre bout une force donnée dont nous représenterons le moment par E; comptons les distances x à partir de la première extrémité, et appelons l la longueur entière de la verge; nous aurons ces deux équations :

$$\psi = 0, \quad \frac{1}{2}\pi k \varepsilon^4 \frac{d\psi}{dx} = E,$$

la première ayant lieu pour $x = 0$ et la seconde pour $x = l$. Supposons, de plus, qu'aucune autre force n'agisse sur la verge. En faisant $\Psi = 0$ dans la seconde équation (8), intégrant et désignant par C et C′ les deux constantes arbitraires, on aura

$$\psi = Cx + C';$$

et si l'on détermine C et C′ au moyen des deux équations précédentes, il en résultera

$$\psi = \frac{2Ex}{\pi k \varepsilon^4}.$$

L'angle de torsion en chaque point de la verge est donc proportionnel à sa distance de l'extrémité fixe. A l'autre bout, cet angle est en raison directe du moment de la force qui produit la torsion et de la longueur de la verge, et en raison

inverse de la quatrième puissance de son diamètre, ce qui est effectivement conforme à l'expérience (*).

(38) La force $r\Psi$ agissant suivant l'arc de cercle $r\theta$ (n° 33), et ψ étant l'accroissement de l'angle θ, il faudra, dans le cas du mouvement, la remplacer par $r\Psi - r\frac{d^2\psi}{dt^2}$; si donc on suppose qu'aucune force donnée n'agisse sur les points de la verge, cela reviendra à faire

$$\Psi = -\frac{d^2\psi}{dt^2},$$

dans la seconde équation (8), ce qui la changera en celle-ci:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - c^2\frac{d^2\psi}{dx^2} = 0.$$

Aux extrémités de la verge, on aura en outre $\psi = 0$ ou $\frac{d\psi}{dt} = 0$, selon qu'elles seront fixes ou entièrement libres; or, ces équations ayant la même forme que celles d'où dépendent les vibrations longitudinales, on en conclut immédiatement que les vibrations *tournantes*, dues à la torsion de la verge, suivront les mêmes lois que les longitudinales, dont elles ne différeront que par la durée, et en ce qu'elles ne seront pas nécessairement accompagnées de vibrations normales.

Dans le cas d'une verge encastrée par un bout et libre à son autre extrémité, si l'on représente par n le nombre de vibrations longitudinales et par n' celui des vibrations tournantes qui ont lieu dans l'unité de temps, que l'on appelle toujours l la longueur de la verge, et que a et c soient les

---

(*) Traité de physique de M. Biot, tome I, page 495.

mêmes constantes que précédemment (nº 34), on aura

$$n=\frac{a}{l}, \quad n'=\frac{c}{l},$$

pour les plus graves des deux genres de sons de la même verge. Donc à cause de $a=c\sqrt{\frac{5}{2}}$, il en résultera

$$\frac{n}{n'}=\frac{1}{2}\sqrt{10}=1,5811;$$

ce qui montre que les sons d'une même verge cylindrique qui exécute successivement des vibrations tournantes et des vibrations longitudinales, sont dans un rapport indépendant de la longueur, du diamètre et de la matière de la verge. C'est ce que Chladni avait reconnu par l'expérience; mais, selon ce physicien, le son des vibrations tournantes serait constamment plus grave d'une *quinte* que celui des longitudinales, c'est-à-dire, que l'on aurait

$$\frac{n}{n'}=\frac{3}{2};$$

résultat un peu moindre que le précédent. M. Savart a aussi vérifié récemment la constance de ce rapport, pour lequel il a trouvé

$$\frac{n}{n'}=1,6668;$$

valeur qui surpasse un peu celle que donne la théorie. En prenant la moyenne entre ce résultat et celui de Chladni, on obtient une valeur de $\frac{n}{n'}$ qui ne diffère pas sensiblement de la valeur calculée.

(39) Occupons-nous actuellement du cas où le changement de forme de la verge cylindrique consiste en une courbure

de son axe, qui ne soit accompagnée d'aucun déplacement sensible des points de cette ligne suivant sa longueur, de sorte que les variables y et z ne soient plus nulles, comme précédemment, mais que la variable u' s'évanouisse avec r pour toutes les valeurs de x. Nous continuerons de supposer que les déplacements d'un point quelconque M′ de la verge, varient très-peu dans toute l'étendue de chaque section perpendiculaire à l'axe, et conséquemment que les valeurs de u', v', w', peuvent se développer en séries très-convergentes suivant les puissances des coordonnées η et ζ de ce point. Par suite, il en sera de même à l'égard des forces P_1, P_2, etc.; et de plus si les forces données X', Y', Z', sont représentées par des séries ordonnées suivant les puissances entières de η et ζ, il faudra que les développements de P_1, P_2, etc., ne contiennent aussi que de semblables puissances de η et ζ, afin que les équations (2) puissent être rendues identiques par rapport à ces deux variables et subsister pour toutes leurs valeurs. Cela étant convenu, nous allons d'abord faire subir aux deux dernières équations (2) une transformation qui consisterait à leur substituer celles qui se déduisent des équations (5) du n° 11, mais qu'on peut aussi effectuer directement de la manière suivante.

En remplaçant les deux variables η et ζ par r et θ, nous aurons

$$\frac{dQ_1}{d\zeta}=\frac{dQ_1}{dr}\sin.\theta+\frac{dQ_1}{d\theta}\frac{\cos.\theta}{r},\quad \frac{dQ_2}{d\eta}=\frac{dQ_2}{dr}\cos.\theta-\frac{dQ_2}{d\theta}\frac{\sin.\theta}{r};$$

d'où l'on déduit

$$\int_0^\varepsilon \left(\frac{dQ_1}{d\xi} + \frac{dQ_2}{d\eta}\right) r\,dr = \int_0^\varepsilon \frac{d(Q_1 \sin.\theta + Q_2 \cos.\theta)}{dr}\, r\,dr$$
$$+ \int_0^\varepsilon \left(\frac{dQ_1}{d\theta}\cos.\theta - \frac{dQ_2}{d\theta}\sin.\theta\right) dr.$$

L'intégration par partie donne

$$\int_0^\varepsilon \frac{d(Q_1 \sin.\theta + Q_2 \cos.\theta)}{dr}\, r\,dr = (Q_1 \sin.\theta + Q_2 \cos.\theta)\,\varepsilon$$
$$- \int_0^\varepsilon (Q_1 \sin.\theta + Q_2 \cos.\theta)\, dr;$$

et comme la seconde équation (3) fait disparaître les termes compris en dehors du signe $\int$ et qui répondent à $r = \varepsilon$, il en résulte que l'équation précédente deviendra

$$\int_0^\varepsilon \left(\frac{dQ_1}{d\xi} + \frac{dQ_2}{d\eta}\right) r\,dr = \int_0^\varepsilon \frac{d(Q_1 \cos.\theta - Q_2 \sin.\theta)}{d\theta}\, dr.$$

Je multiplie les deux membres de cette équation par $d\theta$, j'intègre depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = 2\pi$, et en observant que par leur nature les quantités Q_1 et Q_2 ont la même valeur à ces deux limites, on aura

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \left(\frac{dQ_1}{d\xi} + \frac{dQ_2}{d\eta}\right) r\,dr\,d\theta = 0.$$

On trouvera de même

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\varepsilon \left(\frac{dR_1}{d\zeta} + \frac{dQ_1}{d\eta}\right) r\,dr\,d\theta = 0;$$

on aura donc, d'après les deux dernières équations (2) :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} Y'\,\rho\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{dP_2}{dx}\, r\,dr\,d\theta,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} Z'\,\rho\, r\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{dP_3}{dx}\, r\,dr\,d\theta;$$

et ce sont ces deux formules que nous emploierons à leur place.

(40) Je développe, comme il vient d'être dit, les quantités Y', Z', P_2, P_3, suivant les puissances et les produits de γ et ζ; je mets pour ces variables, leurs valeurs $r\cos.\theta$ et $r\sin.\theta$; j'effectue les intégrations, et en négligeant ensuite la quatrième puissance de ε, il vient

$$Y\rho + \frac{\varepsilon^2\rho}{8}\left(\frac{d^2Y'}{d\gamma^2} + \frac{d^2Y'}{d\zeta^2}\right) = \frac{dP_2}{dx} + \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^3P_2}{dx\,d\gamma^2} + \frac{d^3P_2}{dx\,d\zeta^2}\right),$$

$$Z\rho + \frac{\varepsilon^2\rho}{8}\left(\frac{d^2Z'}{d\gamma^2} + \frac{d^2Z'}{d\zeta^2}\right) = \frac{dP_3}{dx} + \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^3P_3}{dx\,d\gamma^2} + \frac{d^3P_3}{dx\,d\zeta^2}\right);$$

équations dans lesquelles on fera $\gamma=0$, $\zeta=0$, après les différentiations, et où l'on représente par Y et Z ce que deviennent alors Y' et Z'.

Je développe de même la première équation (3). Son premier membre formera une série ordonnée suivant les puissances de ε, dont les différents termes renfermeront les puissances et les produits de $\sin.\theta$ et $\cos.\theta$. Comme elle devra subsister pour toutes les valeurs de θ, il faudra égaler séparément à zéro la somme des coefficients de chaque puissance et de chaque produit de $\sin.\theta$ et $\cos.\theta$; or, en s'arrêtant au carré de ε inclusivement, on aura sept espèces de termes qui dépendront de $\sin.\theta$, $\cos.\theta$, $\sin.^2\theta$, $\cos.^2\theta$, $\sin.\theta\cos.\theta$, $\sin.\theta\cos.^2\theta$, $\cos.\theta\sin.^2\theta$, après qu'on aura remplacé $\sin.^3\theta$ et

$\cos.^3\theta$ par $\sin.\theta - \sin.\theta\cos^2\theta$ et $\cos.\theta - \cos.\theta\sin.^2\theta$: on aura donc sept équations; mais maintenant il nous suffira de celles que fournissent les coefficients de $\sin.\theta$, $\cos.\theta$, $\sin.\theta\cos.^2\theta$, $\cos.\theta\sin.^2\theta$, et qui sont

$$\left.\begin{array}{l} P_1 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{d^2P_1}{d\zeta^2} = 0, \quad P_2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\frac{d^2P_2}{d\eta^2} = 0, \\ 2\frac{d^2P_2}{d\eta d\zeta} - \frac{d^2P_1}{d\zeta^2} + \frac{d^2P_1}{d\eta^2} = 0, \quad 2\frac{d^2P_1}{d\eta d\zeta} - \frac{d^2P_2}{d\eta^2} + \frac{d^2P_2}{d\zeta^2} = 0. \end{array}\right\} \quad (9)$$

Les deux dernières ayant été divisées par ε^2, pour qu'elles fussent aussi exactes que les premières, il faudrait qu'on eût conservé les termes multipliés par ε^4; mais pour l'usage que nous allons en faire, l'approximation à laquelle nous nous sommes arrêtés est suffisante. Dans ces quatre équations, on fera $\eta = 0$, $\zeta = 0$, après les différentiations.

Au moyen des deux premières équations (9), les précédentes deviendront

$$Y\rho + \frac{\varepsilon^2\rho}{8}\left(\frac{d^2Y'}{d\eta^2} + \frac{d^2Y'}{d\zeta^2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^3P_2}{dx\,d\zeta^2} - 3\frac{d^3P_2}{dx\,d\eta^2}\right),$$

$$Z\rho + \frac{\varepsilon^2\rho}{8}\left(\frac{d^2Z'}{d\eta^2} + \frac{d^2Z'}{d\zeta^2}\right) = \frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^3P_1}{dx\,d\eta^2} - 3\frac{d^3P_1}{dx\,d\zeta^2}\right).$$

Mais en différentiant successivement la première équation (2) par rapport à η et ζ, et faisant ensuite $\eta = 0$, $\zeta = 0$, on aura

$$\frac{dX'}{d\eta}\rho - \frac{d^2P_3}{dx\,d\eta} = \frac{d^2P_1}{d\eta\,d\zeta} + \frac{d^2P_2}{d\eta^2} = \frac{1}{2}\left(3\frac{d^2P_2}{d\eta^2} - \frac{d^2P_2}{d\zeta^2}\right),$$

$$\frac{dX'}{d\zeta}\rho - \frac{d^2P_3}{dx\,d\zeta} = \frac{d^2P_1}{d\zeta^2} + \frac{d^2P_2}{d\eta\,d\zeta} = \frac{1}{2}\left(3\frac{d^2P_1}{d\zeta^2} - \frac{d^2P_1}{d\eta^2}\right),$$

en ayant égard aux deux dernières équations (9); si donc on différentie ces formules par rapport à x, qu'on les multiplie par $\frac{1}{4}\varepsilon^2$, et qu'on les ajoute aux précédentes, on aura

$$\left.\begin{aligned}
Y\rho + \frac{\varepsilon^2 \rho}{8}\left(\frac{d^2 Y'}{d\eta^2} + \frac{d^2 Y'}{d\zeta^2} + 2\frac{d^2 X'}{dx\,d\eta}\right) &= \frac{\varepsilon^2}{4}\frac{d^3 P_3}{dx^2 d\eta}, \\
Z\rho + \frac{\varepsilon^2 \rho}{8}\left(\frac{d^2 Z'}{d\eta^2} + \frac{d^2 Z'}{d\zeta^2} + 2\frac{d^2 X'}{dx\,d\zeta}\right) &= \frac{\varepsilon^2}{4}\frac{d^3 P_3}{dx^2 d\zeta}.
\end{aligned}\right\} (10)$$

Il ne restera plus qu'à mettre dans ces nouvelles équations à la place de $\frac{dP_3}{d\eta}$ et $\frac{dP_3}{d\zeta}$, leurs valeurs relatives à $\eta = 0$ et $\zeta = 0$, calculées en négligeant tous les termes dépendants de ε.

(41) Pour les obtenir, je développe les premiers membres des trois équations (3) suivant les puissances de ε, puis j'égale séparément à zéro dans chacune d'elles, les coefficients de sin. θ, cos. θ, sin.$^2\theta$, cos.$^2\theta$, sin. θ cos. θ. Il en résulte quinze équations qui se réduisent à quatorze quand on néglige le carré de ε^2, parce qu'alors l'équation $Q_1 = 0$ se présente deux fois. Ces quatorze équations sont celles-ci :

$$P_1 = 0,\ P_2 = 0,\ Q_1 = 0,\ Q_2 = 0,\ R_1 = 0,$$
$$\frac{dP_1}{d\zeta} = 0,\ \frac{dP_2}{d\eta} = 0,\ \frac{dP_1}{d\eta} + \frac{dP_2}{d\zeta} = 0,$$
$$\frac{dQ_1}{d\zeta} = 0,\ \frac{dQ_2}{d\eta} = 0,\ \frac{dQ_1}{d\eta} + \frac{dQ_2}{d\zeta} = 0,$$
$$\frac{dR_1}{d\zeta} = 0,\ \frac{dQ_1}{d\eta} = 0,\ \frac{dR_1}{d\eta} + \frac{dQ_1}{d\zeta} = 0,$$

dans lesquelles on fera $\eta = 0$, $\zeta = 0$, après les différentiations. Pour ces valeurs de η et ζ, et quelle que soit celle de x, on a par hypothèse $u' = 0$, $v' = y$, $w' = z$; on a donc aussi

$$\frac{du'}{dx} = 0,\ \frac{dv'}{dx} = \frac{dy}{dx},\ \frac{dw'}{dx} = \frac{dz}{dx};$$

au moyen de quoi, si l'on substitue dans les équations précédentes les valeurs de P_1, P_2, Q_1, Q_2, R_1, données par les formules (1), on en déduira ensuite :

$$\left.\begin{array}{lll}
\frac{du'}{d\eta}=-\frac{dy}{dx}, & \frac{du'}{d\zeta}=-\frac{dz}{dx}, & \\
\frac{dv'}{d\eta}=0, & \frac{dw'}{d\zeta}=0, & \frac{dv'}{d\zeta}+\frac{dw'}{d\eta}=0, \\
\frac{d^2u'}{d\zeta^2}=0, & \frac{d^2u'}{d\eta d\zeta}=0, & \frac{d^2u'}{d\eta^2}=0, \\
\frac{d^2v'}{d\eta^2}=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2}, & \frac{d^2v'}{d\eta d\zeta}=\frac{1}{4}\frac{d^2z}{dx^2}, & \frac{d^2v'}{d\zeta^2}=-\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2}, \\
\frac{d^2w'}{d\eta^2}=-\frac{1}{4}\frac{d^2z}{dx^2}, & \frac{d^2w'}{d\eta d\zeta}=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dx^2}, & \frac{d^2w'}{d\zeta^2}=\frac{1}{4}\frac{d^2z}{dx^2}.
\end{array}\right\} \quad (11)$$

D'après cela, nous aurons

$$\frac{dP_3}{d\eta}=-k\left(3\frac{d^2u'}{dx\,d\eta}+\frac{d^2v'}{d\eta^2}+\frac{d^2w'}{d\eta\,d\zeta}\right)=\frac{5k}{2}\frac{d^2y}{dx^2},$$
$$\frac{dP_3}{d\zeta}=-k\left(3\frac{d^2u'}{dx\,d\zeta}+\frac{d^2v'}{d\eta\,d\zeta}+\frac{d^2w'}{d\zeta^2}\right)=\frac{5k}{2}\frac{d^2z}{dx^2};$$

et les équations (10) deviendront

$$\left.\begin{array}{l}
Y+\frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^2Y'}{d\eta^2}+\frac{d^2Y'}{d\zeta^2}+2\frac{d^2X'}{dx\,d\eta}\right)=\frac{5k\varepsilon^2}{8\rho}\frac{d^4y}{dx^4}, \\
Z+\frac{\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^2Z'}{d\eta^2}+\frac{d^2Z'}{d\zeta^2}+2\frac{d^2X'}{dx\,d\zeta}\right)=\frac{5k\varepsilon^2}{8\rho}\frac{d^4z}{dx^4}.
\end{array}\right\} \quad (12)$$

Dans le cas de l'équilibre, les forces Y, Z, X', Y', Z', seront données en fonctions de x, η, ζ. Dans le cas du mouvement, il faudra les diminuer respectivement des différences partielles secondes de y, z, u', v', w', relatives au temps t; et si l'on suppose qu'aucune force donnée n'agisse sur le points de la verge, cela reviendra à faire

$$Y=-\frac{d^2y}{dt^2},\ Z=-\frac{d^2z}{dt^2},\ X'=-\frac{d^2u'}{dt^2},\ Y'=-\frac{d^2v'}{dt^2},\ Z'=-\frac{d^2w'}{dt^2}.$$

En vertu des équations (11) on aura donc

$$\frac{d^2Y'}{d\eta^2}+\frac{d^2Y'}{d\zeta^2}+2\frac{d^2X'}{dx\,d\eta}=2\frac{d^4y}{dx^2t^2},$$
$$\frac{d^2Z'}{d\eta^2}+\frac{d^2Z'}{d\eta^2}+2\frac{d^2X'}{dx\,d\zeta}=2\frac{d^4z}{dx^2dt^2};$$

ce qui changera les équations (12) en celles-ci :

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{5k\varepsilon^2}{8\rho}\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{\varepsilon^2}{4}\frac{d^4y}{dx^2dt^2},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=-\frac{5k\varepsilon^2}{8\rho}\frac{d^4z}{dx^4}+\frac{\varepsilon^2}{4}\frac{d^4z}{dx^2dt^2}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de $\frac{d^2y}{dt^2}$ et $\frac{d^2z}{dt^2}$, dans les seconds membres de ces deux équations, on voit que leurs seconds termes auront ε^4 pour facteur, et pourront en conséquence être négligés ; on aura donc enfin

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b^2\frac{d^4y}{dx^4}=0,\quad \frac{d^2z}{dt^2}+b^2\frac{d^4z}{dx^4}=0,\quad (13)$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{5k\varepsilon^2}{8\rho}=b^2.$$

Soit qu'il y ait équilibre ou qu'il y ait mouvement, ces équations (12) et (13), communes à tous les points de l'axe de la verge, feront connaître les valeurs des deux inconnues y et z, après qu'on y aura joint celles qui ont lieu en particulier à ses extrémités, et que nous formerons tout à l'heure.

(42) Dans l'état naturel de la verge, on a

$$r=\sqrt{\eta^2+\zeta^2},\quad \theta=arc\left(\text{tang.}=\frac{\zeta}{\eta}\right);$$

si donc, après son changement de forme, on désigne, comme

dans le n° 33, par $r\varphi$ l'accroissement de la droite MM', et par ψ l'accroissement de l'angle qu'elle fait avec une parallèle à l'axe des η menée par le point M, on aura les valeurs de $r+r\varphi$ et $\theta+\psi$, en remplaçant, dans ces formules, les coordonnées primitives η et ζ de M' par ses coordonnées subséquentes $\eta+v'-y$ et $\zeta+w'-z$, rapportées au point M comme origine; donc, en négligeant les carrés et les produits de $v'-y$ et $w'-z$, nous aurons

$$r\varphi=(v'-y)\cos.\theta+(w'-z)\sin.\theta,$$
$$r\psi=(w'-z)\cos.\theta-(v'-y)\sin.\theta.$$

Si l'on développe suivant les puissances de η et ζ, et qu'on mette pour η et ζ, leurs valeurs $r\cos.\theta$ et $r\sin.\theta$, il en résultera

$$\begin{aligned}\varphi=&\frac{dv'}{d\eta}\cos.^2\theta+\left(\frac{dv'}{d\zeta}+\frac{dw'}{d\eta}\right)\cos.\theta\sin.\theta+\frac{dw'}{d\zeta}\sin.^2\theta\\&+\frac{r}{2}\left[\frac{d^2v'}{d\eta^2}\cos.^3\theta+\left(2\frac{d^2v'}{d\eta\,d\zeta}+\frac{d^2w'}{d\eta^2}\right)\cos.^2\theta\sin.\theta\right.\\&\left.+\left(\frac{d^2v'}{d\zeta^2}+2\frac{d^2w'}{d\eta\,d\zeta}\right)\sin.^2\theta\cos.\theta+\frac{d^2w'}{d\zeta^2}\sin.^3\theta\right]+\text{etc.},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi=&\frac{dw'}{d\eta}\cos.^2\theta+\left(\frac{dw'}{d\zeta}-\frac{dv'}{d\eta}\right)\cos.\theta\sin.\theta-\frac{dv'}{d\zeta}\sin.^2\theta\\&+\frac{r}{2}\left[\frac{d^2w'}{d\eta^2}\cos.^3\theta+\left(2\frac{d^2w'}{d\eta\,d\zeta}-\frac{d^2v'}{d\eta^2}\right)\cos.^2\theta\sin.\theta\right.\\&\left.+\left(\frac{d^2w'}{d\zeta^2}-2\frac{d^2w'}{d\eta\,d\zeta}\right)\sin.^2\theta\cos.\theta-\frac{d^2v'}{d\zeta^2}\sin.^3\theta\right]+\text{etc.}\end{aligned}$$

On fera dans ces séries $\eta=0$, $\zeta=0$, après les différentiations; en négligeant les carrés de r et ε, ce qui permettra de faire usage des équations (11), on aura donc

$$\varphi = \frac{r}{8}\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\cos.\theta + \frac{d^2 z}{d x^2}\sin.\theta\right),$$

$$\psi = \frac{1}{2}\left(\frac{d w'}{d \eta} - \frac{d v'}{d \zeta}\right) + \frac{r}{8}\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\sin.\theta - \frac{d^2 z}{d x^2}\cos.\theta\right).$$

Nous voyons par là que la flexion d'une verge cylindrique d'un très-petit diamètre n'est pas accompagnée, comme son extension, d'une dilatation normale, ou du moins que la dilatation φ qui a lieu en chaque point M′ est très-petite et proportionnelle à la distance r de M′ à l'axe. Quant à l'angle ψ qui exprime la torsion en ce point M′, sa valeur se compose d'une partie principale, indépendante de θ et r, et commune à tous les points d'une même section normale à l'axe; or, cette torsion qui ne varie qu'avec x, étant celle que nous avons considérée dans les nos 37 et 38, nous pouvons maintenant en faire abstraction, et supposer qu'on ait

$$\frac{d w'}{d \eta} - \frac{d v'}{d \zeta} = 0.$$

La torsion qui accompagne nécessairement la flexion de la verge, se trouvera réduite à une valeur très-petite, proportionnelle au rayon r, et variable dans une même section normale avec la direction de ce rayon.

En joignant cette dernière équation aux quatorze formules (11), les valeurs des différences partielles premières et secondes de u', v', w', qui sont au nombre de quinze, se trouveront toutes déterminées d'après celles de y et z; les développements de u', v', w', suivant les puissances de η et ζ, seront donc connus, lors même que l'on conserverait les carrés et le produit de η et ζ; mais nous bornerons l'approximation aux premières puissances de ces variables inclusive-

ment, et alors nous aurons

$$u' = -\frac{dy}{dx}\eta - \frac{dz}{dx}\zeta, \quad v' = y, \quad w' = z.$$

Il résulte de cette valeur de u' que chaque droite, telle que MM', qui était perpendiculaire à l'axe de la verge dans son état naturel, est encore normale à cette ligne devenue courbe après le changement de forme. On en déduit

$$\frac{du'}{dx} = -\frac{d^2 y}{dx^2}\eta - \frac{d^2 z}{dx^2}\zeta,$$

pour la dilatation longitudinale qui aura lieu au point M', et sera proportionnelle à son rayon r, comme les valeurs correspondantes de φ et ψ. Dans chaque section de la verge passant par son axe, par exemple, dans le plan des x, y, ou des x, z, cette dilatation sera en raison inverse du rayon de courbure; elle changera de signe avec la distance à l'axe : d'un côté de cette droite, les fibres de la verge seront allongées; de l'autre côté, elles seront raccourcies semblablement; et c'est cet état différent des deux côtés de la verge qui produit son élasticité par flexion, ou sa tendance à reprendre la direction rectiligne.

(43) Quand la courbe formée par l'axe aura été déterminée, c'est-à-dire, quand y et z seront déterminées en fonctions de x, non-seulement les dilatations de la verge en tous sens seront aussi connues, mais encore l'action moléculaire exercée par une partie sur la partie contiguë. Supposons que la surface de séparation de ces deux parties soit la section normale à l'axe, faite par le point M'; relativement à ce point, désignons par T, U, V, les composantes de l'action moléculaire, respectivement parallèles aux axes des x, y, z, et rapportées

à l'unité de surface : d'après le n° 7, ces composantes ne sont autre chose que les trois forces P_3, Q_3, R_3 ; en les développant suivant les puissances de η et ζ, faisant $\eta=0$ et $\zeta=0$ dans les coefficients, et observant que $Q_3=P_2$ et $R_3=P_1$, nous aurons donc

$$T=P_3+\frac{dP_3}{d\eta}\eta+\frac{dP_3}{d\zeta}\zeta+\text{etc.},$$

$$U=P_2+\frac{dP_2}{d\eta}\eta+\frac{dP_2}{d\zeta}\zeta+\frac{1}{2}\frac{d^2P_2}{d\eta^2}\eta^2+\frac{d^2P_2}{d\eta\, d\zeta}\eta\zeta+\frac{1}{2}\frac{d^2P_2}{d\zeta^2}\zeta^2+\text{etc.},$$

$$V=P_1+\frac{dP_1}{d\eta}\eta+\frac{dP_1}{d\zeta}\zeta+\frac{1}{2}\frac{d^2P_1}{d\eta^2}\eta^2+\frac{d^2P_1}{d\eta\, d\zeta}\eta\zeta+\frac{1}{2}\frac{d^2P_1}{d\zeta^2}\zeta^2+\text{etc.},$$

Si l'on néglige dans la valeur de T, les carrés et le produit de η et ζ, on aura, d'après les résultats du n° 41,

$$T=\frac{5k}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\eta+\frac{d^2z}{dx^2}\zeta\right).$$

La résultante des forces T dans toute l'étendue de la section normale de la verge, sera égale à zéro ; mais les sommes de leurs moments ne seront pas nulles. Si l'on appelle μ et μ' les sommes de ces moments, pris par rapport à deux axes parallèles à ceux des z et des y, et menés par le point M qui appartient à l'axe des x, on aura

$$\mu=\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}T\eta\, r\,dr\,d\theta,\quad \mu'=\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}T\zeta\, r\,dr\,d\theta;$$

et si l'on désigne par ω l'aire de la section de la verge, laquelle est égale à $\pi\varepsilon^2$, et qu'on effectue les intégrations, après avoir mis pour T, η, ζ, leurs valeurs, il vient

$$\mu=\frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\frac{d^2y}{dx^2},\quad \mu'=\frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\frac{d^2z}{dx^2}.$$

En négligeant dans les valeurs de U et V, les termes de trois dimensions et au-delà par rapport à η, ζ, ε, et éliminant leurs premiers termes P_1, P_2, au moyen des deux premières équations (9), nous aurons

$$U = \tfrac{1}{2}(\eta^2 - \varepsilon^2)\frac{d^2 P_2}{d\eta^2} + \eta\zeta\frac{d^2 P_2}{d\eta\, d\zeta} + \tfrac{1}{2}\zeta^2\frac{d^2 P_2}{d\zeta^2},$$
$$V = \tfrac{1}{2}(\zeta^2 - \varepsilon^2)\frac{d^2 P_1}{d\zeta^2} + \eta\zeta\frac{d^2 P_1}{d\eta\, d\zeta} + \tfrac{1}{2}\eta^2\frac{d^2 P_1}{d\eta^2}.$$

D'après les équations (11) et les deux premières formules (1), on a

$$\frac{d^2 P_1}{d\eta^2} = -k\left(\frac{d^3 u'}{d\zeta\, d\eta^2} - \frac{1}{4}\frac{d^3 z}{dx^3}\right), \quad \frac{d^2 P_1}{d\eta\, d\zeta} = -k\left(\frac{d^3 u'}{d\eta\, d\zeta^2} + \frac{1}{4}\frac{d^3 y}{dx^3}\right),$$
$$\frac{d^2 P_2}{d\zeta^2} = -k\left(\frac{d^3 u'}{d\eta\, d\zeta^2} - \frac{1}{4}\frac{d^3 y}{dx^3}\right), \quad \frac{d^2 P_2}{d\eta\, d\zeta} = -k\left(\frac{d^3 u'}{d\eta^2\, d\zeta} + \frac{1}{4}\frac{d^3 z}{dx^3}\right);$$

d'où l'on conclut

$$\frac{d^2 P_1}{d\eta^2} - \frac{d^2 P_2}{d\eta\, d\zeta} = \frac{k}{2}\frac{d^3 z}{dx^3}, \quad \frac{d^2 P_2}{d\zeta^2} - \frac{d^2 P_1}{d\eta\, d\zeta} = \frac{k}{2}\frac{d^3 y}{dx^3};$$

la première équation (2) donne aussi, en ayant égard aux valeurs de $\frac{dP_3}{d\eta}$ et $\frac{dP_3}{d\zeta}$ trouvées dans le n° 41 :

$$\frac{dX'}{d\eta}\rho = \frac{d^2 P_1}{d\eta\, d\zeta} + \frac{d^2 P_2}{d\eta^2} + \frac{5k}{2}\frac{d^3 y}{dx^3},$$
$$\frac{dX'}{d\zeta}\rho = \frac{d^2 P_1}{d\zeta^2} + \frac{d^2 P_2}{d\eta\, d\zeta} + \frac{5k}{2}\frac{d^3 z}{dx^3};$$

et si l'on joint les deux dernières formules (9) à ces quatre dernières équations, on pourra en tirer les valeurs des différences partielles secondes de P_1 et P_2 par rapport à η et ζ, lesquelles sont au nombre de six. On trouve de cette manière:

$$\frac{d^2P_1}{d\eta^2}=\frac{\rho}{4}\frac{dX'}{d\zeta}-\frac{k}{4}\frac{d^3z}{dx^3},\quad \frac{d^2P_2}{d\zeta^2}=\frac{\rho}{4}\frac{dX'}{d\eta}-\frac{k}{4}\frac{d^3y}{dx^3},$$

$$\frac{d^2P_1}{d\zeta^2}=\frac{3\rho}{4}\frac{dX'}{d\zeta}-\frac{7k}{4}\frac{d^3z}{dx^3},\quad \frac{d^2P_2}{d\eta^2}=\frac{3\rho}{4}\frac{dX'}{d\eta}-\frac{7k}{4}\frac{d^3y}{dx^3},$$

$$\frac{d^2P_1}{d\eta d\zeta}=\frac{\rho}{4}\frac{dX'}{d\eta}-\frac{3k}{4}\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^2P_2}{d\eta d\zeta}=\frac{\rho}{4}\frac{dX'}{d\zeta}-\frac{3k}{4}\frac{d^3z}{dx^3};$$

et il ne restera qu'à substituer ces six valeurs dans celles de U et V.

Désignons par U_1 et V_1 les résultantes de ces forces dans toute l'étendue de la section normale de la verge, de sorte que nous ayons

$$U_1=\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}U\,rdrd\theta,\quad V_1=\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}V\,rdrd\theta;$$

en mettant pour U et V leurs valeurs, et effectuant les intégrations, on trouve :

$$U_1=\frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^2P_2}{d\zeta^2}-3\frac{d^2P_2}{d\eta^2}\right),\quad V_1=\frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^2P_1}{d\eta^2}-3\frac{d^2P_1}{d\zeta}\right);$$

par conséquent, nous aurons :

$$U_1=\frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(5k\frac{d^3y}{dx^3}-2\rho\frac{dX'}{d\eta}\right),\quad V_1=\frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(5k\frac{d^3z}{dx^3}-2\rho\frac{dX'}{d\zeta}\right).$$

La somme des moments de ces mêmes forces par rapport à l'axe de la verge est nulle, car elle serait exprimée par l'intégrale :

$$\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}(\eta V-\zeta U)\,rdrd\theta,$$

qui est égale à zéro.

(44) Il nous sera facile maintenant de former les équations

relatives aux extrémités de la verge. Si une force donnée agit à l'un des bouts de la verge sur toute la section normale à l'axe, il faudra qu'elle y fasse équilibre aux forces moléculaires dont nous venons de déterminer les résultantes et les moments. La somme des moments des forces normales et la résultante des forces longitudinales étant nulles, il sera d'abord nécessaire que la force donnée soit comprise dans un plan passant par l'axe, et dirigée perpendiculairement à cette droite; et en effet, sans cela, elle produirait, contre nos hypothèses, une torsion et une extension semblables à celles du n° 34. Pour fixer les idées, plaçons l'origine de la variable x à l'un des bouts de la verge, et désignons par l sa longueur entière; appelons H et H' les deux composantes parallèles aux axes des y et des z, d'une force donnée qui agira sur le prolongement de la verge, à une distance h de l'extrémité correspondante à $x=l$, de manière que les moments de cette force par rapport à deux axes menés par cette extrémité et parallèles à ceux des y et des z, soient respectivement $H'h$ et Hh; désignons de même par $G, G', g, G'g, Gg$, les composantes, la distance et les moments analogues relativement à l'autre bout de la verge : si l'on considère le dernier élément de la verge, on voit que les forces moléculaires T, U, V, agissent suivant leurs directions à son extrémité correspondante à $x=l-dx$; d'où l'on conclut que pour son équilibre, il faudra qu'on ait ces quatre équations :

$$H+U_{\iota}=0, \quad H'+V_{\iota}=0, \quad Hh-\mu=0, \quad H'h-\mu'=0;$$

de même en considérant le premier élément de la verge, nous voyons que ces forces agissent en sens contraire de leurs directions à son extrémité correspondante à $x=dx$; et il en

résulte que les quatre équations de son équilibre, seront

$$G - U_1 = 0, \quad G' - V_1 = 0, \quad Gg - \mu = 0, \quad G'g - \mu' = 0.$$

Je substitue dans ces formules, à la place de U_1, V_1, μ, μ', leurs valeurs précédentes, ce qui donne ces quatre équations :

$$\left.\begin{array}{l} H - \frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(2\rho\frac{dX'}{d\eta} - 5k\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0, \quad H' - \frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(2\rho\frac{dX'}{d\zeta} - 5k\frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0, \\ Hh - \frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad H'h - \frac{5k\omega\varepsilon}{8}\frac{d^2z}{dx^2} = 0, \end{array}\right\} (14)$$

qui auront lieu pour la valeur particulière $x = l$, et ces quatre autres :

$$\left.\begin{array}{l} G + \frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(2\rho\frac{dX'}{d\eta} - 5k\frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0, \quad G' + \frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(2\rho\frac{dX'}{d\zeta} - 5k\frac{d^3z}{dx^3}\right) = 0, \\ Gg - \frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad G'g - \frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\frac{d^2z}{dx^2} = 0, \end{array}\right\} (15)$$

qui subsisteront pour $x = 0$.

Si à l'une des extrémités de la verge, le bout de l'axe est fixe, les deux premières équations d'équilibre qui s'y rapportent n'auront pas lieu, et elles seront remplacées par celles-ci :

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Ce seront les deux dernières équations d'équilibre qui ne subsisteront plus à une extrémité où la verge est appuyée, de manière qu'aucun point de la section normale ne puisse se déplacer dans le sens de l'axe; mais alors il faudra qu'on ait $u = 0$ pour toutes les valeurs de η et ζ; et d'après l'expression de u' à laquelle nous nous sommes arrêtés (n° 42), il en

résultera ces deux équations :

$$\frac{dy}{dx}=0, \quad \frac{dz}{dx}=0.$$

Enfin s'il s'agit d'une extrémité de la verge, assujétie à la fois de ces deux manières, auquel cas on dit que la verge est encastrée, aucune des quatre équations d'équilibre ne subsistera, et on aura à leur place ces quatre équations :

$$y=0, \; z=0, \; \frac{dy}{dx}=0, \; \frac{dz}{dx}=0.$$

Dans tous les cas qui pourront se présenter, on aura en tout huit équations relatives aux valeurs particulières $x=0$, $x=l$, qui serviront à déterminer les huit constantes arbitraires que renfermeront, dans le cas de l'équilibre de la verge, les intégrales des équations (12) communes à tous ses points.

(45) Avant d'aller plus loin, il sera bon de faire voir comment on déduit des formules (12), (14) et (15), les équations d'équilibre de la verge, relatives aux sommes des composantes et aux sommes des moments des forces données qui agissent sur tous ses points, y compris les deux extrémités.

Les équations (12) peuvent s'écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} Y'\rho r dr d\theta &= \frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(5k\frac{d^4y}{dx^4} - 2\rho\frac{d^2X'}{dx\,d\eta}\right), \\ \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} Z'\rho r dr d\theta &= \frac{\omega\varepsilon^2}{8}\left(5k\frac{d^4z}{dx^4} - 2\rho\frac{d^2X'}{dx\,d\zeta}\right). \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Je les multiplie par dx, puis j'intègre depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$; et en ayant égard aux deux premières équations (14) et (15) qui répondent à ces limites, il vient

$$\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^l Y'\rho r dr d\theta dx + H + G = 0,$$

$$\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^l Z'\rho r dr d\theta dx + H' + G' = 0;$$

équations qui expriment que les sommes des composantes des forces données, parallèles aux axes des y et des z, sont égales à zéro.

Je multiplie les équations (16) par $x dx$, et j'intègre encore depuis $x = 0$ jusqu'à $x = l$, ce qui donne

$$\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^l xY'\rho r dr d\theta dx = \frac{\omega\varepsilon^2 l}{8}\left(5k\frac{d^3y}{dx^3} - 2\rho\frac{dX'}{d\eta}\right)$$
$$- \frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right] + \frac{\omega\varepsilon^2\rho}{4}\int_0^l \frac{dX'}{d\eta}dx,$$

$$\int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^l xZ'\rho r dr d\theta dx = \frac{\omega\varepsilon^2 l}{8}\left(5k\frac{d^3z}{dx^3} - 2\rho\frac{dX'}{d\zeta}\right)$$
$$- \frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right) + \frac{5k\omega\varepsilon^2}{8}\left[\frac{d^2z}{dx^2}\right] + \frac{\omega\varepsilon^2\rho}{4}\int_0^l \frac{dX'}{d\zeta}dx.$$

Dans les seconds membres de ces équations, les quantités renfermées entre parenthèses répondent à $x = l$, et celles qui sont contenues entre des crochets, à $x = 0$; les valeurs des unes et des autres sont données par les équations (14) et (15); d'ailleurs on a

$$\frac{\omega\varepsilon^2\rho}{4}\int_0^l \frac{dX'}{d\eta}dx = \int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^l \eta X'\rho r dr d\theta dx,$$

$$\frac{\omega\varepsilon^2\rho}{4}\int_0^l \frac{dX'}{d\zeta}dx = \int_0^\varepsilon\int_0^{2\pi}\int_0^l \zeta X'\rho r dr d\theta dx:$$

d'après cela, les équations précédentes deviennent

$$\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}(x\mathrm{Y}'-\eta\mathrm{X}')\rho r dr d\theta dx+(l+h)\mathrm{H}-g\mathrm{G}=0,$$

$$\int_0^{\varepsilon}\int_0^{2\pi}\int_0^{l}(x\mathrm{Z}'-\zeta\mathrm{X}')\rho r dr d\theta dx+(l+h)\mathrm{H}'-g\mathrm{G}'=0;$$

et elles expriment évidemment que les sommes des moments de toutes les forces appliquées à la verge sont égales à zéro, ces moments étant pris par rapport aux axes même des y et des z, c'est-à-dire, par rapport à deux droites rectangulaires, menées par l'extrémité de l'axe de la verge qui répond à $x=0$.

(46) Les équations (14) et (15) conviennent à l'équilibre et au mouvement de la verge; mais dans le cas du mouvement, il y faut faire

$$\mathrm{X}'=-\frac{d^2u'}{dt^2},$$

en supposant, comme plus haut (n° 41), qu'aucune force donnée n'agît sur les points de la verge, et y supprimer les termes dépendants de $\mathrm{H}, \mathrm{H}', \mathrm{G}, \mathrm{G}'$, si cette supposition s'étend à ses deux extrémités. En vertu des équations (11) et (13), nous aurons :

$$\frac{d\mathrm{X}'}{d\eta}=-\frac{d^3u'}{dt^2d\eta}=\frac{d^3y}{dt^2dx}=-b^2\frac{d^5y}{dx^5},$$
$$\frac{d\mathrm{X}'}{d\zeta}=-\frac{d^3u'}{dt^2d\zeta}=\frac{d^3z}{dt^2dx}=-b^2\frac{d^5z}{dx^5};$$

quantités qu'on pourra négliger dans les formules (14) et (15), à cause que le coefficient b^2 renferme le facteur ε^2; par conséquent ces formules ne contiendront plus que les termes dépendants des différentielles secondes et troisièmes de y et z par rapport à x.

Ces deux inconnues sont séparées dans les équations (13), (14) et (15); elles se détermineront indépendamment l'une de l'autre, et toutes deux par les mêmes calculs; par conséquent il suffira de nous occuper de l'une d'elles, de y par exemple. Nous aurons alors, pour tous les points de la verge, l'équation :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0, \qquad (a)$$

dans laquelle b est une constante égale à $\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{5k}{2\rho}}$.

Relativement aux extrémités, les cas les plus ordinaires seront celui où la verge est libre à ses deux bouts, et celui où elle est encastrée par une extrémité et libre à l'autre bout. Nous nous bornerons à considérer ces deux cas; l'analyse suivante s'appliquerait sans difficultés à tous les autres. Dans le cas de la verge entièrement libre, nous aurons

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \qquad (b)$$

pour $x = 0$ et $x = l$; dans le cas de la verge encastrée à l'extrémité qui répond à $x = 0$ et libre à l'autre bout, ces deux équations n'auront lieu que pour $x = l$, et l'on aura en même temps

$$y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0, \qquad (c)$$

pour $x = 0$. Ces équations particulières serviront à déterminer une partie des quantités arbitraires qui seront contenues dans l'intégrale de l'équation (a); les valeurs des autres se concluront de l'état initial de la verge; à cet effet, nous compterons le temps t à partir de l'origine du mouvement, et nous

supposerons qu'on ait

$$y = fx,\quad \frac{dy}{dt} = Fx,\qquad (d)$$

quant $t=0$, en sorte que fx et Fx soient des fonctions données arbitrairement pour toutes les valeurs de x, depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$: toutefois ces fonctions devront satisfaire aux équations qui répondent aux extrémités de la verge, sans quoi les conditions relatives à cette partie de la surface ne seraient pas remplies dans les premiers instants du mouvement, mais seulement après un très-court intervalle de temps, ainsi qu'on en a vu un exemple dans le n° 20.

(47) Représentons par P et Q deux fonctions de x et par m une quantité indépendante de x et t. Soit

$$y = P \sin. m^2 bt + Q \cos. m^2 bt;$$

on satisfera à l'équation (a) en posant

$$\frac{d^4 P}{dx^4} = m^4 P,\quad \frac{d^4 Q}{dx^4} = m^4 Q.$$

En intégrant celles-ci, on aura

$$P = A \sin. mx + A' \cos. mx + \tfrac{1}{2} B\left(e^{mx} - e^{-mx}\right) + \tfrac{1}{2} B'\left(e^{mx} + e^{-mx}\right),$$
$$Q = C \sin. mx + C' \cos. mx + \tfrac{1}{2} D\left(e^{mx} - e^{-mx}\right) + \tfrac{1}{2} D'\left(e^{mx} + e^{-mx}\right);$$

A, A', etc, étant les huit constantes arbitraires, et e la base des logarithmes népériens. A cause de la forme linéaire de l'équation (a), on y satisfera encore au moyen de cette expression :

$$y = \Sigma P \sin. m^2 bt + \Sigma Q \cos. m^2 bt,$$

dans laquelle les caractéristiques Σ indiquent des sommes qui s'étendent à toutes les valeurs possibles, réelles ou imaginaires, de m et des huit arbitraires. De plus, cette valeur de y sera l'intégrale complète de l'équation (a), présentée sous la forme qui convient le mieux au calcul des vibrations transversales de la verge, ou à la solution du problème qui nous occupe.

Si on la substitue dans les équations (b) qui ont lieu pour toutes les valeurs de t, et si, en conséquence, on égale séparément à zéro, le coefficient de chaque terme des sommes Σ, on aura

$$\frac{d^2 P}{dx^2}=0,\quad \frac{d^3 P}{dx^3}=0,\quad \frac{d^2 Q}{dx^2}=0,\quad \frac{d^3 Q}{dx^3}=0,$$

pour $x=0$ et $x=l$; d'où l'on conclura, en mettant pour P et Q leurs valeurs,

$$B'=A',\quad B=A,\quad D'=C',\quad D=C,$$

$$A\left(2\sin.ml-e^{ml}+e^{-ml}\right)=A'\left(e^{ml}+e^{-ml}-2\cos.ml\right),$$

$$A'\left(2\sin.ml+e^{ml}-e^{-ml}\right)=A\left(2\cos.ml-e^{-ml}-e^{ml}\right),$$

$$C\left(2\sin.ml-e^{ml}+e^{-ml}\right)=C'\left(e^{ml}+e^{-ml}-2\cos.ml\right),$$

$$C'\left(2\sin.ml+e^{ml}-e^{-ml}\right)=C\left(2\cos.ml-e^{ml}-e^{-ml}\right).$$

En exprimant les huit coefficients A, A', etc., au moyen de deux nouvelles quantités E et E' qui resteront indéterminées, on tirera de là :

$$B = A = E\left(e^{ml} + e^{-ml} - 2\cos. ml\right),$$
$$B' = A' = E\left(2\sin. ml - e^{ml} + e^{-ml}\right);$$
$$D = C = E'\left(e^{ml} + e^{-ml} - 2\cos. ml\right),$$
$$D' = C' = E'\left(2\sin. ml - e^{ml} + e^{-ml}\right);$$

et l'on aura, en outre, cette équation :

$$4\sin.^2 ml - \left(e^{ml} - e^{-ml}\right)^2 + \left(2\cos. ml - e^{ml} - e^{-ml}\right)^2 = 0,$$

ou bien, en réduisant,

$$\left(e^{ml} + e^{-ml}\right)\cos. ml - 2 = 0, \qquad (e)$$

laquelle servira à déterminer les valeurs de m.

En faisant donc, pour abréger,

$$X = \left(e^{ml} + e^{-ml} - 2\cos. ml\right)\left(\sin. mx + \tfrac{1}{2}e^{mx} - \tfrac{1}{2}e^{-mx}\right)$$
$$+ \left(2\sin. ml - e^{ml} + e^{-ml}\right)\left(\cos. mx + \tfrac{1}{2}e^{mx} + \tfrac{1}{2}e^{-mx}\right),$$

la valeur précédente de y deviendra

$$y = \Sigma X\left(E\sin. m^2 bt + E'\cos. m^2 bt\right); \qquad (f)$$

la somme Σ s'étendant toujours à toutes les valeurs possibles de E et E', mais seulement aux valeurs de m données par l'équation (e). Pour toutes ces valeurs, la fonction X satisfera aux deux équations :

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0, \qquad (g)$$

pour l'une et l'autre des valeurs particulières $x = 0$ et $x = l$; et de plus on aura identiquement

$$\frac{d^4 X}{dx^4} = m^4 X. \qquad (h)$$

Les formules (f) et (g) répondent au cas où la verge est libre à ses deux bouts; dans le cas où elle est encastrée à l'une de ses extrémités, on trouvera, en faisant usage des équations (c) qui s'y rapportent, que la valeur de y est encore exprimée par la formule (f), les valeurs de m étant données alors par l'équation :

$$\left(e^{ml} + e^{-ml}\right) \cos. ml + 2 = 0, \qquad (i)$$

et la quantité X ayant pour expression :

$$X = \left(e^{ml} + e^{-ml} + 2 \cos. ml\right)\left(\sin. mx - \tfrac{1}{2} e^{mx} + \tfrac{1}{2} e^{-mx}\right)$$
$$+ \left(2 \sin. ml + e^{ml} - e^{-ml}\right)\left(\cos. mx - \tfrac{1}{2} e^{mx} - \tfrac{1}{2} e^{-mx}\right),$$

laquelle rend aussi l'équation (h) identique, et satisfait aux quatre équations :

$$X = 0, \quad \frac{dX}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 X}{dx^3} = 0, \qquad (k)$$

savoir : aux deux premières pour $x = 0$, et aux deux dernières pour $x = l$. Soit que la verge soit entièrement libre, ou qu'elle le soit seulement à une de ses extrémités, les coefficients E et E$'$ se détermineront en fonctions de m, d'après l'état initial, par une analyse semblable à celle du n° 19.

(48) Remarquons d'abord que si m est une racine de l'équation (e) ou de l'équation (i), il en sera de même à l'égard de

$-m$, $m\sqrt{-1}$, $-m\sqrt{-1}$; de plus les valeurs correspondantes de X ne feront que changer de signe ou acquérir le facteur $\sqrt{-1}$; d'où il résulte qu'on pourra dans la formule (f), réunir en un seul les termes de la somme Σ qui répondent à ces quatre racines, et n'étendre ensuite cette somme qu'à des valeurs positives de m, ou à des valeurs en partie réelle et en partie imaginaire, s'il en existait, dont la partie réelle serait positive. De cette manière, m et m' étant deux racines dont on fera usage, m' et m'^2 différeront de $\pm m$ et $\pm m^2$.

Cela étant convenu, je multiplie l'équation (a) par $X\,dx$, puis j'intègre depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$, ce qui donne :

$$\frac{d^2.\int_0^l Xy\,dx}{dt^2}+b^2\int_0^l X\frac{d^4y}{dx^4}dx=0.$$

En intégrant par partie, on aura

$$\int_0^l X\frac{d^4y}{dx^4}dx=\left(X\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dX}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{dy}{dx}-\frac{d^3X}{dx^3}y\right)$$
$$-\left[X\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{dX}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{d^2X}{dx^2}\frac{dy}{dx}-\frac{d^3X}{dx^3}y\right]+\int_0^l\frac{d^4X}{dx^4}y\,dx.$$

Les termes compris entre parenthèses répondent à $x=l$, et ceux qui sont renfermés entre des crochets, à $x=0$; ils se détruisent en vertu des équations (b), (c), (g), (k), relatives à ces limites; et si l'on met sous le signe $\int$, m^4X à la place de $\frac{d^4X}{dx^4}$, qui lui est égal pour toutes les valeurs de x, d'après l'équation (h), il en résultera

$$\frac{d^2.\int_0^l Xy\,dx}{dt^2}+b^2m^4\int_0^l Xy\,dx=0.$$

L'intégrale complète de cette équation différentielle du second ordre est :

$$\int_0^l \mathrm{X}y\,dx = \mathrm{H}\cos.m^2bt + \mathrm{H}'\sin.m^2bt;$$

H et H′ étant les deux constantes arbitraires. Pour les déterminer, je fais $t=0$, dans cette formule et dans sa différentielle par rapport à t; et en ayant aux équations (d), j'en conclus immédiatement :

$$\mathrm{H} = \int_0^l \mathrm{X}fx\,dx, \quad \mathrm{H}' = \frac{1}{bm^2}\int_0^l \mathrm{XF}x\,dx.$$

Quel que soit t, on aura donc

$$\int_0^l \mathrm{X}y\,dx = \int^l \mathrm{X}fx\,dx.\cos.m^2bt + \frac{1}{bm^2}\int_0^l \mathrm{XF}x\,dx.\sin.m^2bt. \quad (l)$$

Je substitue la formule (f) à la place de y dans le premier membre de cette équation. Son second membre ne contenant que $\cos.m^2bt$ et $\sin.m^2bt$, si m' est une racine de l'équation (e) ou de l'équation (i), telle que m' et m'^2 diffèrent de $\pm m$ et $\pm m^2$, comme on l'a supposé plus haut, il faudra que le terme correspondant à m' disparaisse du premier membre; ce qui exige qu'on ait

$$\int_0^l \mathrm{XX}'dx = 0, \qquad (m)$$

X′ étant ce que devient X quand on y change m en m'. Mais pour le cas de $m'=m$, on conclura de cette même

équation (l) :

$$E\int_0^l X^2 dx = \frac{1}{bm^2}\int_0^l X F x dx, \quad E'\int_0^l X^2 dx = \int_0^l X f x dx;$$

ce qui fera connaître les valeurs de E et E′, au moyen desquelles la formule (f) deviendra :

$$y = \Sigma X \left[\frac{\int_0^l X f x dx}{\int_0^l X^2 dx} \cos. m^2 b t + \frac{\int_0^l X F x dx}{m^2 b \int_0^l X^2 dx} \sin. m^2 b t \right]. \quad (n)$$

Cette expression de y et la valeur de $\frac{dy}{dt}$ qui s'en déduit, ne renfermant plus rien d'inconnu, le déplacement et la vitesse à un instant quelconque, de tel point qu'on voudra de l'axe de la verge, seront maintenant connus, ce qui renferme la solution complète du problème que nous nous proposions de résoudre.

Si l'on y fait $t=0$, il en résultera

$$f x = \Sigma X \frac{\int_0^l X f x dx}{\int_0^l X^2 dx}, \quad F x = \Sigma X \frac{\int_0^l X F x dx}{\int_0^l X^2 dx}.$$

Ces deux formules, dont l'une est la même que l'autre, auront lieu pour des fonctions quelconques fx et Fx, continues ou discontinues, mais seulement depuis $x=0$ jusqu'à $x=l$, et en observant qu'elles ne conviendront aux valeurs extrêmes de x que quand ces fonctions arbitraires rempliront la condition indiquée à la fin du n° 46. L'intégrale $\int_0^l X^2 dx$ qu'elles renferment, s'obtiendra sans forme finie, après qu'on y aura mis pour X, l'une ou l'autre des expressions du numéro précédent.

(49) Au moyen de l'équation (m), on prouvera, par un raisonnement semblable à celui du n° 21, que les équations (e) et (i) n'admettent pas de racines en partie réelles et en partie imaginaires. La formule (n) ne contiendra donc aucune exponentielle relative au temps t; mais dans le cas de la verge libre, cette formule contiendra un terme proportionnel à la variable t et un terme indépendant de t qui proviendront de la racine $m=0$ de l'équation (e). Ces termes se réduiront à des fonctions linéaires de l'autre variable x. Ils répondront en conséquence à un changement de direction de l'axe de la verge, sans aucune courbure, et à un mouvement de cette droite parallèlement à elle-même. Nous ferons abstraction de cette sorte de mouvement, et nous n'aurons point égard à la racine $m=0$ de l'équation (e). Tous les termes de la formule (n) seront alors des quantités périodiques; mais à cause que les différentes valeurs de m sont incommensurables, il n'arrivera pas, en général, que tous les points de l'axe de la verge reviennent en même temps à leur état primitif, ou, autrement dit, une verge élastique n'exécutera pas dans tous les cas, comme une corde tendue, des vibrations isochrones. Pour que les vibrations transversales le soient, et pour que la verge fasse entendre un son unique et appréciable, il faudra que d'après son état initial, tous les termes de la formule (n) disparaissent, excepté un seul, et qu'elle se réduise conséquemment à la forme :

$$y=X(E\sin. m^2bt+E'\cos. m^2bt), \qquad (o)$$

où l'on a remis, pour abréger, les constantes E et E′ à la place de leurs valeurs trouvées plus haut.

61.

Les différents sons d'une verge dépendront des valeurs de m : si l'on désigne par λ et λ' des valeurs numériques de ml, tirées respectivement des équations (e) et (i), et par τ et τ' les durées correspondantes de chaque vibration entière, on aura

$$\tau = \frac{2\pi l^2}{\lambda^2 b} = \frac{4\pi l^2}{\lambda^2 \varepsilon}\sqrt{\frac{2\rho}{5k}},\quad \tau' = \frac{2\pi l^2}{\lambda'^2 b} = \frac{4\pi l^2}{\lambda'^2 \varepsilon}\sqrt{\frac{2\rho}{5k}};$$

les nombres de vibrations dans chaque unité de temps seront $\frac{1}{\tau}$ et $\frac{1}{\tau'}$; par conséquent, pour deux verges de la même matière dont les extrémités sont aussi dans le même état, les sons d'un même rang, mesurés par ces nombres, seront en raison directe des diamètres et inverse des carrés des longueurs.

Pour obtenir les valeurs de λ et λ', je désigne par i un nombre entier ou zéro, et je fais

$$ml = \lambda = \tfrac{1}{2}(2i+1)\pi \mp \delta,$$

dans l'équation (e), et

$$ml = \lambda' = \tfrac{1}{2}(2i+1)\pi \pm \delta',$$

dans l'équation (i). Je prends les signes supérieurs ou inférieurs devant les nouvelles inconnues δ et δ' selon que i est un nombre pair ou un nombre impair; et de cette manière, il vient

$$\sin.\delta = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}(2i+1)\pi}\, e^{\mp\delta} + e^{-\frac{1}{2}(2i+1)\pi}\, e^{\pm\delta}},$$

$$\sin.\delta' = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}(2i+1)\pi}\, e^{\pm\delta'} + e^{-\frac{1}{2}(2i+1)\pi}\, e^{\mp\delta'}}.$$

Les inconnues δ et δ' devant être moindres que $\frac{1}{2}\pi$, il est facile de voir que chacune d'elles n'aura qu'une seule valeur, pour chaque valeur de i. Celle de δ pour $i=0$, sera $\delta=\frac{1}{2}\pi$; et comme elle répond à $m=0$, il en faudra faire abstraction. Pour $i=1$, on aura $\delta=0,01797$, en négligeant δ dans l'expression de sin. δ; et si l'on y substitue cette première valeur approchée de δ, on aura plus exactement

$$\delta=0,01764.$$

Les valeurs de δ relatives à $i=2$, 3, etc., seront encore plus petites que celle-ci; les valeurs de λ différeront donc très-peu des multiples impairs de $\frac{1}{2}\pi$; et les sons de la verge libre par les deux bouts formeront à très-peu près une série croissante comme les carrés des nombres 3, 5, 7, etc. La plus petite valeur de λ, qui répond au son le plus grave, sera

$$\lambda=\frac{3\pi}{2}+\delta=4,73003.$$

Dans le cas de $i=0$, après quelques essais, on trouve à un degré suffisant d'approximation :

$$\delta'=0,3048.$$

La plus petite valeur de λ' sera donc

$$\lambda'=\frac{1}{2}\pi+\delta'=1,8756.$$

En comparant son carré à celui de la valeur précédente de λ, on aura

$$\frac{\lambda'^2}{\lambda^2}=0,1572,$$

pour le rapport du son le plus grave de la verge encastrée par un bout à celui de la même verge libre à ses deux extré-

mités. Les autres valeurs de δ' sont très-petites; en les négligeant, les valeurs de λ' seront les multiples impairs de $\frac{1}{2}\pi$, et les sons de la verge encastrée, le son le plus grave excepté, formeront une série croissante comme les carrés de 3, 5, 7, etc. Dans les deux cas de la verge libre et de la verge encastrée, on déterminera les valeurs de x qui répondent aux *nœuds* relatifs à chaque mode de vibrations isochrones, en égalant à zéro le coefficient X de la formule (o). Leurs positions et les lois des vibrations transversales que nous venons d'énoncer, sont connues depuis long-temps et confirmées par l'expérience.

(50) Les sons d'une même verge, qui vibre successivement suivant sa longueur et transversalement, ne dépendent que d'une seule quantité $\frac{k}{\rho}$ relative à la matière dont elle est formée. En éliminant cette quantité, on obtiendra une expression très-simple du rapport des nombres de vibrations qui leur servent de mesure. Ainsi, dans le cas de la verge libre à ses deux bouts et du son le plus grave, si l'on appelle n_1 le nombre de ses vibrations transversales, dans l'unité de temps, on aura

$$n_1 = \frac{\lambda^2 \varepsilon}{4\pi l^2}\sqrt{\frac{5k}{2\rho}} = (3,5608)\frac{\varepsilon}{2l^2}\sqrt{\frac{5k}{2\rho}},$$

en employant la plus petite valeur de λ que nous venons de calculer; d'ailleurs on a vu précédemment (n° 36) que le nombre analogue qui répond aux vibrations longitudinales, étant désigné par n, on a

$$n = \frac{a}{2l} = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{5k}{2\rho}};$$

il en résultera donc

$$\frac{n_1}{n}=(3,5608)\frac{\varepsilon}{l},$$

pour le rapport demandé, la verge élastique étant supposée homogène et cylindrique dans son état naturel. Il était intéressant de vérifier par l'expérience ce nouveau résultat de la théorie; c'est ce que j'ai fait au moyen des observations suivantes que M. Savart à bien voulu me communiquer.

Les vibrations longitudinales ont été observées sur les longueurs entières des verges qui étaient de près d'un mètre; on a réduit ces longueurs au huitième, afin d'observer les vibrations transversales avec plus d'exactitude; les nombres des unes et des autres ont été conclus des sons correspondants par les règles ordinaires de l'acoustique; puis on a multiplié par huit les nombres des premières, pour avoir égard au rapport des longueurs employées. Voici les résultats de ces observations comparés à ceux de la formule précédente :

Verge en cuivre jaune.

$l=\frac{1}{8}(0^{m},825)$, $\varepsilon=2^{mm},4$, $n=34133$.

Observation.	Calcul.	Différence.
$n_1=2844$	$n_1=2829$	-15

Verge en cuivre rouge.

$l=\frac{1}{8}(0^{m},825)$, $\varepsilon=1^{mm},7$, $n=36864$.

Observation.	Calcul.	Différence.
$n_1=2133$	$n_1=2164$	$+31$

Verge en fer.

$$l=\frac{5}{8}(0^{m},88),\quad \varepsilon=2^{mm},25,\quad n=45514.$$

Observation.	Calcul.	Différence.
$n_1=3686$	$n_1=3683$	-3

Les différences entre le calcul et l'expérience sont, comme on voit, assez petites pour qu'on puisse les attribuer sans crainte aux erreurs inévitables des observations, et particulièrement à celles qui ont pu être commises sur l'évaluation du rayon ε.

§ V.

Équations de l'équilibre et du mouvement d'une membrane élastique.

(51) Nous supposerons cette membrane assez mince pour qu'elle soit parfaitement flexible, qu'elle n'ait par elle-même aucune tendance à prendre une forme ou une autre, et qu'elle ne devienne élastique que par l'effet des tensions qu'on lui fait éprouver. Nous traiterons son épaisseur comme infiniment petite; et conséquemment nous regarderons les forces P_1, P_2, etc., du n° 7, comme constantes en chaque point dans toute l'étendue de cette épaisseur normale à la membrane. Enfin dans toute l'étendue de la membrane, excepté son contour que l'on considérera en particulier, je supposerai nulles les forces X_1, Y_1, Z_1, que comprennent les équations (4) du n° 10.

La surface que la membrane formera pour obéir aux autres

forces qui lui sont appliquées peut être prise pour sa forme naturelle; et l'on peut considérer les équations de son équilibre, comme exprimant les conditions nécessaires et suffisantes pour que cette surface se maintienne sous l'action de ces forces. On regardera l'ordonnée z d'un point quelconque M comme une fonction inconnue des deux autres coordonnées x et y, dépendante de cette même surface. Les quantités c, c', c'', contenues dans les équations (4), seront les cosinus des angles que la normale au point M fait avec les axes des x, y, z; et si l'on fait, pour abréger,

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \frac{dz}{dy}=q, \quad \sqrt{1+\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}}=h,$$

on aura, pour les formules connues,

$$c=-\frac{p}{h}, \quad c'=-\frac{q}{h}, \quad c''=\frac{1}{h};$$

donc, à cause de $Q_3=P_2$, $R_2=Q_1$, $R_3=P_1$, ces équations deviendront:

$$\left.\begin{aligned} P_1&=qP_2+pP_3,\\ Q_1&=qQ_2+pP_2,\\ R_1&=q^2Q_2+2pqP_2+p^2P_3, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

en éliminant P_1 et Q_1 dans la troisième au moyen des deux premières.

Pour former les équations (5) du n° 11, je supposerai que la portion de membrane à laquelle elles se rapportent est comprise entre quatre plans normaux, dont deux passant par des tangentes parallèles au plan des x, z, et infiniment rapprochées l'une de l'autre, leur distance mutuelle étant dy, et les deux autres par des tangentes parallèles au plan des y, z, dont la distance mutuelle et infiniment petite sera dx. Les

deux plans adjacents les plus voisins de ceux des coordonnées, passeront par le point M ; les aires des sections de la membrane qui leur correspondent seront $\varepsilon\sqrt{1+p^2}\,dx$ et $\varepsilon\sqrt{1+q^2}\,dy$, en appelant ε l'épaisseur de la membrane au point M; le volume de la portion de membrane comprise entre les quatre plans aura pour valeur $\varepsilon h\,dx\,dy$, et sa masse sera $\rho\varepsilon h\,dx\,dy$, ρ étant la densité de la matière qui a lieu au point M. Les intégrales relatives à cette masse, et celles qui répondent aux quatre sections normales de la membrane, se réduiront chacune à un seul élément. Par rapport à la section faite par une tangente parallèle au plan des x, z, et la plus voisine de ce plan, l'intégrale contenue dans la première équation (5), se réduira à

$$(\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3)\,\varepsilon\sqrt{1+p^2}\,dx;$$

on aura ce qu'elle devient à la section opposée, en y mettant $y+dy$ à la place de y, et observant qu'à cette section les forces P_1, P_2, P_3, doivent être prises en sens contraire de leurs directions; par conséquent la portion d'intégrale relative à ces deux sections, sera

$$-\frac{d.(\gamma P_1 + \beta P_2 + \alpha P_3)\,\varepsilon\sqrt{1+p^2}}{dy}\,dx\,dy.$$

Les quantités α, β, γ, sont ici les cosinus des angles que fait, avec les axes des x, y, z, la normale à la première section, menée en dehors de la portion de membrane que nous considérons; si l'on désigne par α', β', γ', les cosinus des angles analogues, relativement à la section faite par une tangente parallèle au plan des y, z, et la plus voisine de ce plan, on aura

$$-\frac{d.(\gamma' P_1 + \beta' P_2 + \alpha' P_3)\,\varepsilon\sqrt{1+q^2}}{dx}\,dy\,dx,$$

pour la portion de l'intégrale comprise dans la première équation (5) et relative aux deux sections qui répondent à ce même plan. En réunissant ces deux formules, on aura l'expression complète de l'intégrale contenue dans le second membre de cette équation. Par des changements de lettres, on en déduira les expressions des intégrales que contiennent les seconds membres des deux autres équations (5). Quant à celles qui forment les premiers membres des trois équations, elles auront pour valeurs :

$$X\rho\varepsilon h\,dx\,dy,\quad Y\rho\varepsilon h\,dx\,dy,\quad Z\rho\varepsilon h\,dx\,dy,$$

les produits $X\rho\varepsilon$, $Y\rho\varepsilon$, $Z\rho\varepsilon$, étant les composantes parallèles aux x, y, z, de la force donnée et rapportée à l'unité de surface, qui répond au point M. En observant donc que les intégrales $\int X_1 ds$, $\int Y_1 ds$, $\int Z_1 ds$, sont nulles par hypothèse, et supprimant le facteur $dx\,dy$ commun à tous les termes des équations (5), elles deviendront finalement :

$$\left.\begin{aligned}
&X\rho\varepsilon h+\frac{d.(\gamma P_1+\beta P_2+\alpha P_3)\varepsilon\sqrt{1+p^2}}{dy}+\frac{d.(\gamma' P_1+\beta' P_2+\alpha' P_3)\varepsilon\sqrt{1+q^2}}{dx}=0,\\
&Y\rho\varepsilon h+\frac{d.(\gamma Q_1+\beta Q_2+\alpha P_2)\varepsilon\sqrt{1+p^2}}{dy}+\frac{d.(\gamma' Q_1+\beta' Q_2+\alpha' P_2)\varepsilon\sqrt{1+q^2}}{dx}=0,\\
&Z\rho\varepsilon h+\frac{d.(\gamma R_1+\beta Q_1+\alpha P_1)\varepsilon\sqrt{1+p^2}}{dy}+\frac{d.(\gamma' R_1+\beta' Q_1+\alpha' P_1)\varepsilon\sqrt{1+q^2}}{dx}=0.
\end{aligned}\right\}(2)$$

(52) La détermination des six cosinus $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$, est une simple question de géométrie; je me bornerai à en donner les valeurs dont on trouve le calcul dans mon Mémoire sur les *surfaces élastiques*. Ces valeurs sont :

$$\left.\begin{array}{lll}\alpha=-\dfrac{pq}{h\sqrt{1+p^2}}, & \beta=\dfrac{\sqrt{1+p^2}}{h}, & \gamma=\dfrac{q}{h\sqrt{1+p^2}},\\ \alpha'=\dfrac{\sqrt{1+q^2}}{h}, & \beta'=-\dfrac{qp}{h\sqrt{1+q^2}}, & \gamma'=\dfrac{p}{h\sqrt{1+q^2}}.\end{array}\right\} \quad (3)$$

On les substituera dans les équations (2), où l'on mettra aussi pour P_1, Q_1, R_1, leurs valeurs données par les formules (1). D'ailleurs, en faisant $K=0$ dans les formules du nº 7, on a

$$P_2=-k\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right),$$
$$P_3=-k\left(3\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$
$$Q_2=-k\left(\frac{du}{dx}+3\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right),$$
$$R_1=-k\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+3\frac{dw}{dz}\right).$$

Après avoir substitué ces expressions dans la troisième équation (1), on en déduira immédiatement la valeur de $\frac{dw}{dz}$; au moyen de laquelle les trois quantités P_2, P_3, Q_2, qui resteront dans les équations (2), ne dépendront plus que des deux inconnues u et v, dont elles renfermeront seulement les différences partielles relatives à x et y. De cette manière, ces trois équations seront aux différences partielles du second ordre, entre les trois inconnues u, v, z; et la solution complète et générale du problème relatif à une membrane flexible en équilibre, consisterait à les intégrer, puis à déterminer les fonctions arbitraires au moyen des équations particulières qui appartiennent au contour de la membrane. Mais ces calculs seraient impraticables et n'auraient aucune application utile; c'est pourquoi nous nous bornerons à consi-

dérer le cas où la membrane est plane, et celui où elle s'écarte très-peu d'un même plan dans toute son étendue. L'équation différentielle de la surface flexible que Lagrange a donnée, et qui se trouve aussi dans le Mémoire que je viens de citer, n'est pas soumise à cette restriction ; elle est seulement fondée sur la supposition particulière qu'en chaque point de cette surface, la tension est la même dans toutes les directions : on la déduirait sans difficulté des équations (2) en y introduisant cette hypothèse.

Dans ce qui va suivre, je supposerai aussi la membrane homogène et d'une épaisseur constante ; ce qui rendra constantes, les trois quantités k, ρ, ε, en négligeant toutefois les petites variations de ρ et ε, dues aux dilatations de la membrane qui sont produites par les forces données qui la sollicitent, ou qui ont lieu en ses différents points dans l'état de mouvement.

(53) Dans le cas où la membrane sera plane, si l'on suppose qu'elle coïncide avec le plan des x, y, on aura

$$z=0,\quad p=0,\quad q=0,\quad h=1,$$
$$\alpha=0,\quad \beta=1,\quad \gamma=0,\quad \alpha'=1,\quad \beta'=0,\quad \gamma'=0.$$

Les trois quantités P_1, Q_1, R_1, seront nulles en vertu des équations (1) : il faudra que la force normale au plan de la membrane soit aussi nulle ; ce qui fera disparaître la troisième équation (2). En tirant de $R_1=0$, la valeur de $\frac{dw}{dz}$, et la mettant dans P_3 et Q_2, on aura

$$P_3=-\frac{2k}{3}\left(4\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right),\quad Q_2=-\frac{2k}{3}\left(4\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dx}\right).$$

Au moyen de ces différentes valeurs et de celle de P_2, les

deux premières équations (2) se réduiront à

$$
\left.\begin{aligned}
&X\rho + \frac{k}{3}\left(3\frac{d^2u}{dy^2} + 5\frac{d^2v}{dx\,dy} + 8\frac{d^2u}{dx^2}\right) = 0,\\
&Y\rho + \frac{k}{3}\left(3\frac{d^2v}{dx^2} + 5\frac{d^2u}{dx\,dy} + 8\frac{d^2v}{dy^2}\right) = 0,
\end{aligned}\right\} \quad (5)
$$

Si l'on fait dans la membrane, une section normale et passant par le point M, que l'on désigne par θ l'angle compris entre la perpendiculaire à cette section et l'axe des x, et qu'on appelle, comme dans le n° 7, P, Q, R, les composantes parallèles aux x, y, z, de l'action moléculaire relative à cette même section et au point M, et rapportée à l'unité de surface, il faudra prendre, dans les formules de ce numéro:

$$c'' = 0, \quad c' = \sin.\theta, \quad c = \cos.\theta;$$

la composante normale R sera nulle; les deux autres auront pour valeurs :

$$P = P_2 \sin.\theta + P_3 \cos.\theta, \quad Q = Q_2 \sin.\theta + P_2 \cos.\theta,$$

ou, ce qui est la même chose,

$$
\left.\begin{aligned}
&P = -k\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\sin.\theta - \frac{2k}{3}\left(4\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right)\cos.\theta,\\
&Q = -k\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\cos.\theta - \frac{2k}{3}\left(4\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dx}\right)\sin.\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (6)
$$

Transportons le point M au contour de la membrane; supposons qu'une force donnée et comprise dans le plan de la membrane agisse sur toute son épaisseur en ce point; soient H et H′ ses composantes parallèles aux axes des x et y, et rapportées à l'unité de longueur, l'équilibre devra avoir lieu entre ces forces et les composantes P et Q, étendues à l'épais-

seur entière ou multipliées par ε; par conséquent on aura

$$H + \varepsilon P = 0, \quad H' + \varepsilon Q = 0,$$

en prenant pour θ dans P et Q, l'angle compris entre l'axe des x et la partie extérieure de la normale au contour, menée par le point M. Dans les points du contour qui seront fixes, on aura $u = 0$, $v = 0$; et les équations précédentes ne subsisteront pas, ou bien si l'on veut y considérer H et H′ comme des forces inconnues provenant de la résistance de ces points, ces équations serviront à déterminer les valeurs de H et H′: leur résultante prise en sens contraire de sa direction sera la pression que chaque point fixe devra être capable de supporter.

(54) On peut remarquer que quand on aura $P_2 = 0$ et $P_3 = Q_2$, la résultante des forces P et Q sera indépendante de l'angle θ, et normale à la section de la membrane à laquelle elle répond : ce sera le cas particulier où la *tension* sera la même en tous sens autour de chaque point. Dans les points où cette circonstance aura lieu, la dilatation éprouvée par la membrane sera aussi la même suivant toutes les directions.

En effet, si l'on prend un point M′ très-voisin de M; que l'on représente par r leur distance primitive; par x' et y', les coordonnées primitives de M′ parallèles aux x et y, et comptées du point M comme origine; par u' et v' les déplacements de M′ suivant ces directions, ceux de M étant u et v; et enfin par δ la dilatation de la ligne MM′, on aura

$$r^2 = x'^2 + y'^2, \quad r^2(1 + \delta)^2 = (x' + u' - u)^2 + (y' + v' - v)^2.$$

En négligeant les carrés et le produit de $u' - u$ et $v' - v$,

on tire de là :

$$\delta = \frac{(u'-u)x' + (v'-v)y'}{r^2};$$

si l'on néglige de même les carrés et le produit de x' et y', on a

$$u'-u = \frac{du}{dx}x' + \frac{du}{dy}y', \quad v'-v = \frac{dv}{dx}x' + \frac{dv}{dy}y';$$

on aura donc

$$\delta = \frac{du}{dx}\frac{x'^2}{r^2} + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\frac{x'y'}{r^2} + \frac{dv}{dy}\frac{y'^2}{r^2}.$$

Or, les conditions $P_2 = 0$ et $P_3 = Q_2$, donnent

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy};$$

ce qui réduit la formule précédente à

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right);$$

quantité qui ne dépend que des coordonnées x et y de M, et nullement de la direction de MM'. On voit réciproquement que dans tous les points où l'une des deux conditions que nous avons posées, ne sera pas remplie, la dilatation δ ne sera pas la même en tous sens.

(55) Le cas le plus simple auquel on puisse appliquer les formules du nº 53, est celui où l'on suppose les forces X et Y nulles dans toute l'étendue de la membrane, ce qui réduit d'abord les l'équations (5) à celles-ci :

$$\left.\begin{aligned} 3\frac{d^2u}{dy^2} + 5\frac{d^2v}{dx\,dy} + 8\frac{d^2u}{dx^2} = 0, \\ 3\frac{d^2v}{dx^2} + 5\frac{d^2u}{dx\,dy} + 8\frac{d^2v}{dy^2} = 0; \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

et où tous les points de son contour sont tirés par une force normale à cette ligne, dirigée de dedans en dehors, et dont l'intensité ne varie pas d'un point à un autre. En désignant cette force constante par C, ses composantes H et H′ auront pour valeurs :

$$H = C\cos.\theta, \quad H' = C\sin.\theta;$$

et si l'on a égard aux formules (6), les équations relatives au contour deviendront

$$\left.\begin{aligned} C\cos.\theta &= \varepsilon k\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\sin.\theta + \frac{2\varepsilon k}{3}\left(4\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}\right)\cos.\theta,\\ C\sin.\theta &= \varepsilon k\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\cos.\theta + \frac{2\varepsilon k}{3}\left(4\frac{dv}{dy}+\frac{du}{dx}\right)\sin.\theta.\end{aligned}\right\}\ (8)$$

On satisfait aux équations (7) en prenant

$$u = a + by + cx, \quad v = a' + b'x + c'y;$$

a, b, c, a', b', c', étant des constantes arbitraires. En substituant ces valeurs dans les équations (8), et observant qu'elles doivent subsister, en général, pour une infinité de valeurs de θ, et toujours pour plusieurs valeurs différentes de cet angle, on en conclura

$$b + b' = 0, \quad C = \frac{2\varepsilon k}{3}(4c + c'), \quad C = \frac{2\varepsilon k}{3}(4c' + c);$$

d'où l'on tire

$$b' = -b, \quad c' = c = \frac{3C}{10\varepsilon k}.$$

On aura, par conséquent,

$$u = a + by + \frac{3Cx}{10\varepsilon k}, \quad v = a' - bx + \frac{3Cy}{10\varepsilon k}.$$

Les constantes a, a', b, répondant à des déplacements communs à tous les points de la membrane, dans lesquels ils s'avanceraient parallèlement aux axes des x et des y, ou tourneraient autour de l'origine de ces coordonnées; en en faisant abstraction, on aura simplement :

$$u = \frac{3\,C\,x}{10\,\varepsilon\,k}, \quad v = \frac{3\,C\,y}{10\,\varepsilon\,k}.$$

D'après les formules (6), la résultante des forces εP et εQ, ou la *tension*, sera la même et égale à la force C dans toute l'étendue de la membrane et en tous sens autour de chaque point; il en sera de même à l'égard de la dilatation δ, qui aura pour valeur :

$$\delta = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right) = \frac{3\,C}{10\,\varepsilon\,k}.$$

En comparant ce résultat à ceux des n°s 15 et 25, et supposant qu'on ait

$$\frac{C}{\varepsilon} = \frac{\varpi}{\omega} = N,$$

on voit que la même force appliquée successivement à la superficie d'un corps, au contour d'une membrane, et aux extrémités d'une corde, produit des dilatations linéaires qui sont entre elles comme les nombres 2, 3, 4; la quantité k dépendante de la matière étant supposée la même dans les trois cas.

(56) Lorsque la membrane ne sera pas en équilibre, et si l'on suppose qu'aucune force donnée ne lui soit appliquée, on aura les équations de son mouvement, en faisant, dans les équations (5),

$$X = -\frac{d^2 u}{dt^2}, \quad Y = -\frac{d^2 v}{dt^2};$$

d'où il résultera

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{k}{3\rho}\left(3\frac{d^2 u}{dy^2} + 5\frac{d^2 v}{dx\,dy} + 8\frac{d^2 u}{dx^2}\right),$$

$$\frac{d^2 v}{dt^2} = \frac{k}{3\rho}\left(3\frac{d^2 v}{dy^2} + 5\frac{d^2 u}{dx\,dy} + 8\frac{d^2 v}{dy^2}\right).$$

Pour appliquer ces équations à un exemple, prenons une membrane circulaire; supposons qu'on lui fasse d'abord éprouver une tension constante, comme dans le numéro précédent; et qu'après avoir fixé son contour, on la fasse vibrer de manière que tous ses points se meuvent suivant leurs rayons respectifs, et qu'à chaque instant leurs déplacements soient les mêmes à égales distances du centre. Ce mouvement est évidemment possible, quoiqu'il paraisse difficile de le produire. Plaçons l'origine des coordonnées x et y au centre de la membrane; soit r la distance primitive du point M au centre; au bout du temps t, appelons φ son déplacement suivant le prolongement de ce rayon r; ses déplacements u et v parallèles aux axes des x et y, seront

$$u = \frac{x\varphi}{r}, \quad v = \frac{y\varphi}{r};$$

et dans notre hypothèse φ sera une fonction inconnue de r et t. En formant d'après cela les différences partielles de u et v, et les substituant dans les équations précédentes, on verra qu'elles se réduisent à une seule, savoir :

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} - \frac{1}{r^2}\varphi\right), \qquad (9)$$

où l'on a fait, pour abréger,

$$a^2 = \frac{8k}{3\rho}.$$

Si l'on applique les formules (6) au contour de la membrane, ou à une circonférence concentrique quelconque, il y faudra faire

$$\cos.\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin.\theta = \frac{y}{r},$$

et l'on trouvera qu'elles deviennent

$$P = -\frac{8k}{3}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{4r}\right)\frac{x}{r}, \quad Q = -\frac{8k}{3}\left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{4r}\right)\frac{y}{r}.$$

Au lieu d'une membrane, si l'on avait une plaque solide, toutes les formules relatives aux vibrations longitudinales seraient encore les mêmes, ainsi qu'on le verra dans le § VI de ce Mémoire; seulement il pourrait arriver que le contour fût entièrement libre; et alors il faudrait que les forces P et Q fussent nulles en tous ses points. Afin de ne pas revenir sur cette question, nous allons considérer le cas du contour fixe qui a nécessairement lieu pour une membrane tendue, et le cas d'un contour libre dans toute son étendue, en sorte que nous aurons l'une ou l'autre de ces deux équations:

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dr} + \frac{\varphi}{4r} = 0, \qquad (10)$$

pour $r = l$, en désignant par l le rayon du contour.

On satisfait à l'équation (9) en prenant

$$\varphi = r\int_0^{\pi} f(at + r\cos.\omega)\sin.^2\omega\, d\omega,$$

f indiquant une fonction arbitraire; et l'on peut voir dans un des mes précédents Mémoires (*) que c'est à cette formule que se réduit son intégrale complète, quand l'inconnue φ, comme dans la question actuelle, ne doit pas devenir infinie pour $r=0$. Nous ferons donc usage de cette expression de φ, en la mettant toutefois sous une forme plus commode pour la solution du problème qui nous occupe.

Sans restreindre la généralité de la fonction f, on peut supposer qu'on ait

$$f(at)=\Sigma(\mathrm{A}\cos.mat+\mathrm{B}\sin.mat),$$

m, A, B, étant des quantités indépendantes de la variable at, et la somme Σ s'étendant à toutes leurs valeurs possibles, réelles ou imaginaires. En observant que

$$\int_0^\pi \sin.(mr\cos\omega)\sin.^2\omega\, d\omega=0,$$

l'expression de φ prendra la forme :

$$\varphi=r\Sigma\left[(\mathrm{A}\cos.mat+\mathrm{B}\sin.mat)\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\sin.^2\omega\, d\omega\right]. \quad (11)$$

Dans le cas du contour fixe, la condition $\varphi=0$ pour $r=l$, devant se vérifier quel que soit t, on en conclura

$$\int_0^\pi \cos.(ml\cos.\omega)\sin.^2\omega\, d\omega=0. \quad (12)$$

Dans le cas du contour libre, on conclura de la deuxième

(*) Journal de l'École polytechnique, 19e cahier, page 239.

équation (10) :

$$\frac{5}{4}\int_0^\pi \cos.(ml\cos.\omega)\sin.^2\omega\, d\omega - ml\int_0^\pi \sin.(ml\cos.\omega)\sin.^2\omega\cos.\omega\, d\omega = 0;$$

équation que l'on changera facilement en celle-ci :

$$\int_0^\pi \cos.(ml\cos.\omega)(\tfrac{1}{4}\sin.^2\omega + \cos.^2\omega)\, d\omega = 0, \qquad (13)$$

par le procédé de l'intégration par partie. Chacune de ces équations (12) et (13) servira, pour le cas auquel elle se rapporte, à déterminer les valeurs de m; et il ne restera qu'à trouver d'après l'état initial de la membrane ou de la plaque, celles des coefficients A et B en fonctions de m. La somme Σ de la formule (11) s'étendra à toutes les valeurs de m tirées de ces équations ; mais leurs racines étant deux à deux égales et de signes contraires, on pourra supposer les deux termes qui répondent à chaque couple de racines, réunis en un seul terme, et n'étendre la somme Σ qu'à des valeurs de m dont les carrés sont différents.

(57) La méthode que nous employons à la détermination des coefficients A et B, exige que l'on fasse d'abord disparaître la différentielle première relative à r, que contient l'équation (9). Soit donc $\varphi = r^{-\frac{1}{2}}\varphi'$; cette équation deviendra

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2} = a^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dr^2} - \frac{3\varphi'}{4r^2}\right). \qquad (14)$$

La valeur de φ' sera

$$\varphi' = \Sigma(\mathrm{A}\cos.mat + \mathrm{B}\sin.mat)\mathrm{R},$$

en faisant, pour abréger,

$$R = r^{\frac{3}{2}} \int_0^{\pi} \cos.(mr\cos.\omega)\sin.^2\omega\, d\omega.$$

D'après l'équation (14), on aura identiquement

$$m^2 R + \frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{3R}{4r^2} = 0; \qquad (15)$$

et en vertu des équations (10), on aura

$$\varphi' = 0,\ R = 0,\ \frac{d\varphi'}{dr} - \frac{\varphi'}{4r} = 0,\ \frac{dR}{dr} - \frac{R}{4r} = 0; \qquad (16)$$

pour la valeur particulière $r = l$; les deux premières de ces quatre équations ayant lieu dans le cas du contour fixe, et les deux dernières dans l'autre cas.

Cela posé, je multiplie l'équation (14) par $R\,dr$, puis j'intègre depuis $r = 0$ jusqu'à $r = l$; il vient

$$\frac{d^2 . \int_0^l R\varphi' dr}{dt^2} = a^2 \left(\int_0^l R \frac{d^2\varphi'}{dr^2} dr - \frac{3}{4} \int_0^l \frac{R\varphi'}{r^2} dr \right).$$

En observant que $\varphi' = 0$ et $R = 0$ à la limite $r = 0$, et intégrant par partie, on aura

$$\int_0^l R \frac{d^2\varphi'}{dr^2} dr = R\frac{d\varphi'}{dr} - \frac{dR}{dr}\varphi' + \int_0^l \frac{d^2 R}{dr^2}\varphi' dr,$$

les termes compris hors du signe $\int$ répondant à l'autre limite $r = l$. Ils se détruisent en vertu des équations (16); et si l'on met pour $\frac{d^2 R}{dr^2}$ sa valeur tirée de l'équation (15), il en résultera

$$\int_0^l R\frac{d^2\varphi'}{dr^2}dr=\frac{3}{4}\int_0^l \frac{R\varphi'}{r^2}dr-m^2\int_0^l R\varphi' dr;$$

au moyen de quoi l'équation précédente deviendra

$$\frac{d^2.\int_0^l R\varphi' dr}{dt^2}+m^2a^2\int_0^l R\varphi' dr=0.$$

En intégrant cette équation différentielle seconde, désignant par C et C′ les deux constantes arbitraires, remettant $r^{\frac{1}{2}}\varphi$ au lieu de φ', et, à la place de R, ce que cette lettre représente, nous aurons

$$\int_0^l\left(\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\sin.^2\omega d\omega\right)r^2\varphi dr=C\cos.mat+C'\sin.mat. \quad (17)$$

Pour déterminer C et C′, je compte le temps t de l'origine du mouvement, et je suppose qu'on ait

$$\varphi=fr;\quad \frac{d\varphi}{dt}=Fr,$$

quand $t=0$, en sorte que fr et Fr soient des fonctions données arbitrairement depuis $r=0$ jusqu'à $r=l$, pourvu cependant qu'elles soient nulles pour $r=0$ et qu'elles satisfassent aux conditions relatives à l'autre limite $r=l$. En faisant $t=0$ dans l'équation (17) et dans sa différentielle relative à t, on aura

$$\int_0^l\left(\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\sin.^2\omega d\omega\right)r^2 fr dr=C$$

$$\frac{1}{ma}\int_0^l\left(\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\sin.^2\omega d\omega\right)r^2 Fr dr=C'.$$

Nous conserverons, pour abréger, les lettres C et C' à la place de leurs valeurs maintenant connues.

Je substitue la formule (11) à la place de φ dans l'équation (17), puis j'égale les coefficients des termes semblables dans les deux membres; il vient d'abord

$$\int_0^l \left(\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\sin.^2\omega\, d\omega . \int_0^\pi \cos.(m'r\cos.\omega)\sin.\omega\, d\omega \right) r^3\, dr = 0, \quad (18)$$

tant que m et m' sont deux racines des équations (12) ou (13) dont les carrés sont différents; et dans le cas particulier de $m' = m$, on a

$$A\int_0^l \left(\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\sin.^2\omega\, d\omega \right)^2 r^3 fr\, dr = C,$$

$$B\int_0^l \left(\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\sin.^2\omega\, d\omega \right)^2 r^3 Fr\, dr = C';$$

ce qui détermine les valeurs cherchées de A et B d'après celles de C et C'. La formule (11) ne contenant plus maintenant que des quantités données, fera connaître l'état de la plaque à chaque instant, et renferme conséquemment la solution complète du problème qu'il s'agissait de résoudre. En faisant $t = 0$ dans cette formule et dans sa différentielle relative à t, on en déduira des expressions de fr et Fr en séries qui représenteront ces fonctions arbitraires dans l'intervalle compris depuis $r = 0$ jusqu'à $r = l$.

(58) Au moyen de l'équation (18), on prouvera que les équations (12) et (13) n'ont pas de racines imaginaires. Tous les termes de la formule (11) seront donc périodiques; mais, à cause que les racines de ces équations sont incommensurables, la membrane ou la plaque que nous considérons n'exé-

cutera des vibrations isochrones, et ne pourra faire entendre un son unique, à moins que la formule (11) ne se réduise à un seul terme. Soient λ et λ', des valeurs numériques de ml tirées respectivement des équations (12 et (13); désignons par n et n' les nombres de vibrations dans l'unité de temps qui répondent à ces valeurs; nous aurons

$$n = \frac{\lambda a}{2\pi l}, \quad n' = \frac{\lambda' a}{2\pi l};$$

le premier nombre ayant lieu dans le cas du contour fixe, et le second dans le cas du contour mobile. On voit par là que, dans les deux cas, les sons qui proviennent des vibrations longitudinales d'une membrane ou d'une plaque circulaire, ou les nombres de vibrations qui leur servent de mesure, sont en raison inverse de son rayon, et indépendants de son épaisseur et de son degré de tension.

En développant le premier membre de l'équation (12) suivant les puissances de ml ou de λ, et faisant $\lambda^2 = 4x$, il vient

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3(1.2)^2} - \frac{x^3}{4(1.2.3)^2} + \frac{x^4}{5(1.2.3.4)^2} - \text{etc.} = 0.$$

Les valeurs approchées des deux plus petites racines de cette équation trancendante sont

$$x = 3{,}55, \quad x = 12{,}41.$$

On aura en même temps

$$\lambda = 3{,}77, \quad \lambda = 7{,}05;$$

et le rapport de ces deux valeurs de λ, sera celui des deux sons les plus graves, dans le cas du contour fixe.

Si l'on développe de même l'équation (13) suivant les puis-

sances de ml ou de λ', et qu'on y fasse $\lambda'^2 = 4x'$, on aura

$$1 - x' + \frac{x'^2}{(1.2)^2} - \frac{x'^3}{(1.2.3)^2} + \frac{x'^4}{(1.2.3.4)^2} - \text{etc.}$$
$$-\frac{3}{4}\left(1 - \frac{x'}{2} + \frac{x'^2}{3(1.2)^2} + \frac{x'^3}{4(1.2.3)^2} + \frac{x'^4}{5(1.2.3.4)^2} - \text{etc.}\right) = 0.$$

On trouve pour les valeurs approchées de ses deux plus petites racines :

$$x' = 0{,}46, \quad x' = 7{,}04.$$

Il en résulte

$$\lambda' = 1{,}31, \quad \lambda' = 5{,}31,$$

pour les valeurs correspondantes de λ' dont le rapport est celui des deux sons les plus graves dans le cas du contour mobile. En comparant la première valeur de λ' à la première valeur de λ, on a aussi le rapport du son le plus grave dans ce dernier cas à celui qui a lieu dans le cas du contour fixe.

Pour déterminer les rayons des lignes nodales qui répondent à chaque son ou à chaque valeur de m, on égalera à zéro le coefficient du terme correspondant de la formule (11); ce qui donne

$$\int_0^l \cos.(\mu \cos.\omega) \sin.^2\omega \, d\omega = 0,$$

en faisant $mr = \mu$. Il en résultera

$$r = \frac{\mu l}{\lambda}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{\mu l}{\lambda'},$$

selon qu'il s'agira du contour fixe ou du contour mobile, et, dans les deux cas, il faudra que la valeur de r ne surpasse pas le rayon l de la membrane ou de la plaque. En comparant

l'équation précédente à l'équation (12), on voit que les valeurs de μ ne seront autres que celles de λ. Si donc on prend pour λ sa plus petite valeur, on ne pourra prendre pour μ que cette même valeur, et l'on aura $r=l$, c'est-à-dire que dans le cas du son le plus grave et du contour fixe, il n'y aura pas de lignes nodales, si ce n'est le contour même. Si l'on prend pour λ sa seconde valeur, on pourra prendre pour μ cette valeur et la première; d'où il résultera

$$r=1, \quad r=\frac{(3,77)l}{7,05}=(0,53)l;$$

en sorte qu'il y aura outre le contour fixe, une autre ligne nodale qui accompagnera le second son de la membrane tendue. Les valeurs de μ ou de λ étant toutes plus grandes que la plus petite valeur de λ', le son le plus grave, dans le cas du contour libre, ne sera pas accompagné de lignes nodales. Si l'on prend pour λ' sa seconde valeur, on pourra prendre pour μ la première valeur de λ; ce qui donne

$$r=\frac{(3,77)l}{5,31}=(0,71)l,$$

et nous montre que le second son de la plaque dont le contour est libre, sera accompagné d'une ligne nodale. En général, le son dont le rang est $n+1$ sera accompagné d'un nombre n de lignes nodales, soit que le contour soit fixe ou mobile, non compris cette ligne extrême.

(59) Passons maintenant au cas où la membrane flexible s'écarte un peu d'un plan que nous prendrons toujours pour celui des x, y. Les deux quantités p et q étant alors supposées très-petites, nous négligerons leurs carrés, ce qui ré-

duira les équations (3) à

$$\alpha = 0, \quad \mathcal{C} = 1, \quad \gamma = q, \quad \alpha' = 1, \quad \mathcal{C}' = 0, \quad \gamma = p'.$$

En substituant ces valeurs et celles de P_1, Q_1, R_1, qui sont données par les formules (1), dans les équations (2), on aura

$$X\rho + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx} = 0,$$

$$Y\rho + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dP_2}{dx} = 0,$$

$$Z\rho + \frac{d(qQ_2 + pP_2)}{dy} + \frac{d(qP_2 + pP_3)}{dx} = 0;$$

d'où l'on déduit

$$(Z - Xp - Yq)\rho + Q_2\frac{d^2 z}{dy^2} + 2P_2\frac{d^2 z}{dx\,dy} + P_3\frac{d^2 z}{dx^2} = 0.$$

Les quantités P_2, P_3, Q_2, ne dépendront que de u et v, et leurs valeurs seront les mêmes que dans le n° 53 : celles de u et v en fonctions de x et y se détermineront par les équations de ce numéro; et cela fait, l'équation précédente sera celle de la surface flexible en équilibre, lorsqu'elle est sollicitée par des forces données X, Y, Z, qui l'écartent très-peu d'un plan, ce qui suppose très-petite la force normale Z.

Dans le cas du mouvement, et en supposant qu'aucune force donnée n'agît sur cette membrane, on fera

$$X = -\frac{d^2 u}{dt^2}, \quad Y = -\frac{d^2 v}{dt^2}, \quad Z = -\frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Si l'on suppose, en outre, que la membrane a d'abord été tendue comme dans le n° 55, par une force C, normale à son contour, et d'une grandeur constante; que l'on a ensuite

fixé son contour, et qu'on l'a fait vibrer transversalement d'une manière quelconque, les deux quantités u et v seront indépendantes du temps, et d'après leurs valeurs du numéro cité, celles de P_2, P_3, Q_2, seront

$$P_2 = 0, \quad P_3 = Q_2 = -\frac{C}{\rho};$$

par conséquent l'équation du mouvement déduite de celle de l'équilibre sera

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2}\right), \qquad (a)$$

en faisant, pour abréger,

$$\frac{C}{\rho \varepsilon} = c^2.$$

Il y faudra joindre l'équation particulière $z = 0$, qui aura lieu pour tous les points du contour de la membrane vibrante.

(60) L'intégrale complète de l'équation (a) peut être représentée par

$$\left.\begin{array}{l} z = \Sigma \mathrm{H} \sin.(mx + h) \sin.(m'y + h') \sin. ct\sqrt{m^2 + m'^2} \\ \quad + \Sigma \mathrm{H}' \sin.(mx + h) \sin.(m'y + h') \cos. ct\sqrt{m^2 + m'^2}; \end{array}\right\} \qquad (b)$$

H, H′, m, m', h, h', étant des quantités indépendantes de x, y, z; les sommes Σ s'étendant à toutes leurs valeurs possibles, réelles ou imaginaires; et tous les termes de chacune de ces sommes satisfaisant séparément à cette équation. Cette forme de son intégrale est celle qui convient le mieux à la détermination complète des vibrations, lorsque la membrane vibrante est un rectangle, ainsi que nous le supposerons en premier lieu.

Plaçons l'origine des coordonnées à l'un de ses angles, prenons les directions des deux côtés adjacents pour axes des x et des y, et représentons leurs longueurs par l et l', de sorte que le contour de la membrane réponde à $x=0$ et $x=l$, et à $y=0$ et $y=l'$. La condition $z=0$ pour $x=0$ et $x=l$, devant se vérifier pour toutes les valeurs de y et t, il faudra que chaque terme de la formule (b) y satisfasse séparément, ce qui exige qu'on ait

$$h=0, \quad m=\frac{n\pi}{l},$$

n étant un nombre entier quelconque. La même condition relative à $y=0$ et $y=l'$, donnera

$$h'=0, \quad m'=\frac{n'\pi}{l'};$$

n' étant aussi un nombre entier quelconque. En faisant donc, pour abréger,

$$\frac{\pi c}{ll'}\sqrt{n^2 l'^2+n'^2 l^2}=\gamma, \quad \sin.\frac{n\pi x}{l}\sin.\frac{n'\pi y}{l'}=\mathrm{U},$$

la formule (b) deviendra

$$z=\Sigma\mathrm{U}(\mathrm{H}\sin.\gamma t+\mathrm{H}'\cos.\gamma t). \qquad (c)$$

On pourra convenir de réunir les termes qui ne diffèrent que par le signe de n ou de n', et de n'étendre ensuite la somme Σ qu'à des nombres entiers et positifs, ou zéro, depuis $n=0$ et $n'=0$ jusqu'à $n=\infty$ et $n'=\infty$.

Pour déterminer, d'après l'état initial de la membrane, les coefficients H et H' en fonctions de n et n', je désigne par V ce que devient U quand on y remplace n et n' par deux

autres nombres entiers i et i', en sorte qu'on ait

$$V = \sin.\frac{i\pi x}{l}\sin.\frac{i'\pi y}{l'}.$$

Après avoir multiplié les deux membres de l'équation (a) par $V\,dx\,dy$, j'en prends les intégrales que j'étends à la membrane entière, ce qui donne

$$\frac{d^2.\int_0^l\int_0^{l'} Vz\,dx\,dy}{dt^2} = c^2\left(\int_0^l\int_0^{l'} V\frac{d^2z}{dx^2}dx\,dy + \int_0^l\int_0^{l'} V\frac{d^2z}{dy^2}dx\,dy\right).$$

Dans le second membre de cette équation, j'intègre par partie, savoir : le premier terme relativement à x et le second relativement à y; à cause que les quantités z et V sont nulles aux limites de ces intégrations, il vient

$$\frac{d^2.\int_0^l\int_0^{l'} Vz\,dx\,dy}{dt^2} = c^2\int_0^l\int_0^{l'}\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}\right)z\,dx\,dy;$$

d'ailleurs on a identiquement,

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2} = -\frac{\gamma'^2}{c^2}V,$$

en désignant par γ' ce que devient γ quand on met i et i' au lieu de n et n'; l'équation précédente est donc la même chose que

$$\frac{d^2.\int_0^l\int_0^{l'} Vz\,dx\,dy}{dt^2} + \gamma'^2\int_0^l\int_0^{l'} Vz\,dx\,dy = 0.$$

En l'intégrant et désignant par A et B les deux constantes arbitraires, nous aurons

$$\int_0^l\int_0^{l'} \mathrm{V} z\,dx\,dy = \mathrm{A}\sin.\gamma' t + \mathrm{B}\cos.\gamma' t. \qquad (d)$$

Si nous comptons le temps t de l'origine du mouvement, et si nous supposons qu'on ait

$$z = f(x, y), \quad \frac{dz}{dt} = \mathrm{F}(x, y),$$

quand $t = 0$, ces deux fonctions f et F seront données pour toute l'étendue de la membrane dont elles exprimeront l'état initial. Or, en faisant $t = 0$ dans l'équation (d) et dans sa différentielle relative à t, il en résultera

$$\mathrm{A} = \frac{1}{\gamma'}\int_0^l\int_0^{l'} \mathrm{V}\,\mathrm{F}(x, y)\,dx\,dy, \quad \mathrm{B} = \int_0^l\int_0^{l'} \mathrm{V} f(x, y)\,dx\,dy,$$

pour les valeurs de A et B.

Je substitue la formule (c) à la place de z dans le premier membre de l'équation (d); son second membre ne contenant que les sinus et cosinus de $\gamma' t$, les coefficients de $\sin.\gamma t$ et $\cos.\gamma t$ devront être nuls dans le premier, excepté dans le cas de $\gamma = \gamma'$; on aura donc

$$\int_0^l\int_0^{l'} \mathrm{U}\mathrm{V}\,dx\,dy = 0,$$

toutes les fois que γ et γ' seront différents. On a, en effet,

$$\int_0^l \sin.\frac{n\pi x}{l}\sin.\frac{i\pi x}{l}\,dx = 0, \quad \int_0^{l'} \sin.\frac{n'\pi y}{l'}\sin.\frac{i'\pi y}{l'}\,dy = 0,$$

excepté lorsqu'on suppose $n = i$, $n' = i'$, et par conséquent

$\gamma=\gamma'$. Il ne restera donc dans le premier membre de l'équation (d) que les termes qui répondent à $n=i$ et $n'=i'$; et en les comparant à ceux du second membre, on en conclura

$$\mathrm{H}\int_0^l\int_0^{l'}\mathrm{U}^2\,dx\,dy=\mathrm{A},\ \ \mathrm{H}'\int_0^l\int_0^{l'}\mathrm{U}^2\,dx\,dy=\mathrm{B}.$$

En effectuant l'intégration, on a

$$\int_0^l\int_0^{l'}\mathrm{U}^2\,dx\,dy=\frac{l'l}{4};$$

d'après les valeurs précédentes de A et B, dans lesquelles on mettra n et n' à la place de i et i', on aura donc

$$\mathrm{H}=\frac{4}{\gamma ll'}\int_0^l\int_0^{l'}\mathrm{F}(x,y)\sin.\frac{n\pi x}{l}\sin.\frac{n'\pi y}{l'}\,dx\,dy,$$

$$\mathrm{H}'=\frac{4}{ll'}\int_0^l\int_0^{l'}f(x,y)\sin.\frac{n\pi x}{l}\sin.\frac{n'\pi y}{l'}\,dx\,dy;$$

au moyen de quoi la formule (c) ne renfermera plus que des quantités données. Cette expression de z et la valeur de $\frac{dz}{dt}$ qui s'en déduit, feront connaître l'état de la membrane à un instant quelconque, et seront, par conséquent, la solution complète du problème qu'il s'agissait de résoudre.

En faisant $t=0$ dans l'équation (c), et mettant x' et y' au lieu de x et y sous les signes d'intégration, il en résulte cette formule connue :

$$f(x,y)=\frac{4}{ll'}\Sigma\left\{\int_0^l\int_0^{l'}f(x',y')\sin.\frac{n\pi x'}{l}\sin.\frac{n\pi y'}{l'}\,dx'dy'\right\}\sin.\frac{n\pi x}{l}\sin.\frac{n\pi y}{l'},$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de x et y, depuis $x=0$ et $y=0$, jusqu'à $x=l$ et $y=l'$, et aux limites mêmes, pourvu que la fonction $f(x,y)$ y soit nulle.

(61) La quantité γ' étant la même que précédemment, supposons que la formule (c) ne contienne que des termes relatifs à des valeurs de γ multiples de γ', de sorte que, d'après l'état initial de la membrane, les coefficients de tous les autres termes soient nuls. Cette condition est nécessaire et suffisante pour que la membrane exécute des vibrations isochrones et fasse entendre un son unique et appréciable. En appelant τ la durée de chaque vibration entière, nous aurons

$$\tau=\frac{2\pi}{\gamma'}=\frac{2ll'}{c\sqrt{i^2l'^2+i'^2l^2}}.$$

Si l'on désigne par g la gravité et par p le poids de la membrane vibrante, on aura aussi

$$p=g\rho\varepsilon ll', \quad c^2=\frac{C}{\rho\varepsilon}=\frac{Cgll'}{p};$$

et si nous appelons μ le nombre de vibrations dans l'unité de temps, ou la valeur de $\frac{1}{\tau}$, il en résultera

$$\mu=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(i^2l'^2+i'^2l^2)Cg}{ll'p}};$$

formule au moyen de laquelle on pourra comparer immédiatement les sons d'une membrane tendue et vibrant transversalement, ou les nombres de vibrations qui leur serviront de mesure, à ceux d'une corde élastique (nº 30). Le son le plus grave répondra à $i=1$ et $i'=1$; à égalité de poids et de tension de la membrane, il atteindra son *maximum* de

gravité quand on aura $l'=l$, ou quand la membrane sera un carré; la valeur de μ sera alors

$$\mu=\sqrt{\frac{Cg}{2p}};$$

où l'on voit que le poids d'une membrane carrée restant le même, le son qu'elle fera entendre sera indépendant de l'étendue de sa surface, ce qui mériterait d'être vérifié par l'expérience.

(62) La condition $\gamma=m\gamma'$ dans laquelle m est un nombre entier quelconque, est la même chose que

$$\frac{n^2}{l^2}+\frac{n'^2}{l'^2}=\frac{m^2 i^2}{l^2}+\frac{m^2 i'^2}{l'^2}. \qquad (e)$$

Si les deux côtés l et l' de la membrane sont incommensurables, on n'y pourra satisfaire qu'en prenant

$$n=mi, \quad n'=mi'.$$

Je désigne par G et G′ les coefficients H et H′ de la formule (c) qui répondent à ces valeurs de n et n'; dans le cas des vibrations isochrones, cette formule deviendra

$$z=\Sigma(G\sin.m\gamma't+G'\sin.m\gamma't)\sin.\frac{mix}{l}\sin.\frac{mi'y}{l'};$$

la somme Σ se rapportant au nombre entier et positif m, et s'étendant à toutes ses valeurs, depuis $m=1$ jusqu'à $m=\infty$. On voit par cette expression de z que les points de la membrane qui répondent, soit à des valeurs de x multiples de $\frac{l}{i}$, soit à des valeurs de y multiples de $\frac{l'}{i'}$, demeureront en repos pendant toute la durée du mouvement, et qu'il n'y en aura

pas d'autres qui jouissent de cette propriété. Ils formeront des lignes nodales parallèles aux côtés de la membrane qui se divisera en un nombre ii' de rectangles égaux, ayant tous le même mouvement. Dans le cas du son le plus grave, ou de $i=1$ et $i'=1$, il n'y aura que les côtés de la membrane qui resteront immobiles.

Ses côtés étant donc supposés rigoureusement incommensurables, il n'existera jamais qu'un seul système de lignes nodales pour chaque son de la membrane; mais il n'en sera plus de même lorsque l et l' auront une commune mesure. Dans ce cas, qui comprend celui d'une membrane carrée, représentons par λ cette commune mesure, et supposons qu'on ait

$$l=e\lambda,\quad l'=e'\lambda,\quad i=ej,\quad i'=e'j';$$

e, e', j, j', désignant des nombres entiers. Supposons aussi, pour simplifier, que la formule (c) se réduise à la partie qui répond à $\gamma=\gamma'$, et pour laquelle on a $m=1$ dans l'équation (e). Cette condition de l'isochronisme deviendra

$$\frac{n^2}{e^2}+\frac{n'^2}{e'^2}=j^2+j'^2;$$

et l'on y satisfera, soit en prenant $n=ej$ et $n'=e'j'$, soit au moyen de $n=ej'$ et $n'=e'j$. Je représente par A et A' les valeurs de H et H' qui ont lieu dans la première hypothèse et par B et B' les valeurs de ces coefficients qui répondent à la seconde; l'état initial de la membrane étant supposé tel que tous les autres coefficients de la formule (c) soient nuls, cette formule se réduira à

$$z = (A\sin.\gamma' t + A'\cos.\gamma' t)\sin.\frac{j\pi x}{\lambda}\sin.\frac{j'\pi y}{\lambda}$$
$$+ (B\sin.\gamma' t + B'\cos.\gamma' t)\sin.\frac{j'\pi x}{\lambda}\sin.\frac{j\pi y}{\lambda}.$$

Les coordonnées x et y des points de repos seront déterminées par les équations

$$A\sin.\frac{j\pi x}{\lambda}\sin.\frac{j'\pi y}{\lambda} + B\sin.\frac{j'\pi x}{\lambda}\sin.\frac{j\pi y}{\lambda} = 0,$$
$$A'\sin.\frac{j\pi x}{\lambda}\sin.\frac{j'\pi y}{\lambda} + B'\sin.\frac{j'\pi x}{\lambda}\sin.\frac{j\pi y}{\lambda} = 0.$$

Ils formeront, en général, des lignes parallèles aux côtés de la membrane, ou consisteront en des points isolés; mais si, à l'origine du mouvement, les points de la membrane n'ont pas reçu de vitesse, de sorte qu'on ait $A'=0$, $B'=0$, ou, plus généralement, s'il existe entre leurs vitesses initiales et leurs déplacements primitifs, une relation telle que l'on ait

$$AB' = A'B,$$

les deux équations précédentes se réduiront à une seule qui pourra appartenir à d'autres lignes nodales.

En effet, soit, par exemple, $j' = 2j$; cette équation unique prendra la forme :

$$\left(A\cos.\frac{j\pi y}{\lambda} + B\cos.\frac{j\pi x}{\lambda}\right)\sin.\frac{j\pi x}{\lambda}\sin.\frac{j\pi y}{\lambda} = 0.$$

Elle se décomposera, comme on voit, en trois facteurs : les deux derniers appartiendront à des lignes nodales, parallèles aux côtés de la membrane, qui la diviseront en un nombre j^2 de rectangles égaux; si l'on a $A = \pm B$, l'équation

$$\cos.\frac{j\pi y}{\lambda} \pm \cos.\frac{j\pi x}{\lambda} = 0$$

appartiendra à leurs diagonales qui seront aussi des lignes nodales; et lorsque A et B seront inégaux, les lignes nodales résultantes du premier facteur seront des lignes courbes dont la forme dépendra du rapport de ces deux coefficients constants. Pour tous ces systèmes différents de lignes nodales, qui peuvent être en nombre infini, le son de la membrane sera le même, et la durée de chaque vibration égale à $\frac{2\pi}{\gamma'}$.

(63) Appliquons maintenant l'équation (a) au cas d'une membrane circulaire. Plaçons l'origine des coordonnées à son centre; désignons par r la distance du point quelconque M à cette origine; et supposons que l'ordonnée z de M à un instant quelconque, soit une fonction de r et t, ce qui revient à dire que tous les points également éloignés du centre ont à chaque instant la même ordonnée et par suite la même vitesse. Pour que cette condition soit remplie pendant toute la durée du mouvement, il suffit évidemment qu'elle ait eu lieu à son origine, ou qu'à cette époque, les valeurs de z et $\frac{dz}{dt}$ soient des fonctions données de la seule variable r.

Dans cette hypothèse, l'équation (a) se transformera en celle-ci :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = c^2 \left(\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr}\right).$$

Son intégrale complète, telle que je l'ai trouvée dans le Mémoire déja cité (n° 56), est

$$z = \int_0^\pi f(ct + r\cos.\omega)\,d\omega + \int_0^\pi \mathrm{F}(ct + r\cos.\omega)\log.(r\cos.^2\omega)\,d\omega,$$

f et F étant les deux fonctions arbitraires. Le second terme

de cette formule, devenant infini quand $r=0$, est étranger à la question, et doit être supprimé. Soit de plus

$$f(ct)=\Sigma(\mathrm{A}\cos. mct+\mathrm{B}\sin. mct);$$

A, B, m, étant des quantités indépendantes de la variable ct, et la somme Σ s'étendant à toutes leurs valeurs possibles, réelles ou imaginaires. En observant qu'on a

$$\int_0^\pi \sin.(mr\cos.\omega)\,d\omega=0,$$

la formule précédente deviendra

$$z=\Sigma(\mathrm{A}\cos. mct+\mathrm{B}\sin. mct)\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\,d\omega. \quad (f)$$

Si l'on représente par l le rayon de la membrane, il faudra qu'on ait $r=0$ pour $r=l$; et cette condition devant être remplie pour toutes les valeurs de t, il en résultera

$$\int_0^\pi \cos.(ml\cos.\omega)\,d\omega=0; \quad (g)$$

équation qui servira à déterminer les valeurs de m. D'après l'état initial de la membrane, on formera les valeurs des coefficients A et B en fonctions de m, par la même analyse que dans le n° 57, et l'on prouvera, en même temps, que l'équation (g) n'a que des racines réelles. Cela fait, la formule (f) renfermera la solution complète de la question qui nous occupe, et il ne s'agit plus que d'en déduire les conséquences relatives aux sons de la membrane.

(64) Les racines de l'équation (g) étant incommensurables,

les vibrations transversales de la membrane ne peuvent être isochrones, et elle ne peut faire entendre un son unique, à moins que la formule (f) ne se réduise à un seul terme. En appelant λ l'une des valeurs de ml tirée de l'équation (g), et désignant par τ la durée de chacune des vibrations isochrones qui répondent au terme correspondant de la formule (f), nous aurons

$$\tau = \frac{2\pi l}{\lambda c}.$$

Soit g la gravité, p le poids de la membrane entière, et n le nombre de ces vibrations dans l'unité de temps, ou la valeur de $\frac{1}{\tau}$; il en résultera

$$p = \pi g \rho \varepsilon l^2, \quad c^2 = \frac{\pi C g l^2}{p}, \quad n = \frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{Cg}{\pi p}};$$

ce qui montre que les poids et la tension de la membrane circulaire restant les mêmes, les sons qu'elle peut rendre ne dépendront pas de l'étendue de sa surface; résultat semblable à celui que nous avons déja trouvé pour une membrane carrée, et qui mériterait aussi d'être confirmé par l'expérience.

Pour résoudre l'équation (g) par approximation, je développe son premier membre, en série ordonnée suivant les puissances de ml ou λ; en faisant $\lambda^2 = 4y$, et observant qu'on a

$$\int_0^\pi \cos.^{2i} \omega \, d\omega = \frac{(1.3.5\ldots.2i-1)\pi}{2^i(1.2.3\ldots.i)},$$

i étant un nombre entier quelconque, cette équation devient

$$1 - y + \frac{y^2}{(1.2)^2} - \frac{y^3}{(1.2.3)^2} + \frac{y^4}{(1.2.3.4)^2} - \text{etc.} = 0.$$

On trouve pour les valeurs approchées de ses deux plus petites racines :

$$y=1,4457, \quad y=7,6243.$$

On a, en même temps,

$$\lambda=2,4047, \quad \lambda=5,5225;$$

et les nombres de vibrations qui mesurent les deux sons les plus graves de la membrane circulaire, seront en conséquence

$$n=(0,6784)\sqrt{\frac{Cg}{p}}, \quad n=(1,5561)\sqrt{\frac{Cg}{p}}.$$

Si l'on compare le premier de ces deux nombres à celui qui a lieu dans le cas d'une membrane carrée (nº 61), de même poids et de même tension que le membrane circulaire, on aura

$$n=\mu(0,9593);$$

ce qui montre que toutes choses d'ailleurs égales, le son provenant des vibrations transversales d'une membrane circulaire, est plus bas d'un vingt-cinquième à peu près que le son qui est dû à celles d'une membrane carrée.

On déterminera comme dans le nº 58 les rayons des lignes nodales qui accompagnent les sons successifs de la membrane circulaire. Sans y comprendre le contour fixe, leur nombre sera égal à m, pour le son dont le rang est marqué par $m+1$. Dans le cas du son qui suit immédiatement le plus grave, le rayon de la ligne nodale, conclu des deux premières valeurs de λ, comme dans le numéro cité, aura pour valeur :

$$r=\frac{(2,4047)\,l}{5,5225}=(0,4347)\,l.$$

Excepté les deux ou trois premières racines de l'équation (g), les suivantes s'obtiendraient très-difficilement par la réduction en série de son premier membre; mais cette équation s'étant déja présentée dans une autre question (*), je lui ai fait subir une transformation qui donne immédiatement les valeurs approchées de ses plus grandes racines, et qui s'appliquerait déja à la troisième avec une exactitude suffisante.

§ VI.

Équations de l'équilibre et du mouvement d'une plaque élastique.

(65) Dans son état naturel, la plaque dont nous allons nous occuper sera supposée plane et d'une épaisseur constante, c'est-à-dire, qu'elle sera comprise entre deux plans parallèles qui formeront ses *faces* et dont la distance mutuelle exprimera son épaisseur. Ses *bords* seront des plans ou des portions de surfaces cylindriques, perpendiculaires aux faces. Nous représenterons son épaisseur par 2ε, et nous la supposerons très-petite à l'égard de ses autres dimensions; mais elle sera cependant assez grande pour que la plaque tende à reprendre la figure plane quand elle en aura été écartée par des forces données, et pour qu'elle exécute des vibrations transversales dès que ces forces auront disparu. Il sera nécessaire maintenant de tenir compte de la variation

(*) Journal de l'École polytechnique, 19e cahier, page 349.

66.

des forces moléculaires dans le sens de l'épaisseur; c'est la différence essentielle entre le cas que nous allons traiter, et celui d'une membrane flexible dans lequel nous avons considéré l'épaisseur comme infiniment petite et ces forces comme constantes (n° 51).

Pour appliquer les formules du n° 7 à la plaque élastique, menons dans son état naturel un plan parallèle à ses faces, également éloigné de l'une et de l'autre, et que nous appellerons pour cette raison plan de la section moyenne. Prenons ce plan pour celui des x, y; soit M un point quelconque de cette section, dont x et y sont les coordonnées primitives; désignons par $x+u$, $y+v$ et z, les trois coordonnées du même point après le changement de forme de la plaque, de sorte que u, v, z, soient des fonctions inconnues de x et y. Soit M′ un autre point situé primitivement dans la perpendiculaire au plan des x, y, dont le pied est le point M; appelons ζ sa troisième coordonnée primitive, et $x+u'$, $y+v'$, $\zeta+w'$, ce que deviennent ses trois coordonnées après le changement de forme; u', v', w', étant des fonctions inconnues de x, y, ζ, qui coïncideront avec u, v, z, dans le cas de $\zeta=0$. Ces déplacements des points M et M′ seront de très-petites quantités, afin que les formules du n° 7 soient applicables, et d'après la petitesse de l'ordonnée z, la section moyenne de la plaque s'écartera très-peu du plan des x, y, après son changement de forme.

A cause de $K=0$, les formules du numéro cité, rapportée au point M′, deviendront

$$
\left.\begin{aligned}
R_3 &= P_1 = -k\left(\frac{du'}{d\zeta}+\frac{dw'}{dx}\right),\\
Q_3 &= P_2 = -k\left(\frac{du'}{dy}+\frac{dv'}{dx}\right),\\
R_2 &= Q_1 = -k\left(\frac{dv'}{d\zeta}+\frac{dw'}{dy}\right),\\
P_3 &= -k\left(3\frac{du'}{dx}+\frac{dv'}{dy}+\frac{dw'}{d\zeta}\right),\\
Q_2 &= -k\left(\frac{du'}{dx}+3\frac{dv'}{dy}+\frac{dw'}{d\zeta}\right),\\
R_1 &= -k\left(\frac{du'}{dx}+\frac{dv'}{dy}+3\frac{dw'}{d\zeta}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1)
$$

La variable ζ étant très-petite, si l'on développe les inconnues u', v', w', suivant les puissances de ζ, on aura des séries généralement très-convergentes. Nous exclurons l'exception qui pourrait avoir lieu, et qui proviendrait de ce que ces inconnues varieraient très-rapidement dans le sens de l'épaisseur, comme cela arriverait, par exemple, si leurs valeurs dépendaient du rapport $\frac{\zeta}{\varepsilon}$. L'analyse suivante et les conséquences qui s'en déduisent seront fondées essentiellement sur la possibilité de ce développement. Ainsi, nous aurons ces séries très-convergentes :

$$
\begin{aligned}
u' &= u + \frac{du'}{d\zeta}\zeta + \frac{1}{2}\frac{d^2u'}{d\zeta^2}\zeta^2 + \text{etc.},\\
v' &= v + \frac{dv'}{d\zeta}\zeta + \frac{1}{2}\frac{d^2v'}{d\zeta^2}\zeta^2 + \text{etc.},\\
w' &= z + \frac{dw'}{d\zeta}\zeta + \frac{1}{2}\frac{d^2w'}{d\zeta^2}\zeta^2 + \text{etc.},
\end{aligned}
$$

qui résultent du théorème de Taylor, et dans les coefficients desquelles on fera $\zeta = 0$ après les différentiations.

Au moyen des équations d'équilibre de la plaque, on déterminera successivement, les uns d'après les autres, les coefficients de ces séries, et l'on connaîtra l'état de la plaque à tel degré d'approximation qu'on le jugera convenable. Nous nous arrêterons à la première puissance de ζ, de sorte que nous aurons simplement :

$$u' = u + \frac{du'}{d\zeta}\zeta, \quad v' = v + \frac{dv'}{d\zeta}\zeta, \quad w' = z + \frac{dw'}{d\zeta}\zeta; \qquad (2)$$

formules qui ne contiendront que six inconnues dont il s'agira de trouver les valeurs en fonctions de x et y. L'expression de z fera connaître la forme que prendra la section moyenne ; les valeurs de u et v seront les déplacements de ses points suivant sa propre direction ; la différence des valeurs de w' qui repondent à $\zeta = \pm \varepsilon$, exprimera l'épaisseur de la plaque, devenue variable d'un point à un autre après le changement de forme.

(66) Si l'on désigne par X', Y', Z', les composantes parallèles aux axes des x, y, z, de la force donnée qui agit au point M', les équations (3) du nº 8 appliquées à ce point seront :

$$\left.\begin{aligned} X'\rho &= \frac{dP_1}{d\zeta} + \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx}, \\ Y'\rho &= \frac{dQ_1}{d\zeta} + \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dP_2}{dx}, \\ Z'\rho &= \frac{dR_1}{d\zeta} + \frac{dQ_1}{dy} + \frac{dP_1}{dx}; \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

et elles auront lieu pour toutes les valeurs de x, y et ζ.

Si le point M' appartient à l'une des faces de la plaque, et que l'on veuille former pour ce point les équations (4) du nº 10, on y fera

$$c=0, \quad c'=0, \quad c''=\pm 1, \quad \zeta=\pm\varepsilon,$$

à cause que les angles dont c, c', c'', sont les cosinus, répondent à l'état naturel de la plaque, et que dans cet état, les deux faces sont parallèles au plan des x, y, dont elles sont éloignées de la demi-épaisseur ε. Pour simplifier la question, nous supposerons qu'aucune force particulière n'est appliquée aux faces de la plaque, ce qui rendra nuls les termes X_1, Y_1, Z_1, des équations (4). Il en résultera que pour la double valeur $\zeta=\pm\varepsilon$, les trois forces P_1, Q_1, R_1, seront égales à zéro; en développant ces quantités suivant les puissances de ζ, et s'arrêtant à la troisième inclusivement, on en conclura ces six équations :

$$\left.\begin{array}{l} P_1+\frac{1}{2}\frac{d^2P_1}{d\zeta^2}\varepsilon^2=0,\ Q_1+\frac{1}{2}\frac{d^2Q_1}{d\zeta^2}\varepsilon^2=0,\ R_1+\frac{1}{2}\frac{d^2R_1}{d\zeta^2}\varepsilon^2=0, \\ \frac{dP_1}{d\zeta}+\frac{1}{6}\frac{d^3P_1}{d\zeta^3}\varepsilon^2=0,\ \frac{dQ_1}{d\zeta}+\frac{1}{6}\frac{d^3Q_1}{d\zeta^3}\varepsilon^2=0,\ \frac{dR_1}{d\zeta}+\frac{1}{6}\frac{d^3R_1}{d\zeta^3}\varepsilon^2=0, \end{array}\right\} (4)$$

dans lesquelles on fera $\zeta=0$ après les différentiations effectuées.

Nous formerons plus loin les équations relatives aux bords de la plaque. La question qui doit maintenant nous occuper consiste à éliminer entre les équations (3) et (4), les différences partielles de u', v', w', du second ordre et des ordres supérieurs par rapport à ζ, qui répondent à $\zeta=0$, et à en déduire les valeurs des six inconnues que renferment les formules (2).

(67) Pour y parvenir, désignons par X, Y, Z, les forces appliquées au point M de la section moyenne, ou ce que deviennent X', Y', Z', quand $\zeta=0$. Donnons à ζ cette valeur

dans les deux premières équations (3); substituons-y ensuite pour $\frac{dP_1}{d\zeta}$ et $\frac{dQ_1}{d\zeta}$, leurs valeurs tirées des équations (4); puis négligeons dans leurs seconds membres, les termes qui ont ε^2 pour facteur, et qui sont très-petits par rapport aux termes indépendants de ε : nous aurons simplement

$$X\rho = \frac{dP_2}{dy} + \frac{dP_3}{dx}, \quad Y\rho = \frac{dQ_2}{dy} + \frac{dP_2}{dx}. \qquad (5)$$

Faisons de même $\zeta = 0$ dans la troisième équation (3); mettons-y pour les différences partielles de P_1, Q_1, R_1, leurs valeurs tirées des équations (4) et de leurs différentielles relatives à x et y; mais observons que, par suite de cette substitution, tous les termes de son second membre se trouvant mutipliés par ε^2, on ne pourra pas négliger les termes de cet ordre que nous avons conservés pour cette raison dans les équations (4): on aura de cette manière

$$Z\rho = -\frac{\varepsilon^2}{6}\left(\frac{d^3 R_1}{d\zeta^3} + 3\frac{d^3 Q_1}{d\zeta^2 dy} + 3\frac{d^3 P_1}{d\zeta^2 dx}\right).$$

En différentiant deux fois la dernière équation (3) par rapport à ζ, on a

$$\frac{d^2.Z'\rho}{d\zeta^2} = \frac{d^3 R_1}{d\zeta^3} + \frac{d^3 Q_1}{d\zeta^2 dy} + \frac{d^3 P_1}{d\zeta^2 dx}.$$

Je fais $\zeta = 0$ dans cette formule, puis je la multiple par $\frac{1}{6}\varepsilon^2$, et je l'ajoute à la précédente; il vient

$$Z\rho + \frac{\varepsilon^2}{6}\frac{d^2.Z'\rho}{d\zeta^2} = -\frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{d^3 Q_1}{d\zeta^2 dy} + \frac{d^3 P_1}{d\zeta^2 dx}\right).$$

Les deux premières équations (3) donnent aussi

$$\frac{d^2.X'\rho}{d\zeta dy}=\frac{d^3P_1}{d\zeta^2 dx}+\frac{d^3P_2}{d\zeta dx dy}+\frac{d^3P_3}{d\zeta dx^2},$$

$$\frac{d^2.Y'\rho}{d\zeta dy}=\frac{d^3Q_1}{d\zeta^2 dy}+\frac{d^3Q_2}{d\zeta dy^2}+\frac{d^3P_2}{d\zeta dx dy};$$

formules dans lesquelles je fais $\zeta=0$, et que j'ajoute ensuite à l'équation précédente après les avoir multipliées par $\frac{\varepsilon^2}{3}$, ce qui donne

$$\left.\begin{array}{l} Z\rho+\frac{\varepsilon^2}{6}\left(\frac{d^2.Z'\rho}{d\zeta^2}+2\frac{d^2.Y'\rho}{d\zeta dy}+2\frac{d^2.X'\rho}{d\zeta dx}\right)=\frac{\varepsilon^2}{3}\left(\frac{d^3P_3}{d\zeta dx^2}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\left.+2\frac{d^3P_2}{d\zeta dx dy}+\frac{d^3Q_2}{d\zeta dy^2}\right). \end{array}\right\} (6)$$

Il ne reste plus à éliminer dans les équations (5) et (6), que les quantités P_2, P_3, Q_2, et leurs différences premières par rapport à ζ; on ne peut pas les simplifier davantage, sans y substituer les valeurs de ces six quantités qui répondent à $\zeta=0$; mais en calculant ces valeurs, on pourra négliger les termes dépendants de ε^2, ce qui permettra de réduire les équations (4) à celles-ci :

$$P_1=0,\ Q_1=0,\ R_1=0,\ \frac{dP_1}{d\zeta}=0,\ \frac{dQ_1}{d\zeta}=0,\ \frac{dR_1}{d\zeta}=0.$$

(68) Nous supposerons la plaque homogène; la densité ρ et le coefficient k seront constants; et en vertu des équations (1), les précédentes deviendront :

$$\frac{du'}{d\zeta}+\frac{dz}{dx}=0,\quad \frac{dv'}{d\zeta}+\frac{dz}{dy}=0,$$

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+3\frac{dw'}{d\zeta}=0,$$

$$\frac{d^2u'}{d\zeta^2}+\frac{d^2w'}{d\zeta dx}=0,\quad \frac{d^2v'}{d\zeta^2}+\frac{d^2w'}{d\zeta dy}=0,$$

$$\frac{d^2u'}{d\zeta dx}+\frac{d^2v'}{d\zeta dy}+3\frac{d^2w'}{d\zeta^2}=0.$$

On a remplacé u', v', w', par u, v, z, dans les termes non différentiés par rapport à ζ, et dans les autres termes, il faudra faire $\zeta = 0$ après les différentiations relatives à cette variable. Ces six équations donnent

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{du'}{d\zeta} = -\frac{dz}{dx}, \quad \frac{dv'}{d\zeta} = -\frac{dz}{dy}, \quad \frac{dw'}{d\zeta} = -\frac{1}{3}\left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right),\\
&\frac{d^2u'}{d\zeta^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dx\,dy}\right), \quad \frac{d^2v'}{d\zeta^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{d^2v}{dy^2}\right),\\
&\frac{d^2w'}{d\zeta^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Les valeurs correspondantes de P_2, P_3, Q_2, et de leurs différences partielles relatives à z, seront

$$\left.\begin{aligned}
&P_2 = -k\left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right),\\
&P_3 = -\frac{2k}{3}\left(4\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy}\right), \quad Q_2 = -\frac{2k}{3}\left(4\frac{dv}{dy} + \frac{du}{dx}\right),\\
&\frac{dP_2}{d\zeta} = 2k\frac{d^2z}{dx\,dy},\\
&\frac{dP_3}{d\zeta} = \frac{2k}{3}\left(4\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right), \quad \frac{dQ_2}{d\zeta} = \frac{2k}{3}\left(4\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (8)$$

(69) D'après ces formules, on voit que l'inconnue z entrera seule dans l'équation (6), et que les équations (5) ne contiendront que les inconnues u et v. Ainsi les déplacements des points de la section moyenne suivant sa direction, et la forme qu'elle prendra, seront indépendants et se détermineront séparément. On voit de plus que les équations (5) seront les mêmes que dans le cas d'une membrane flexible, en sorte qu'à l'égard des valeurs de u et v, nous n'avons rien à ajouter à ce qui a été dit dans le paragraphe précédent. Mais il résulte de la troisième équation (7) que ces déplace-

ments seront toujours accompagnés d'une dilatation normale $\frac{dw'}{d\zeta}$, égale et de signe contraire au tiers de la somme des dilatations $\frac{du}{dx}$ et $\frac{dv}{dy}$ qui ont lieu suivant les directions des x et des y. Si l'on suppose que la plaque a éprouvé parallèlement à ses faces une dilatation linéaire, égale en tous sens et dans toute son étendue, et qu'on la représente par δ, il y aura en même temps une condensation normale, égale à $\frac{2\delta}{3}$. Par l'effet de la dilatation, le volume de la plaque sera augmenté dans le rapport de $(1+\delta)^2$ à l'unité; par l'effet de la condensation, il sera diminué dans le rapport de $1-\frac{2\delta}{3}$ à l'unité; sa variation totale sera donc dans le rapport du produit $(1+\delta)^2\left(1-\frac{2\delta}{3}\right)$ à l'unité, ou simplement, comme $1+\frac{4\delta}{3}$, est à un, en ne conservant que la première puissance de δ. L'extension d'une plaque élastique, dans le sens de ses plus grandes dimensions, donne donc lieu à une augmentation de volume, et, par conséquent, à une diminution de densité; résultat semblable à celui que présente un fil élastique (nº 35), mais qui serait plus difficile à vérifier par l'expérience.

Dans ce qui va suivre, nous pourrons faire abstraction des déplacements des points de la section moyenne, parallèlement aux x et aux y, et supposer nulles les inconnues u et v. En vertu des trois premières équations (7), les formules (2) se réduiront alors à

$$u' = -\frac{dz}{dx}\zeta, \quad v' = -\frac{dz}{dy}\zeta, \quad w' = z.$$

Ces valeurs de u' et v' montrent que les points de la plaque qui se trouvaient primitivement sur une même perpendiculaire à la section moyenne, feront encore partie après le changement de forme, d'une même normale à cette section devenue courbe. En chaque point, il y aura, d'un côté de cette même section, dilatation parallèle à sa direction, et condensation du côté opposé. C'est cette différence d'état des faces de la plaque, qui produit son élasticité par flexion, ou sa tendance à revenir à sa forme naturelle : suivant les directions des courbures principales de la section moyenne, les dilatations et condensations dont il est question, seront proportionnelles aux distances à cette surface, et en raison inverse du rayon de courbure correspondant. Soit qu'il y ait équilibre ou mouvement, l'état de la plaque sera connu dans toute son épaisseur lorsqu'on aura déterminé la forme de la section moyenne, ou la valeur de z en fonction de x et y.

(70) Au moyen des formules (8), l'équation (6) devient

$$Z + \frac{\varepsilon^2}{6}\left(\frac{d^2 Z'}{d\zeta^2} + 2\frac{d^2 Y'}{d\zeta dy} + 2\frac{d^2 X'}{d\zeta dx}\right) = \frac{8k\varepsilon^2}{9\rho}\left(\frac{d^4 z}{dx^4} + 2\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2} + \frac{d^4 z}{dy^4}\right). \quad (9)$$

Dans le cas de l'équilibre, ce sera l'équation aux différences partielles de la surface demandée; les forces Z, X', Y', Z', étant données alors en fonctions de x, y et ζ. Dans le cas du mouvement, et en supposant qu'aucune force donnée n'agit sur les points de la plaque, il y faudra faire

$$Z = -\frac{d^2 z}{dt^2}, \quad X' = -\frac{d^2 u'}{dt^2}, \quad Y' = -\frac{d^2 v'}{dt^2}, \quad Z' = -\frac{d^2 w'}{dt^2}.$$

Si l'on fait $\zeta = 0$ après les différentiations, et qu'on ait égard aux équations (7), on aura

$$\frac{dX'}{d\zeta}=\frac{d^3 z}{dx\,dt^2},\quad \frac{dY'}{d\zeta}=\frac{d^3 z}{dy\,dt^2},$$
$$\frac{d^2 Z'}{d\zeta^2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{d^4 z}{dx^2 dt^2}+\frac{d^4 z}{dy^2 dt^2}\right);$$

par conséquent le premier membre de l'équation (9) deviendra

$$-\frac{d^2 z}{dt^2}+\frac{5\varepsilon^2}{18}\left(\frac{d^4 z}{dx^2 dt^2}+\frac{d^4 z}{dy^2 dt^2}\right);$$

or, la partie qui a ε^2 pour facteur est évidemment très-petite et peut être négligée par rapport au premier terme; cette équation sera donc simplement

$$\frac{d^2 z}{dt^2}+a^2\left(\frac{d^4 z}{dx^4}+2\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2}+\frac{d^4 z}{dy^4}\right)=0, \qquad (10)$$

en faisant, pour abréger,

$$a^2=\frac{8k\varepsilon^2}{9\rho}.$$

On joindra aux équations (9) et (10) celles qui sont relatives au contour de la plaque, et qui serviront, avec son état initial dans le cas du mouvement, à déterminer les quantités arbitraires que contiendront leurs intégrales. Ce sont ces équations particulières qui nous restent à former.

(71) Par le point M′, faisons dans la plaque une section perpendiculaire à ses faces. Soit θ l'angle compris entre la normale à cette section et l'axe des x. Pour appliquer au point M′ les équations (2) du n° 7, il y faudra faire

$$c=\cos.\theta,\quad c'=\sin.\theta,\quad c''=0;$$

d'où il résultera

$$P = P_2 \sin.\theta + P_3 \cos.\theta,$$
$$Q = Q_2 \sin.\theta + P_2 \cos.\theta,$$
$$R = Q_1 \sin.\theta + P_1 \cos.\theta.$$

L'angle θ répond à la partie de la normale à la section que l'on considère, menée avant le changement de forme de la plaque, et comprise dans celle des deux portions de la plaque séparées par cette section, sur laquelle on suppose que les forces P, Q, R, exercent leur action. Il est indépendant de l'ordonnée ζ du point M'.

Les quantités u et v ayant été supposées nulles, les valeurs de P_2, P_3, Q_2, qui répondent à $\zeta = o$, le sont aussi d'après les équations (8). En négligeant donc les puissances de ζ supérieures à la première, les valeurs précédentes de P et Q deviendront

$$P = \zeta\left(\frac{dP_2}{d\zeta}\sin.\theta + \frac{dP_3}{d\zeta}\cos.\theta\right),\ Q = \zeta\left(\frac{dQ_2}{d\zeta}\sin.\theta + \frac{dP_2}{d\zeta}\cos.\theta\right),$$

Les résultantes de ces forces dans toute l'épaisseur de la plaque, ou les intégrales $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} P\,d\zeta$ et $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Q\,d\zeta$ seront égales à zéro; mais il n'en sera de même à l'égard de leurs moments. Si l'on mène par le point M de la section moyenne, deux axes parallèles à ceux des x et des y, et que l'on désigne par μ la somme des moments des forces P par rapport à l'axe parallèle à celui des y, et par μ' la somme des moments des forces Q par rapport à l'axe parallèle à celui des x, nous aurons

$$\mu = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} P\zeta\,d\zeta,\quad \mu' = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Q\zeta\,d\zeta,$$

c'est-à-dire,

$$\mu = \frac{2\varepsilon^5}{3}\left(\frac{dP_2}{d\zeta}\sin.\theta + \frac{dP_3}{d\zeta}\cos.\theta\right),\quad \mu' = \frac{2\varepsilon^3}{3}\left(\frac{dQ_2}{d\zeta}\sin.\theta + \frac{dP_2}{d\zeta}\cos.\theta\right),$$

ou bien, en ayant égard aux équations (8),

$$\left.\begin{aligned}\mu &= \frac{4k\varepsilon^3}{9}\left[3\frac{d^2z}{dx\,dy}\sin.\theta + \left(4\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right)\cos.\theta\right],\\ \mu' &= \frac{4k\varepsilon^3}{9}\left[3\frac{d^2z}{dx\,dy}\cos.\theta + \left(4\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\right)\sin.\theta\right].\end{aligned}\right\}\quad (11)$$

Développons de même les quantités P_1 et Q_1 suivant les puissances de ζ; éliminons les coefficients des deux premiers termes de chaque série au moyen des équations (4); négligeons ensuite les quantités du troisième ordre par rapport à ζ et ε; la valeur précédente de R sera

$$R = \tfrac{1}{2}(\zeta^2 - \varepsilon^2)\left(\frac{d^2Q_1}{d\zeta^2}\sin.\theta + \frac{d^2P_1}{d\zeta^2}\cos.\theta\right).$$

Appelons V la résultante des forces R dans toute l'épaisseur de la plaque, en sorte qu'on ait

$$V = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} R\,d\zeta;$$

l'intégration effectuée, on aura

$$V = -\frac{2\varepsilon^3}{3}\left(\frac{d^2Q_1}{d\zeta^2}\sin.\theta + \frac{d^2P_1}{d\zeta^2}\cos.\theta\right).$$

Pour la valeur particulière $\zeta = 0$, les deux premières équations (3) donnent

$$\frac{d^2P_1}{d\zeta^2} = \rho\frac{dX'}{d\zeta} - \frac{d^2P_2}{d\zeta\,dy} - \frac{d^2P_3}{d\zeta\,dx} = \rho\frac{dX'}{d\zeta} - \frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right),$$

$$\frac{d^2Q_1}{d\zeta^2} = \rho\frac{dY'}{d\zeta} - \frac{d^2P_2}{d\zeta\,dx} - \frac{d^2Q_2}{d\zeta\,dy} = \rho\frac{dY'}{d\zeta} - \frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dy^3} + \frac{d^3z}{dy\,dx^2}\right),$$

en ayant égard aux formules (8). Par conséquent nous aurons

$$V = \frac{2\varepsilon^3}{3}\left[\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right) - \rho\frac{dX'}{d\zeta}\right)\cos.\theta + \left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3 z}{dy^3} + \frac{d^3 z}{dy\,dx^2}\right) - \rho\frac{dY'}{d\zeta}\right)\sin.\theta\right]. \quad (12)$$

On peut aussi remarquer que d'après les deux formules précédentes, les valeurs de $\frac{du'}{d\zeta}$ et $\frac{dv'}{d\zeta}$, tirées des deux premières équations (4), seront

$$\frac{du'}{d\zeta} = -\frac{dz}{dx} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\rho}{k}\frac{dX'}{d\zeta} - \frac{8}{3}\left(\frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{d^3 z}{dx\,dy^2}\right)\right],$$

$$\frac{dv'}{d\zeta} = -\frac{dz}{dy} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\frac{\rho}{k}\frac{dY'}{d\zeta} - \frac{8}{3}\left(\frac{d^3 z}{dy^3} + \frac{d^3 z}{dx^2\,dy}\right)\right],$$

lorsqu'on y conservera les termes multipliés par ε^2, ce qui sera nécessaire dans un des cas du numéro suivant.

(73) Maintenant désignons par F la force donnée qui agit sur toute l'épaisseur de la plaque en un point quelconque de ses bords. Cette force devra être parallèle à l'axe des z, afin qu'il n'en résulte, ainsi qu'on l'a supposé, aucun déplacement des points de la section moyenne suivant les axes des x et y; mais, outre la force normale F, d'autres forces correspondantes au même point des bords et parallèles à ces deux axes, pourront agir d'un côté et de l'autre de la section moyenne, pourvu que leurs résultantes ou leurs sommes dans toute l'épaisseur de la plaque soient égales à zéro, ce qui ne rendra pas nulles les sommes de leurs moments. Soit M_1 le point du contour de la section moyenne qui répond à la force F; par ce point, menons deux axes l'un parallèle à celui des y et l'autre parallèle à l'axe des x; par rapport

au premier axe et pour l'épaisseur entière de la plaque au point M_1, représentons par H la somme des moments de la force F et des autres forces s'il en existe, et par rapport au second axe, appelons H' la somme des moments des mêmes forces. S'il n'y a, par exemple, que la force F, et qu'elle agisse à l'extrémité d'un bras de levier, passant par le point M_1, dont la longueur soit h, et dont la direction fasse un angle g avec l'axe des x, on aura

$$H = Fh\cos.g, \quad H' = Fh\sin.g.$$

Dans ce cas les moments H et H' seront zéro en même temps que la force F; mais en général, ces trois quantités F, H, H', seront indépendantes l'une de l'autre.

Cela posé, supposons que la section de la plaque pour laquelle nous venons de calculer les forces moléculaires et leurs moments, soit très-rapprochée de la partie du bord à laquelle le point M_1 appartient, de telle sorte que la portion de la plaque comprise entre cette section et le bord soit assez petite pour qu'il soit permis de considérer toutes le forces qui la sollicitent comme sensiblement constantes. Soit γ l'aire de la section moyenne qui répond à cette petite portion de la plaque, s la partie de son contour appartenant au bord de la plaque, et s' l'autre partie; la résultante des forces qui agissent sur tous les points de cette portion de la plaque, sera proportionnelle à γ, tandis que les résultantes des forces relatives à son contour seront proportionnellee à s et s'; pour cette raison, on pourra négliger la première force; et les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre de la petite portion de la plaque dont il est question, seront exprimées, d'après les règles ordinaires de la statique, par

ces trois équations :

$$sF + s'V = 0, \quad sH - s'\mu = 0, \quad sH' - s'\mu' = 0.$$

Après y avoir substitué pour μ, μ', V, les formules (11) et (12), on pourra supposer que le point M de la section moyenne, dont les coordonnées sont x et y, appartient au contour même de la section; prendre pour θ l'angle compris entre l'axe des x et la normale à ce contour menée par le point M en dehors de la plaque; et regarder comme égales, les deux quantités s et s'. De cette manière, on aura

$$\left.\begin{aligned}
&F + \frac{2\varepsilon^3}{3}\left[\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dx^3} + \frac{d^3z}{dxdy^2}\right) - \rho\frac{dX'}{d\zeta}\right)\cos.\theta\right.\\
&\qquad\qquad \left. + \left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dy^3} + \frac{d^3z}{dydx^2}\right) - \rho\frac{dY'}{d\zeta}\right)\sin.\theta\right] = 0,\\
&H - \frac{4k\varepsilon^3}{9}\left[3\frac{d^2z}{dxdy}\sin.\theta + \left(4\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right)\cos.\theta\right] = 0,\\
&H' - \frac{4k\varepsilon^3}{9}\left[3\frac{d^2z}{dxdy}\cos.\theta + \left(4\frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z}{dx^2}\right)\sin.\theta\right] = 0;
\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

équations qui subsisteront pour toutes les parties des bords qui ne sont pas gênées par des obstacles fixes.

Dans les points où le bord sera appuyé de manière qu'il ne puisse pas glisser parallèlement à l'axe des z, la première de ces trois équations n'aura plus lieu, et elle sera remplacée par la condition $z = 0$. La force V donnée par la formule (11), exprimera alors la pression parallèle à l'axe des z et rapportée à l'unité de longueur, que les points d'appui auront à supporter.

Dans les points où la plaque sera *encastrée,* ou assujétie de telle sorte que son bord ne pourra, ni glisser, ni tourner sur lui-même, ni tourner autour de la tangente à la section

moyenne, aucune des trois équations (13) ne subsistera ; mais outre la condition $z=0$, il faudra que les déplacements u' et v' soient aussi nuls dans toute l'épaisseur de la plaque ; ce qui exigera qu'on ait, en vertu des formules (2) :

$$\frac{du'}{d\zeta}=0, \quad \frac{dv'}{d\zeta}=0;$$

équations dans lesquelles on emploiera les valeurs de $\frac{du'}{d\zeta}$ et $\frac{dv'}{d\zeta}$ du numéro précédent. Dans les applications qu'on en fera, il sera plus commode de les remplacer par celles-ci :

$$\frac{du'}{d\zeta}\frac{dy}{ds}-\frac{dv'}{d\zeta}\frac{dx}{ds}=0, \quad \frac{du'}{d\zeta}\frac{dx}{ds}+\frac{dv'}{d\zeta}\frac{dy}{ds}=0,$$

qui leur sont équivalentes, et où l'on a représenté par ds l'élément différentiel du contour. On pourra négliger, dans la première, les termes multipliés par ε^2, qui sont très-petits par rapport aux termes indépendants de l'épaisseur, ce qui la réduira à

$$\frac{dz}{dx}\frac{dy}{ds}-\frac{dz}{dy}\frac{dx}{ds}=0.$$

Il n'en sera pas de même à l'égard de la seconde équation, laquelle devient

$$\frac{dz}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{ds}+\frac{\varepsilon^2}{2}\Big[\frac{\rho}{k}\Big(\frac{dX'}{d\zeta}\frac{dx}{ds}+\frac{dY'}{d\zeta}\frac{dy}{ds}\Big)$$
$$-\frac{8}{3}\Big(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dxdy^2}\Big)\frac{dx}{ds}-\frac{8}{3}\Big(\frac{d^3z}{dy^3}+\frac{d^3z}{dydx^2}\Big)\frac{dy}{ds}\Big]=0,$$

après la substitution des valeurs de $\frac{du'}{d\zeta}$ et $\frac{dv'}{d\zeta}$. Or, si l'on différentie l'équation $z=0$, par rapport à x et y, en y con-

sidérant ces variables comme des fonctions de s, données par l'équation du contour, on a

$$\frac{dz}{dx}\frac{dx}{ds}+\frac{dz}{dy}\frac{dy}{ds}=0;$$

ce qui fait disparaître dans la précédente la partie indépendante de ε, et la réduit aux termes multipliés par ε^2, qu'il a fallu conserver pour cette raison. De cette manière, les trois équations relatives à une partie encastrée des bords de la plaque, seront

$$\left.\begin{array}{l} z=0, \\ \frac{dz}{dx}\frac{dy}{ds}-\frac{dz}{dy}\frac{dx}{ds}=0, \\ \frac{\rho}{k}\left(\frac{dX'}{d\zeta}\frac{dx}{ds}+\frac{dY'}{d\zeta}\frac{dy}{ds}\right)-\frac{8}{3}\frac{d.\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)}{ds}=0, \end{array}\right\} \quad (14)$$

en supprimant dans la troisième, le facteur $\frac{1}{2}\varepsilon^2$, commun à tous les termes.

Ces formules relatives aux différentes parties du contour de la section moyenne, conviennent aux deux cas de l'équilibre et du mouvement. Mais dans le cas du mouvement, et en supposant toujours qu'aucune force donnée n'agit sur les points de la plaque, il faudra prendre comme plus haut (nº 70) :

$$\frac{dX'}{d\zeta}=\frac{d^3z}{dx\,dt^2}, \quad \frac{dY'}{d\zeta}=\frac{d^3z}{dy\,dt^2};$$

en observant donc qu'on a $a^2\rho=\frac{8k\varepsilon^2}{9}$, et ayant égard à l'équation (10), on voit que les termes $\rho\frac{dX'}{d\zeta}$ et $\rho\frac{dY'}{d\zeta}$ de la première équation (13) et de la dernière équation (14) se-

ront très-petits et pourront être négligés par rapport aux autres termes. Avant de terminer ce paragraphe, nous allons nous servir des équations (13) pour vérifier les conditions ordinaires de l'équilibre de toutes les forces données qui agissent sur une plaque élastique dont les bords sont entièrement libres, ce qui servira de confirmation à notre analyse.

(74) D'après les notations précédentes, ces conditions seront exprimées par trois équations, savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z'\rho\, d\zeta\right) dx\, dy + \int F\, ds = 0,\\
&\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z'\rho\, d\zeta\right) x\, dx\, dy - \iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} X'\rho\zeta\, d\zeta\right) dx\, dy\\
&\qquad\qquad + \int (xF + H)\, ds = 0,\\
&\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z'\rho\, d\zeta\right) y\, dx\, dy - \iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Y'\rho\zeta\, d\zeta\right) dx\, dy\\
&\qquad\qquad + \int (yF + H')\, ds = 0;
\end{aligned}\right\}(15)$$

ds étant l'élément du contour de la section moyenne, les intégrales simples s'étendant au contour entier, et les intégrales doubles à l'aire entière de cette section.

Si l'on néglige les puissances de ε supérieures à la quatrième, on a

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z'\rho\, d\zeta = 2\rho\varepsilon\left(Z + \frac{\varepsilon^2}{6}\frac{d^2Z'}{d\zeta^2}\right);$$

en vertu de l'équation (9), on aura donc

$$\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z'\rho\, d\zeta\right) dx\, dy = \frac{2\varepsilon^3}{3}\Big[\iint\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^4 z}{dx^4}+\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2}\right)-\rho\frac{d^2 X'}{d\zeta\, dx}\right) dx\, dy$$
$$+\iint\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^4 z}{dy^4}+\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2}\right)-\rho\frac{d^2 Y'}{d\zeta\, dy}\right) dx\, dy\Big].$$

Une des deux intégrations s'effectue immédiatement dans chaque intégrale double ; à la première limite de l'intégrale relative à x, on a $dy = -\cos.\theta\, ds$, et à la seconde $dy = +\cos.\theta\, ds$, θ étant toujours l'angle que fait avec l'axe des x, la normale au bord de la plaque, menée en dehors par le point du contour de la section moyenne qui répond aux coordonnées x et y ; de même, à la première limite de l'intégrale relative à y, on a $dx = -\sin.\theta\, ds$, et à la seconde $dx = +\sin.\theta\, ds$: on conclut de là que chacune des intégrales doubles se réduira à une simple, qui s'étendra au contour entier de la section moyenne ; et en réduisant les deux intégrales simples en une seule, on aura

$$\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z'\rho\, d\zeta\right) dx\, dy = \frac{2\varepsilon^3}{3}\int\Big[\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3 z}{dx^3}+\frac{d^3 z}{dx\, dy^2}\right)-\rho\frac{dX'}{d\zeta}\right)\cos.\theta$$
$$+\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3 z}{dy^3}+\frac{d^3 z}{dy\, dx^2}\right)-\rho\frac{dY'}{d\zeta}\right)\sin.\theta\Big] ds;$$

résultat identique avec la première équation (15), en vertu de la première équation (13).

Nous aurons aussi

$$\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z'\rho\, d\zeta\right) x\, dx\, dy = \frac{2\varepsilon^3}{3}\Big[\iint\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^4 z}{dx^4}+\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2}\right)-\rho\frac{d^2 X'}{d\zeta\, dx}\right) x\, dx\, dy$$
$$+\iint\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^4 z}{dy^4}+\frac{d^4 z}{dx^2 dy^2}\right)-\rho\frac{d^2 Y'}{d\zeta\, dy}\right) x\, dx\, dy\Big].$$

En ajoutant aux deux membres de cette équation, un terme :

$$\frac{2\varepsilon^3}{3}\iint\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right)-\rho\frac{dX'}{d\zeta}\right)dx\,dy,$$

on pourra ensuite effectuer immédiatement une intégration dans chaque intégrale double du second membre; d'où il résultera, comme précédemment, une intégrale simple, étendue au contour entier de la section moyenne, en sorte que l'on aura

$$\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}Z'\rho\,d\zeta\right)x\,dx\,dy+\frac{2\varepsilon^3}{3}\iint\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right)-\rho\frac{dX'}{d\zeta}\right)dx\,dy$$
$$=\frac{2\varepsilon^3}{3}\int\left[\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right)-\rho\frac{dX'}{d\zeta}\right)\cos.\theta\right.$$
$$\left.+\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dy^3}+\frac{d^3z}{dy\,dx^2}\right)-\rho\frac{dY'}{d\zeta}\right)\sin.\theta\right]x\,ds.$$

En vertu de la première équation (13), celle-ci est la même chose que

$$\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}Z'\rho\,d\zeta\right)x\,dx\,dy+\int xF\,ds$$
$$+\frac{2\varepsilon^3}{3}\iint\left(\frac{8k}{3}\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right)-\rho\frac{dX'}{d\zeta}\right)dx\,dy=0.$$

En effectuant l'intégration relative à x, on a

$$\iint\left(\frac{d^3z}{dx^3}+\frac{d^3z}{dx\,dy^2}\right)dx\,dy=\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)\cos.\theta\,ds,$$

l'intégrale simple s'étendant, comme plus haut, au contour entier de la section; mais la seconde équation (13) donne

$$\frac{16k\varepsilon^3}{9}\int\left(\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{d^2z}{dy^2}\right)\cos.\theta\,ds=\int H\,ds-\frac{4k\varepsilon^3}{3}\int\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\sin.\theta-\frac{d^2z}{dy^2}\cos.\theta\right)ds;$$

d'ailleurs au degré d'approximation, où nous nous sommes arrêtés, on a aussi

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} X'\rho\zeta d\zeta = \frac{2\varepsilon^3\rho}{3}\frac{dX'}{d\zeta};$$

au moyen de ces différentes valeurs, l'équation que nous venons de former, devient

$$\iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} Z'\rho d\zeta\right) x\,dx\,dy - \iint\left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} X'\rho\zeta d\zeta\right) dx\,dy + \int(x\mathrm{F}+\mathrm{H})ds$$
$$= \frac{4k\varepsilon^3}{3}\int\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\sin.\theta - \frac{d^2z}{dy^2}\cos.\theta\right)ds;$$

et elle coïncide avec la deuxième équation (15), à cause que l'intégrale contenue dans son second membre et étendue au contour entier, c'est-à-dire, à toute la circonférence d'une courbe formée, sera égale à zéro.

En effet, cette intégrale est relative à la variable s qui croît dans toute son étendue; les trois quantités θ, x, y, doivent y être considérées comme des fonctions de s, résultantes de la nature de la courbe, et telles que l'on a

$$\frac{dx}{ds} = \pm\sin.\theta, \quad \frac{dy}{ds} = \mp\cos.\theta;$$

les signes supérieurs ayant lieu ensemble, ainsi que les signes inférieurs, et le même système de signes devant subsister dans toute l'étendue de l'intégration. Si donc, pour fixer les idées, nous prenons les signes supérieurs, et que nous fassions $\frac{dz}{dy} = q$, nous aurons

$$\left(\frac{d^2z}{dx\,dy}\sin.\theta - \frac{d^2z}{dy^2}\cos.\theta\right)ds = -\frac{dq}{dx}dx - \frac{dq}{dy}dy = -dq.$$

Par conséquent, cette quantité s'intégrera immédiatement; et la quantité q étant la même aux deux limites qui répondent a un même point du contour, l'intégrale définie sera nulle; ce qu'il s'agissait de prouver.

On vérifiera de la même manière la troisième équation (15), en faisant usage de la troisième équation (13), qu'on n'a pas employée dans le calcul précédent.

§ VII.

Application des formules précédentes à l'équilibre et au mouvement d'une plaque circulaire.

(75) Dans le cas de l'équilibre, nous supposerons la plaque horizontale et pesante, et son bord circulaire entièrement libre, ou assujéti partout de la même manière. Appliquons aussi à sa face supérieure une pression normale et d'égale intensité à égale distance du centre; prenons ce point pour origine des coordonnées; soit r la distance d'un point quelconque à cette origine; et désignons, à cette distance r, la pression rapportée à l'unité de surface par R, de sorte que R soit une fonction donnée de r. En négligeant les carrés de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, les composantes de cette force parallèles aux axes des x, y, z, seront $-\mathrm{R}\frac{dx}{ds}$, $-\mathrm{R}\frac{dy}{ds}$, R; les deux premières étant très-petites par rapport à la troisième, nous négligerons les déplacements horizontaux qu'elles produisent, pour ne considérer que la courbure de la plaque ou de la section moyenne. Or, elle sera la même, si, au lieu d'appliquer

la force R à la face même de la plaque, on suppose tous ses points sollicités par des forces constantes dans le sens de l'épaisseur, et représentées en intensité par $\frac{R}{2\rho\varepsilon}$. Nous ferons donc, dans l'équation (9) du n° 70,

$$Z' = Z = g + \frac{R}{2\rho\varepsilon}, \quad Y' = -\frac{R}{2\rho\varepsilon}\frac{dz}{dy}, \quad X' = -\frac{R}{2\rho\varepsilon}\frac{dz}{dx},$$

en désignant par g la gravité, et l'axe des z positives étant dirigé dans le sens de cette force. D'après cela, cette équation deviendra

$$g + \frac{R}{2\rho\varepsilon} = \frac{8k\varepsilon^2}{9\rho}\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2}\right),$$

où l'on a fait, pour simplifier,

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} = \varphi.$$

La même équation aurait lieu, si la plaque était tirée par des poids suspendus à sa face inférieure, et représentés à la distance r de son centre, par R pour chaque unité de surface.

Tout étant semblable autour du centre de la plaque, l'ordonnée z d'un point quelconque de la section moyenne sera une fonction de r; en exprimant d'après cela les différences partielles de z relatives à x et y, on trouve

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\frac{x}{r}, \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr}\frac{y}{r},$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2z}{dr^2}\frac{x^2}{r^2} + \frac{dz}{dr}\frac{y^2}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = \frac{d^2z}{dr^2}\frac{y^2}{r^2} + \frac{dz}{dr}\frac{x^2}{r^3},$$
$$\frac{d^2z}{dx\,dy} = \frac{d^2z}{dr^2}\frac{xy}{r^2} - \frac{dz}{dr}\frac{xy}{r^3};$$

d'où l'on conclut

$$\varphi = \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr}.$$

La quantité φ sera donc aussi une fonction de r; par conséquent, on aura de même

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}.$$

Appelons l le rayon de la plaque et p son poids, nous aurons

$$p = 2\pi l^2 \varepsilon \rho g;$$

et si nous faisons, pour abréger,

$$\frac{9}{16 k \varepsilon^3} = k',$$

l'équation d'équilibre pourra s'écrire ainsi :

$$k'\left(\frac{p}{\pi l^2} + \mathrm{R}\right) = \frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}. \qquad (1)$$

Dans les équations relatives aux bords de la plaque, on fera

$$\cos.\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin.\theta = \frac{y}{r},$$

à cause que la normale au contour de la section moyenne n'est autre chose que le prolongement de son rayon. Si l'on suppose qu'aucune force particulière n'agît sur les bords, on supprimera les termes F, H, H'. Les deux dernières équations (13) du n° 73 se réduiront à une seule; et dans le cas du contour entièrement libre, on aura ces deux équations :

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{4r}\frac{dz}{dr} = 0, \qquad (2)$$

qui ne subsisteront que pour $r=l$. Si les bords de la plaque sont appuyés et ne peuvent ni monter ni descendre verticalement, on aura

$$z=0,\quad \frac{d^2z}{dr^2}+\frac{1}{4r}\frac{dz}{dr}=0, \qquad (3)$$

aussi pour $r=l$. Enfin si les bords sont encastrés, l'hypothèse de z fonction de r rendra identique la troisième équation (14), et nous aurons

$$z=0,\quad \frac{dz}{dr}=0, \qquad (4)$$

pour la même valeur de $r=l$. Dans ces deux derniers cas, la pression verticale, en chaque point du contour, sera la force V du n° 72; elle aura pour valeur :

$$V=\frac{16k\varepsilon^3}{9}\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{x}{y}+\frac{d\varphi}{dy}\frac{y}{r}\right)=\frac{1}{k'}\frac{d\varphi}{dr},$$

dans laquelle on fera $r=l$; et si l'on appelle P la pression totale sur le contour entier dont la longueur est $2\pi l$, on aura

$$P=\frac{2\pi l}{k'}\frac{d\varphi}{dr}.$$

(76) En désignant par c et c' les deux constantes arbitraires, l'intégrale complète de l'équation (1) est

$$\varphi=c+c'\log.r+k'\left[\frac{pr^2}{4\pi l^2}+\int\left(\int \mathrm{R}\,r\,dr\right)\frac{dr}{r}\right].$$

L'intégration par partie donne

$$\int\left(\int \mathrm{R}\,r\,dr\right)\frac{dr}{r}=\log.r\int \mathrm{R}\,r\,dr-\int \mathrm{R}\,r\log.r\,dr.$$

On pourra supposer que ces intégrales simples s'évanouissent avec r, et remplacer, si l'on veut $\log. r$ par $\log. \frac{r}{l}$. Mais la quantité φ qui représente $\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2}$ ne devant devenir très-grande, ni, à plus forte raison, infinie en aucun point de la plaque, il faudra en faire disparaître le terme $c' \log. r$; par conséquent on aura $c'=0$, et la formule précédente deviendra

$$\varphi = c + k'\left(\frac{pr^2}{4\pi l^2} + \log.\frac{r}{l}\int \mathrm{R}\, r\, dr - \int \mathrm{R}\, r \log.\frac{r}{l}\, dr\right),$$

les intégrales étant nulles pour $r=0$. On en déduit

$$\frac{d\varphi}{dr} = k'\left(\frac{pr}{2\pi l^2} + \frac{1}{r}\int \mathrm{R}\, r\, dr\right);$$

si donc on fait

$$2\pi \int_0^l \mathrm{R}\, r\, dr = \varpi,$$

cette quantité ϖ sera la pression totale, exercée sur la plaque, et la première équation (2) se réduira à $p + \varpi = 0$, ce qui doit avoir lieu, en effet, pour l'équilibre de la plaque entièrement libre. Dans le cas de la plaque encastrée ou appuyée, la valeur précédente de P sera $\mathrm{P} = p + \varpi$; résultat qui est encore évident *à priori.*

Je remets pour φ la quantité $\frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr}$, et j'intègre de nouveau; il vient

$$\frac{dz}{dr} = \frac{b}{r} + \frac{cr}{2} + k'\left[\frac{pr^3}{16\pi l^2} + \frac{1}{r}\int\left(\int \mathrm{R}\, r\, dr\right) r \log.\frac{r}{l}\, dr \right.$$
$$\left. - \frac{1}{r}\int\left(\int \mathrm{R}\, r \log.\frac{r}{l}\, dr\right) r\, dr\right],$$

b étant la constante arbitraire. En intégrant par partie, on a

$$\int\left(\int \mathrm{R}\, r\, dr\right) r \log.\frac{r}{l}\, dr = -\frac{r^2}{4}\left(1 - 2\log.\frac{r}{l}\right)\int \mathrm{R}\, r\, dr + \frac{1}{4}\int \mathrm{R}\, r^3\left(1 - 2\log.\frac{r}{l}\right) dr,$$

$$\int\left(\int \mathrm{R}\, r \log.\frac{r}{l}\, dr\right) r\, dr = \frac{r^2}{2}\int \mathrm{R}\, r \log.\frac{r}{l}\, dr - \frac{1}{2}\int \mathrm{R}\, r^3 \log.\frac{r}{l}\, dr.$$

Nous supposerons que ces intégrales simples s'évanouissent avec r; et la quantité $\frac{dz}{dr}$ ne devant être infinie pour aucune valeur de r, nous ferons $b = 0$ pour que le terme $\frac{b}{r}$ disparaisse de son expression qui sera alors :

$$\frac{dz}{dr} = \frac{cr}{2} + k'\left[\frac{pr^3}{16\pi l^2} - \frac{r}{4}\left(1 - 2\log.\frac{r}{l}\right)\int \mathrm{R}\, r\, dr - \frac{r}{2}\int \mathrm{R}\, r \log.\frac{r}{l}\, dr + \frac{1}{4r}\int \mathrm{R}\, r^3\, dr\right].$$

Je fais $r = l$ dans cette valeur et dans celle de $\frac{d^2 z}{dr^2}$ qui s'en déduit, puis je les substitue dans la seconde équation (2) ou (3), ce qui donne

$$c = -k'\left[\frac{13p}{40\pi} + \frac{3\varpi}{20\pi} - \int_0^l \mathrm{R}\, r \log.\frac{r}{l}\, dr - \frac{3}{10\, l^2}\int \mathrm{R}\, r^3\, dr\right],$$

pour la valeur de c qui aura lieu dans les deux cas de la plaque entièrement libre et de la plaque appuyée par son contour. Dans le troisième cas, de la plaque dont les bords sont encastrés, on conclura de l'expression de $\frac{dz}{dr}$ et de la seconde équation (4) :

$$c = -k'\left[\frac{p}{8\pi} - \frac{\varpi}{4\pi} - \int_0^l \mathrm{R}\, r \log.\frac{r}{l}\, dr + \frac{1}{2}\int_0^l \mathrm{R}\, r^3\, dr\right].$$

Ainsi la constante c est déterminée pour tous les cas.

En intégrant une dernière fois, et désignant par f la constante arbitraire, on aura

$$z=f+\frac{cr^2}{4}+k'\left[\frac{pr^4}{64\pi l^2}-\frac{1}{4}\int\left(\int \mathrm{R}rdr\right)\log.\left(1-2\log.\frac{r}{l}\right)rdr\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\int\left(\int \mathrm{R}r\log.\frac{r}{l}dr\right)rdr+\frac{1}{4}\int\left(\int \mathrm{R}r^3dr\right)\frac{dr}{r}\right].$$

L'intégration par partie donne

$$\int\left(\int \mathrm{R}rdr\right)\left(1-2\log.\frac{r}{l}\right)rdr=r^2\left(1-\log.\frac{r}{l}\right)\int \mathrm{R}rdr$$
$$-\int \mathrm{R}\left(1-\log.\frac{r}{l}\right)r^3dr,$$

$$\int\left(\int \mathrm{R}r\log.\frac{r}{l}dr\right)rdr=\frac{r^2}{2}\int \mathrm{R}r\log.\frac{r}{l}dr-\frac{1}{2}\int \mathrm{R}r^3\log.\frac{r}{l}dr,$$
$$\int\left(\int \mathrm{R}r^3dr\right)\frac{dr}{r}=\log.\frac{r}{l}\int \mathrm{R}r^3dr-\int \mathrm{R}r^3\log.\frac{r}{l}dr.$$

Nous conviendrons de faire commencer ces intégrales simples avec r, et nous aurons finalement

$$z=f+\frac{cr^2}{4}+\frac{k'}{4}\left[\frac{pr^4}{16\pi l^2}-r^2\left(1-\log.\frac{r}{l}\right)\int \mathrm{R}rdr\right.$$
$$\left.+\left(1+\log.\frac{r}{l}\right)\int \mathrm{R}r^3dr-r^2\int \mathrm{R}r\log.\frac{r}{l}dr-\int \mathrm{R}r^3\log.\frac{r}{l}dr\right], \quad (5)$$

pour l'équation de la surface formée par la plaque en équilibre.

(77) Si la plaque est entièrement libre, la constante f restera indéterminée; et, en effet, il est indifférent alors que la plaque occupe dans l'espace une position ou une autre, pourvu qu'elle soit horizontale. Abstraction faite de cette constante, l'équation de la plaque sera la même dans ce cas et dans

celui du contour appuyé verticalement, puisque dans ces deux cas il y faudra mettre la même valeur de la constante c. Lorsque le contour sera appuyé ou qu'il sera encastré, la condition $z=0$ pour $r=l$ fera connaître la valeur de f. On y mettra pour c la première ou la seconde des deux valeurs de cette constante précédemment calculées, selon que la plaque sera appuyée ou encastrée par les bords. Dans les deux cas, la constante f sera la flèche de la plaque courbée par son poids et par la pression qu'elle éprouve. En conservant f pour la représenter dans le cas du contour appuyé, et la désignant par f' lorsque les bords sont encastrés, on aura

$$f=\frac{k'l^2}{4}\left(\frac{21p}{80\pi}+\frac{13\varpi}{20\pi}-\frac{13}{10l^2}\int_0^l \mathrm{R}r^3dr+\frac{1}{l^2}\int_0^l \mathrm{R}r^3\log.\frac{r}{l}dr\right),$$

$$f'=\frac{k'l^2}{4}\left(\frac{p}{16\pi}+\frac{\varpi}{4\pi}-\frac{1}{2l^2}\int_0^l \mathrm{R}r^3dr+\frac{1}{l^2}\int_0^l \mathrm{R}r^3\log.\frac{r}{l}dr\right).$$

Si la pression R est partout la même, et par conséquent égale à $\frac{\varpi}{\pi l^2}$, on effectuera sans difficulté les intégrations indiquées. On trouve alors que la quantité $\log.\frac{r}{l}$ disparaît dans l'équation (5) qui se réduit à celle d'un paraboloïde de révolution. En remettant pour k' sa valeur, celles de f et f' deviennent

$$f=\frac{21hl^2}{\varepsilon^3}(p+\varpi),\quad f'=\frac{5hl^2}{\varepsilon^3}(p+\varpi),$$

h étant un coefficient qui dépend uniquement de l'élasticité propre de la matière dont la plaque est formée, et qui est d'autant plus grand, que cette élasticité ou la quantité k est plus petite.

Si la plaque est tirée par un poids ϖ suspendu à son centre, il faudra, pour appliquer les formules précédentes à ce cas particulier, supposer que la fonction R n'a de valeurs sensibles que pour des valeurs insensibles de r. Par la nature de ce genre de fonctions, on supprimera dans ce cas les intégrales $\int_0^l \mathrm{R}\, r^3 dr$, $\int_0^l \mathrm{R}\, r^3 \log.\frac{r}{l} dr$, dont les valeurs sont insensibles par rapport à celle de $l^2 \int_0^l \mathrm{R}\, r dr$, ou à celle de $l^2 \varpi$. On aura de cette manière :

$$f = \frac{21 h l^2}{\varepsilon^3}\left(p + \frac{52\varpi}{21}\right), \quad f' = \frac{5 h l^2}{\varepsilon^3}(p + 4\varpi).$$

En comparant ces formules à celles du cas précédent, on voit que le poids ϖ produit maintenant une flèche plus considérable que quand il était répandu sur la surface entière de la plaque. On voit aussi que, toutes choses d'ailleurs égales, les valeurs de f' sont moindres que celles de f. On conçoit *à priori* le sens de ces différences dont le calcul seul pouvait donner la mesure.

Ce dernier cas comprend celui où le centre de la plaque est appuyé et soutenu au niveau de son contour. Il faut alors considérer ϖ comme une force inconnue qui s'exerce en sens contraire de la pesanteur et représente la résistance du point d'appui central. La flèche de la plaque devant être nulle dans ce cas, cette condition servira à déterminer ϖ ; et l'on aura

$$\varpi = -\frac{21p}{52}, \quad \text{ou} \quad \varpi = -\frac{p}{4},$$

selon que le bord sera appuyé ou encastré. Ces valeurs de ϖ,

prises avec des signes contraires, exprimeront les pressions qui ont lieu sur le centre; les valeurs correspondantes de la pression sur le contour seront

$$P=\frac{31p}{52}, \quad P=\frac{3p}{4}.$$

Ainsi la pression exercée par le poids p de la plaque se partage entre le centre et le contour dans le rapport de 21 à 31 quand la plaque est simplement appuyée, et dans le rapport de 1 à 3 quand elle est encastrée. Ces rapports ne dépendent donc que de la manière dont les bords de la plaque sont assujétis, et nullement de son rayon, de son épaisseur, ou de son degré d'élasticité. Toutefois il faut que son élasticité ne soit pas absolument nulle; car si la matière de la plaque était supposée rigoureusement rigide et dénuée de toute élasticité, ce qui n'a jamais lieu dans la nature, la distribution de la pression p entre son centre et son contour, et même entre les différents points de son contour, serait entièrement indéterminée.

(78) Occupons-nous maintenant des vibrations d'une plaque circulaire. Faisons abstraction de la pesanteur et de toute autre force donnée; supposons qu'à chaque instant les points également éloignés du centre aient la même ordonnée normale à la plaque, en sorte que l'ordonnée z soit une fonction de r et du temps t, r étant la même variable que précédemment: l'équation (10) du n° 70, appliquée à ce cas particulier, sera

$$\frac{d^2z}{dt^2}+a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\,\frac{d\varphi}{dr}\right)=0, \qquad (6)$$

en faisant toujours

$$\varphi = \frac{d^2 z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{dr}.$$

Soient z' et z'' deux autres fonctions de r et t, telles que l'on ait

$$\frac{dz'}{dt} + a\sqrt{-1}\left(\frac{d^2 z'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz'}{dr}\right) = 0, \quad \frac{dz''}{dt} - a\sqrt{-1}\left(\frac{d^2 z''}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dz''}{dr}\right) = 0;$$

on satisfera à l'équation (6) au moyen de $z = z'$ et de $z = z''$; et si l'on prend pour z' et z'' leurs valeurs les plus générales, l'intégrale complète de cette équation sera

$$z = z' + z''.$$

Or, d'après ce que j'ai trouvé dans un autre Mémoire, ces valeurs exprimées sous forme finie sont :

$$z' = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\pi f(r\cos.\omega + 2h\alpha\sqrt{at})\,d\omega \right.$$
$$\left. + \int_0^\pi \mathrm{F}(r\cos.\omega + 2h\alpha\sqrt{at})\log.(r\sin.^2\omega)\,d\omega\right] e^{-\alpha^2}\,d\alpha,$$

$$z'' = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^\pi f'(r\cos.\omega + 2h'\alpha\sqrt{at})\,d\omega \right.$$
$$\left. + \int_0^\pi \mathrm{F}'(r\cos.\omega + 2h'\alpha\sqrt{at})\log.(r\sin.^2\omega)\,d\omega\right] e^{-\alpha^2}\,d\alpha;$$

f, F, f', F', désignant des fonctions arbitraires, e la base des logarithmes népériens, h et h' étant $\sqrt{\mp\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire,

$$h = \frac{1 - \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}, \quad h' = \frac{1 + \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Mais pour donner à ces expressions une forme qui convienne

mieux au calcul des vibrations, faisons

$$fx = \Sigma(\mathrm{C}\cos.\mu x + \mathrm{D}\sin.\mu x),\ \mathrm{F}x = \Sigma(\mathrm{E}\cos.\mu x + \mathrm{F}\sin.\mu x),$$
$$f'x = \Sigma(\mathrm{C}'\cos.\mu x + \mathrm{D}'\sin.\mu x), \mathrm{F}'x = \Sigma(\mathrm{E}'\cos.\mu x + \mathrm{F}'\sin.\mu x);$$

$\mathrm{C}, \mathrm{D}, \mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{C}', \mathrm{D}', \mathrm{E}', \mathrm{F}', \mu$, étant des quantités indépendantes de la variable x, et les sommes Σ s'étendant à toutes leurs valeurs possibles, réelles ou imaginaires. Comme on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} \sin.2\mu h\alpha\sqrt{at}\,d\alpha = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2} \cos.2\mu h\alpha\sqrt{at}\,d\alpha = \sqrt{\pi}\, e^{-\mu^2 a h^2 t}$$
$$= \sqrt{\pi}(\cos.\mu^2 at + \sqrt{-1}\sin.\mu^2 at),$$

et de même en mettant h' à la place de h, il en résulte que les valeurs de z' et z'', et par suite la valeur de z, se trouveront exprimées en séries de quantités de la forme :

$$\mathrm{R}\cos.\mu^2 at + \mathrm{R}'\sin.\mu^2 at,$$

R et R' étant des fonctions de r. Les termes qui renferment un *cosinus* dépendront des valeurs initiales de z, et ceux qui contiennent un *sinus*, de celles de $\frac{dz}{dt}$; mais les uns et les autres donnant lieu à des conséquences absolument semblables, pour avoir à écrire de moins longues formules, nous supprimerons les termes de la seconde espèce ; ce qui revient à supposer nulles les vitesses initiales de la plaque, de sorte qu'elle ait été mise en mouvement en lui faisant prendre la forme d'une surface de révolution, et l'abandonnant ensuite à elle-même. En observant que

$$\int_0^\pi \sin.(\mu r \cos.\omega) d\omega = 0, \int_0^\pi \sin.(\mu r \cos.\omega) \log.(r \sin.^2\omega) d\omega = 0,$$

la valeur de z conclue de celles de z' et z'', sera alors :

$$z = \Sigma \left[A \int_0^\pi \cos.(\mu r \cos.\omega) d\omega \right.$$
$$\left. + A' \int_0^\pi \cos.(\mu r \cos.\omega) \log.(r \sin.^2\omega) d\omega \right] \cos.\mu^2 a t;$$

A et A′ étant ainsi que μ des quantités indépendantes de r et t, auxquelles se rapporte la somme Σ. Je désigne par m une autre constante; j'écris successivement m et $m\sqrt{-1}$ à la place de μ; dans le cas de $\mu = m$, je conserve les coefficients A et A′; dans le cas de $\mu = m\sqrt{-1}$, je les remplace par B et B′; il vient

$$z = \Sigma \left[A \int_0^\pi \cos.(m r \cos.\omega) d\omega + \tfrac{1}{2} B \int_0^\pi \left(e^{m r \cos.\omega} + e^{-m r \cos.\omega} \right) d\omega \right.$$
$$+ A' \int_0^\pi \cos.(m r \cos.\omega) \log.(r \sin.^2\omega) d\omega \qquad (7)$$
$$\left. + \tfrac{1}{2} B' \int_0^\pi \left(e^{m r \cos.\omega} + e^{-m r \cos.\omega} \right) \log.(r \sin.^2\omega) d\omega \right] \cos.m^2 a t;$$

et c'est sous cette forme que nous emploierons la valeur de z.

L'expression de φ qui s'en déduit peut être simplifiée en considérant les équations différentielles :

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} = -m^2 u, \quad \frac{d^2 u'}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du'}{dr} = m^2 u',$$

dont les intégrales complètes sont (*) :

(*) Journal de l'École polytechnique, 19e cahier, page 475.

$$u = \mathrm{A}\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\,d\omega + \mathrm{A}'\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\log.(r\sin.^2\omega)\,d\omega,$$

$$u' = \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\int_0^\pi \left(e^{mr\cos.\omega} + e^{-mr\cos.\omega}\right)d\omega$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mathrm{B}'\int_0^\pi \left(e^{mr\cos.\omega} + e^{-mr\cos.\omega}\right)\log.(r\sin.^2\omega)\,d\omega;$$

A, A′, B, B′, désignant des constantes arbitraires. Cela étant, on conclura de la formule (7) :

$$\varphi = \Sigma m^2 \Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\int_0^\pi \left(e^{mr\cos.\omega} + e^{-mr\cos.\omega}\right)d\omega - \mathrm{A}\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\,d\omega$$
$$+ \tfrac{1}{2}\mathrm{B}'\int_0^\pi \left(e^{mr\cos.\omega} + e^{-mr\cos.\omega}\right)\log.(r\sin.^2\omega)\,d\omega$$
$$- \mathrm{A}'\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\log.(r\sin.^2\omega)\,d\omega \Big] \cos.m^2at.$$

S'il n'existe aucune partie fixe au centre de la plaque, ainsi que nous le supposerons dans ce qui va suivre, la valeur de z devra comprendre $r=0$; et comme elle ne doit jamais devenir infinie, il faudra que les coefficients A′ et B′ des termes qui renferment log. r, soient égaux à zéro, ce qui réduira les expressions de z et de φ à

$$\left.\begin{aligned} z &= \Sigma \Big[\mathrm{A}\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\,d\omega \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\mathrm{B}\int_0^\pi \left(e^{mr\cos.\omega} + e^{-mr\cos.\omega}\right)d\omega \Big] \cos.m^2at, \\ \varphi &= \Sigma m^2 \Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{B}\int_0^\pi \left(e^{mr\cos.\omega} + e^{-mr\cos.\omega}\right)d\omega \\ &\quad - \mathrm{A}\int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega)\,d\omega \Big] \cos.m^2at. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Les conditions relatives au contour seront les mêmes que dans le cas de l'équilibre, et exprimées par les équations (2), (3) ou (4), selon que les bords seront libres, appuyés de manière qu'il ne puissent pas glisser normalement à la plaque, ou tout-à-fait encastrés. Elles auront lieu pour $r=l$, l étant toujours le rayon de la plaque, et pour toutes les valeurs de t. Nous allons examiner ces trois cas successivement.

(79) Pour satisfaire, quel que soit t, à la condition $z=0$ pour $r=l$, il faudra prendre

$$A=H\int_0^\pi\left(e^{ml\cos.\omega}+e^{-ml\cos.\omega}\right)d\omega,\ B=-2H\int_0^\pi\cos.(ml\cos.\omega)\,d\omega;$$

H étant un coefficient inconnu. En faisant, pour abréger,

$$R=\int_0^\pi\left(e^{ml\cos.\omega}+e^{-ml\cos.\omega}\right)d\omega.\int_0^\pi\cos.(mr\cos.\omega)d\omega$$
$$-\int_0^\pi\cos.(ml\cos.\omega).\int_0^\pi\left(e^{mr\cos.\omega}+e^{-mr\cos.\omega}\right)d\omega,$$

la formule (8) deviendra

$$z=\Sigma HR\cos.m^2at; \qquad (9)$$

et elle conviendra aux deux cas de la plaque encastrée et de la plaque dont le contour est simplement appuyé.

Dans le premier cas, la condition $\frac{dz}{dr}=0$, ou la seconde équation (4), exigera qu'on ait $\frac{dR}{dr}=0$ pour $r=l$, ce qui donne

$$\int_0^\pi \left(e^{ml\cos.\omega} + e^{-ml\cos.\omega}\right) d\omega . \int_0^\pi \sin.(ml\cos.\omega)\cos.\omega d\omega$$
$$+ \int_0^\pi \left(e^{ml\cos.\omega} - e^{-ml\cos.\omega}\right) \cos.\omega d\omega \int_0^l \cos.(ml\cos.\omega) d\omega = 0; \quad (10)$$

équation qui servira à déterminer les valeurs de m. On prouvera qu'elle n'a aucune racine en partie réelle et en partie imaginaire, et l'on déterminera, d'après la forme initiale de la plaque, la valeur du coefficient H en fonction de m, par une analyse dont nous avons déja donné, dans ce Mémoire, un nombre suffisant d'exemples. Pour abréger, nous supprimerons cette analyse dans le cas actuel et dans les cas que nous traiterons ensuite, et nous ne nous occuperons que de la détermination des différents sons de la plaque circulaire, ce qui est l'objet essentiel de la question.

Les racines de l'équation (10) étant toutes incommensurables, il faudra que la formule (9) se réduise à un seul terme pour que la plaque exécute des vibrations isochrones. En appelant λ l'une des valeurs numériques de ml tirées de l'équation (10), et désignant par τ la durée correspondante de chaque vibration entière, on aura

$$\tau = \frac{2\pi l^2}{\lambda^2 a}.$$

Le nombre de vibrations dans l'unité de temps sera $\frac{1}{\tau}$; en le désignant par n, et remettant pour a sa valeur (n° 70), il en résultera

$$n = \frac{\lambda^2 \varepsilon}{3\pi l^2} \sqrt{\frac{2k}{\rho}}.$$

où l'on voit que, toutes choses d'ailleurs égales, le son mesuré par ce nombre n, sera en raison directe de l'épaisseur de la plaque, et inverse du carré de son rayon.

Je développe le premier membre de l'équation (10) suivant les puissances de $m\,l$ ou de λ; j'effectue les intégrations relatives à ω, et je fais $\lambda^2 = 4x$; il vient

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{(1.2)^2} + \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \text{etc.}\right)\left(1 - \frac{2x}{(1.2)^2} + \frac{3x^2}{(1.2.3)^2} - \frac{4x^3}{(1.2.3.4)^2} + \text{etc.}\right)$$
$$+ \left(1 - x + \frac{x^2}{(1.2)^2} - \frac{x^3}{(1.2.3)^2} + \text{etc.}\right)\left(1 + \frac{2x}{(1.2)^2} + \frac{3x^2}{(1.2.3)^2} + \frac{4x^3}{(1.2.3.4)^2} + \text{etc.}\right) = 0,$$

ou bien, en effectuant les multiplications et réduisant,

$$1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{480} - \frac{x^6}{181440} + \frac{x^8}{209018880} - \text{etc.} = 0.$$

En résolvant cette équation par rapport à x^2, on trouve

$$x^2 = 6{,}5227, \quad x^2 = 98,$$

pour les valeurs approchées de ses deux plus petites racines. Les valeurs correspondantes de λ^2 sont

$$\lambda^2 = 10{,}2156, \quad \lambda^2 = 39{,}59;$$

et les deux sons les plus graves de la plaque encastrée ou les nombres de vibrations qui les mesurent, sont entre eux comme ces quantités, ou à peu près dans le rapport de quatre à un.

Si l'on veut déterminer les rayons des lignes nodales qui

les accompagnent, on fera $R=0$; équation dont le développement est

$$\left(1+x+\frac{x^2}{(1.2)^2}+\frac{x^3}{(1.2.3)^2}+\text{etc.}\right)\left(1-\frac{y}{(1.2)^2}+\frac{y^2}{(1.2.3)^2}-\frac{y^3}{(1.2.3.4)^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-\left(1-x+\frac{x^2}{(1.2)^2}-\frac{x^3}{(1.2.3)^2}+\text{etc.}\right)\left(1+\frac{y}{(1.2)^2}+\frac{y^2}{(1.2.3)^2}+\frac{y^3}{(1.2.3.4)^2}+\text{etc.}\right)=0, \quad (11)$$

en faisant, pour abréger,

$$m^2l^2=4x, \quad m^2r^2=4y.$$

Il faudra de plus qu'on ait $r<l$, ou $y<x$; or, en employant la plus petite valeur de x, on ne trouve pas de valeurs de y qui soient moindres; ce qui prouve que le son le plus grave n'a pas de lignes nodales, autres que le contour de la plaque; et si l'on prend la seconde valeur de x dans l'ordre de grandeur, on trouve une seule valeur de y moindre que x, savoir:

$$y=1,424,$$

de laquelle on conclut

$$r=(0,381)l,$$

pour le rayon de la ligne nodale dans le cas du son qui vient immédiatement après le plus grave.

(80) Dans le cas de la plaque appuyée par ses bords, on substituera la formule (9) dans la seconde équation (3); et celle-ci devant subsister quel que soit t, il en résultera

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{4r}\frac{dR}{dr}=0,$$

où l'on fera $r=l$, ce qui donnera après quelques réductions :

$$2ml\int_0^\pi\left(e^{ml\cos.\omega}+e^{-ml\cos.\omega}\right)d\omega.\int_0^\pi\cos.(ml\cos.\omega)\cos.\omega d\omega$$

$$-\frac{3}{4}\left[\int_0^\pi\left(e^{ml\cos.\omega}+e^{-ml\cos.\omega}\right)d\omega.\int_0^\pi\sin.(ml\cos.\omega)\cos.\omega d\omega\right. \quad (12)$$

$$\left.+\int_0^\pi\left(e^{ml\cos.\omega}-e^{-ml\cos.\omega}\right)\cos.\omega d\omega.\int_0^\pi\cos.(ml\cos.\omega)d\omega\right]=0.$$

Cette équation servira à déterminer les valeurs de m, et par suite les différents sons que la plaque peut faire entendre. Si l'on désigne par λ' une des valeurs de ml qui s'en déduisent, et par n' le nombre de vibrations dans l'unité de temps qui sert de mesure au son correspondant, on aura, comme dans le n° précédent :

$$n'=\frac{\lambda'^2\varepsilon}{3\pi l^2}\sqrt{\frac{2k}{\rho}}.$$

Si l'on développe le premier membre de l'équation (12), suivant les puissances de ml ou de λ', et qu'on fasse $\lambda'^2=4x'$, on trouve :

$$1-\frac{x'^2}{2}+\frac{x'^4}{96}-\frac{x'^6}{25920}+\frac{x'^8}{23224320}-\text{etc.}$$
$$-\frac{3}{8}\left(1-\frac{x'^2}{6}+\frac{x'^4}{480}-\frac{x'^6}{181440}+\frac{x'^8}{209018880}-\text{etc.}\right)=0.$$

Les valeurs approchées des deux plus petites racines de cette équation résolue par rapport à x'^2, sont

$$x'^2=1{,}4761\,,\quad x'^2=55.$$

On a en même temps

$$\lambda'^2 = 4{,}8591\,, \quad \lambda'^2 = 29{,}67;$$

et les deux sons les plus graves de la plaque dont les bords sont appuyés, seront entre eux comme ces deux valeurs de λ'^2.

En faisant $m^2 l^2 = 4x'$ et $m^2 r^2 = 4y'$, les rayons des lignes nodales se détermineront par l'équation (11), dans laquelle on mettra x' et y' à la place de x et y. Il faudra que y' soit moindre que y'; or, si l'on prend pour x' sa plus petite valeur, il n'en existe pas pour y' qui remplisse cette condition : si l'on prend pour x' sa seconde valeur, il existe une seule valeur de $y' < x'$, savoir :

$$y' = 1{,}447;$$

d'où il résulte que le son le plus grave n'a pas d'autres lignes nodales que le contour de la plaque, et que celui qui vient ensuite est accompagné d'une ligne nodale dont le rayon est

$$r = (0{,}441)\,l.$$

(81) Considérons actuellement le cas de la plaque entièrement libre. Pour que la seconde formule (8) satisfasse à la première équation (2), il faudra prendre :

$$A = H'\int_0^{\pi} \left(e^{ml\cos.\omega} - e^{-ml\cos.\omega}\right)\cos.\omega\, d\omega\,,$$

$$B = -2H'\int_0^{\pi} \sin.(ml\cos.\omega)\cos.\omega\, d\omega.$$

H′ étant un nouveau coefficient inconnu. On aura donc

$$z = \Sigma H'R'\cos.m^2 at, \qquad (13)$$

en faisant, pour abréger,

$$R' = \int_0^\pi \left(e^{ml\cos.\omega} - e^{-ml\cos.\omega}\right)\cos.\omega d\omega . \int_0^\pi \cos.(mr\cos.\omega) d\omega$$
$$- \int_0^\pi \sin.(ml\cos.\omega)\cos.\omega d\omega . \int_0^\pi \left(e^{mr\cos.\omega} + e^{-mr\cos.\omega}\right) d\omega.$$

La seconde équation (2) est la même chose que

$$\varphi - \frac{3}{4r}\frac{dz}{dr} = 0;$$

si donc on y substitue la seconde formule (8) et la formule (13), on en conclura cette équation :

$$\int_0^\pi \left(e^{ml\cos.\omega} + e^{-ml\cos.\omega}\right) d\omega . \int_0^\pi \sin.(ml\cos.\omega)\cos.\omega d\omega$$
$$+ \int_0^\pi \left(e^{ml\cos.\omega} - e^{-ml\cos.\omega}\right)\cos.\omega d\omega . \int_0^\pi \cos.(ml\cos.\omega) d\omega \qquad (14)$$
$$- \frac{3}{2ml}\int_0^\pi \left(e^{ml\cos.\omega} - e^{-ml\cos.\omega}\right)\cos.\omega d\omega . \int_0^\pi \sin.(ml\cos.\omega)\cos.\omega d\omega = 0,$$

qui servira à déterminer les valeurs de m.

En désignant par μ une des valeurs de ml tirées de cette équation, et représentant par n_1 le nombre de vibrations dans l'unité de temps qui sert de mesure au son correspondant, nous aurons, d'après la formule (13) réduite à un seul terme :

$$n_1 = \frac{\mu^2 a}{2\pi l^2} = \frac{\mu^2 \varepsilon}{3\pi l^2}\sqrt{\frac{2k}{\rho}}.$$

Je fais $\mu^2 = 4x_1$, et je développe le premier membre de l'équa-

tion (14); il vient

$$\begin{aligned}&1-\frac{x_1^2}{6}+\frac{x_1^4}{480}-\frac{x_1^6}{181440}+\frac{x_1^8}{209018880}-\text{etc.}\\&-\frac{3}{8}\left(1-\frac{x_1^2}{12}+\frac{x_1^4}{1440}-\frac{x_1^6}{725760}+\frac{x_1^8}{1045094400}-\text{etc.}\right)=0.\end{aligned}$$

Les valeurs approchées de ses deux plus petites racines sont

$$x_1^2=4,9392,\quad x_1^2=92.$$

On a en même temps

$$\mu^2=8,8897,\quad \mu^2=38,36.$$

Le rapport de ces deux quantités est celui des deux sons les plus bas de la plaque entièrement libre; en le désignant par h, on a

$$h=4,316;$$

et le nombre n_1 de vibrations qui sert de mesure au plus grave est

$$n_1=\frac{(1,3339)\varepsilon}{l^2}\sqrt{\frac{k}{\rho}}.$$

Si l'on appelle n le nombre de vibrations longitudinales dans l'unité de temps, d'une verge cylindrique de la même matière que la plaque dont nous nous occupons, libre par les deux bouts, d'une longueur égale au diamètre $2l$ de cette plaque, d'un rayon égal à sa demi-épaisseur ε, et faisant entendre le son le plus grave qui répond à sa longueur, nous aurons, d'après le nº 36,

$$n=\frac{1}{4l}\sqrt{\frac{5k}{2\rho}};$$

d'où l'on conclut

$$n_1=(3,3746)\frac{n\varepsilon}{l}.$$

Cette comparaison entre les vibrations transversales d'une plaque circulaire et les vibrations longitudinales d'une verge cylindrique, est analogue à celle que nous avons faite dans le n° 50 entre les vibrations transversales et longitudinales d'une verge cylindrique; et il serait à désirer que le rapport de n_1 à n que nous venons de trouver fût aussi vérifié par l'expérience.

(82) Pour déterminer les rayons des lignes nodales qui peuvent accompagner les différents sons de la plaque libre, on aura l'équation $R'=0$, dont le développement est

$$\left(1+\frac{2x_1}{(1.2)^2}+\frac{3x_1^2}{(1.2.3)^2}+\frac{4x_1^3}{(1.2.3.4)^2}+\text{etc.}\right)\left(1-y_1+\frac{y_1^2}{(1.2)^2}-\frac{y_1^3}{(1.2.3)^2}+\text{etc.}\right)$$
$$-\left(1-\frac{2x_1}{(1.2)^2}+\frac{3x_1^2}{(1.2.3)^2}-\frac{4x_1^3}{(1.2.3.4)^2}+\text{etc.}\right)\left(1+y_1+\frac{y_1^2}{(1.2)^2}+\frac{y_1^3}{(1.2.3)^2}+\text{etc.}\right)=0,$$

en faisant $m^2l^2=4x_1$, $m^2r^2=4y_1$, et ne prenant que les valeurs de y_1 qui sont moindres que x_1. Si l'on fait usage de la plus petite valeur de x_1, on trouve une seule valeur de y_1 qui satisfait à cette condition; on en trouve deux, quand on emploie la seconde valeur de x_1; ce qui montre que, dans le cas de la plaque entièrement libre, le son le plus grave est accompagné d'une ligne nodale, et le son qui vient ensuite, de deux lignes nodales. Relativement au premier son, on a en même temps

$$x_1=\sqrt{4{,}9392},\quad y_1=1{,}0295;$$

d'où l'on conclut

$$r = (0,6806)\,l,$$

pour le rayon de la ligne nodale unique qui lui correspond. Par rapport au deuxième son, on a

$$x_1 = \sqrt{91,75}, \quad y_1 = 1,468, \quad y_1 = 6,674;$$

d'où il résulte

$$r = (0,3915)\,l, \quad r = (0,835)\,l,$$

pour les rayons des deux lignes nodales correspondantes.

Les rayons des lignes nodales qui se forment sur les plaques circulaires sont indépendants de la matière et de l'épaisseur de chaque plaque; ils sont proportionnels à son diamètre, et ne dépendent, en outre, que de la manière dont le centre et les bords de la plaque sont assujétis. M. Savart les a mesurés avec soin sur trois plaques de cuivre de dimensions différentes, lorsque le centre et les bords sont entièrement libres. Dans le cas du son le plus grave, il a trouvé sur ces trois plaques :

$$0,6819, \quad 0,6798, \quad 0,6812,$$

pour le rapport du rayon de la ligne nodale unique au rayon entier. Les petites différences entre ces trois fractions peuvent être attribuées aux erreurs inévitables des mesures; en en prenant la moyenne, on a 6810, qui s'accorde d'une manière remarquable avec le rapport 0,6806 donné par le calcul. Dans le cas du deuxième son, M. Savart a trouvé

$$0,3855, \quad 0,3876, \quad 0,3836,$$

pour la ligne nodale intérieure, et

$$0{,}8410, \quad 0{,}8427, \quad 0{,}8406,$$

pour la ligne nodale extérieure. Les différences sont aussi très-petites, et comprises dans les limites des erreurs de l'observation. La moyenne des premières fractions est 0,3852; la moyenne des secondes est 0,8414; quantités qui s'accordent aussi très-bien avec les deux rapports 0,3915 et 0,835 que le calcul nous a donnés.

(83) Dans tous les modes de vibrations que nous venons d'examiner, le centre de la plaque était en mouvement; car si l'on fait $r = 0$ dans les formules (9) et (13), on trouve pour l'ordonnée z de ce point une fonction de t qui n'est pas égale à zéro. Si l'on suppose, au contraire, qu'une portion circulaire de la plaque, ayant le même centre et un rayon que nous représenterons par α, soit rendue fixe, son contour devra être considéré comme encastré, et l'on aura, en conséquence, les conditions

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dr} = 0.$$

pour $r = \alpha$, outre celles qui ont lieu à la circonférence de la plaque, ou qui répondent à $r = l$. De même, si cette partie centrale était vide, et que son contour fût entièrement libre, on aurait

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0, \quad \varphi - \frac{3}{4r}\frac{dz}{dr} = 0,$$

pour la valeur particulière $r = \alpha$ de son rayon. Mais, dans ces deux cas, l'ordonnée z ne devant convenir qu'aux valeurs de r comprises depuis $r = \alpha$ jusqu'à $r = l$, il ne sera

plus nécessaire de supprimer la partie de son expression qui devient infinie quand $r=0$; et au lieu des formules (8) dont nous avons fait précédemment usage, ce seront maintenant la formule (7) et l'expression correspondant de φ qu'il faudra employer. Les calculs seront d'ailleurs tout-à-fait semblables à ceux que nous venons d'effectuer ; ils n'en différeront que par la longueur des formules qu'on aura à écrire ; et pour cette raison, nous nous contenterons de les avoir indiqués.

ERRATA.

Page 452, ligne 16, *au lieu de :* double, ou égal à $\frac{a}{l}$, *lisez :* sons double, ou égal à $\frac{a}{4l}$.

NOTE

SUR LE PROBLÈME DES ONDES,

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie des Sciences, le 7 juillet 1828.

Lorsqu'un corps est plongé un tant soit peu dans l'eau, et qu'on l'en retire subitement, il se forme deux espèces d'ondes à la surface du liquide. Les unes se propagent d'un mouvement uniformément accéléré, avec une vitesse indépendante de la forme et des dimensions du corps plongé; la vitesse des autres est constante et dépend de la section du corps *à fleur d'eau*. J'ai déterminé les unes et les autres dans mon Mémoire sur ce sujet, où j'ai aussi considéré la propagation du mouvement dans le sens de la profondeur. Les ondes de la seconde espèce sont les plus saillantes; mais leur existence tient à une circonstance très-délicate d'analyse, qui m'avait d'abord échappée, et à laquelle je n'ai eu égard que dans la seconde partie de ce Mémoire. Les lois qu'elles suivent se sont trouvées d'accord avec d'anciennes expériences de M. Biot; celles des ondes accélérées ont été confirmées par des observations de M. Bidone, dont il a rendu compte dans le tome XXV de l'Académie de Turin. La théorie des ondes accélérées a aussi été donnée par M. Cauchy dans la

pièce qui a mérité le prix de l'Institut pour l'année 1816. En publiant cet ouvrage, postérieurement à mon Mémoire, l'auteur y a joint des *additions* considérables, dans lesquelles il a reconnu l'existence des ondes uniformes, et vérifié sur ce point le résultat que j'avais trouvé. Mais M. Cauchy a, en outre, étendu les conséquences de son analyse à des cas que je n'avais pas cru devoir considérer ; c'est cette extension que je me propose maintenant d'examiner.

M. Fourier m'avait déja reproché d'avoir trop restreint la solution du problème des ondes, qui, selon lui, pour être générale, devrait renfermer une fonction arbitraire représentant la forme du corps plongé, et ne peut se borner au cas où ce corps est un paraboloïde (*). Pour apprécier cette objection, on doit observer que parmi les équations différentielles du problème, il en existe une que j'ai empruntée de la *Mécanique analytique*, et qui exprime que les mêmes molécules d'eau demeurent à la surface pendant toute la durée du mouvement. Or, c'est cette condition, et non pas mon analyse, qui restreint beaucoup la forme qu'on peut supposer au corps plongé. On conçoit qu'il faut d'abord qu'il n'ait ni pointe, comme le sommet d'un cône, ni arêtes, comme la base d'un cylindre ou d'un prisme. La surface du corps étant donc continue, il ne suffit pas encore que ses ordonnées verticales soient très-petites, il faut aussi que ses plans tangents soient très-peu inclinés. Ainsi, par exemple, on ne pourrait pas prendre pour la partie plongée, un demi ellipsoïde, quoique son axe vertical fût très-petit par rapport à chacun de

(*) Bulletin de la Société phylomatique, septembre 1818.

ses axes horizontaux; car, au contour de la section à fleur d'eau, les plans tangents seraient verticaux. Cela étant, pour toute la partie immergée, on peut généralement remplacer le corps qui produit les ondes, par son paraboloïde osculateur au point le plus bas. En adoptant cette substitution, j'ai eu soin de montrer à la fin de mon Mémoire, par un exemple numérique, le peu de différence qu'il y aurait dans la vitesse des ondes, en la calculant d'après une forme du corps plongé, différente du paraboloïde, lors même que l'enfoncement ne serait pas aussi petit qu'on est obligé de le supposer. Toutefois, la substitution dont il s'agit, sera sujette à deux exceptions : elle ne sera pas permise, quand le rayon de courbure au point le plus bas sera infini, ce qui fera disparaître le paraboloïde osculateur, et lorsque le corps, dans sa partie plongée, présentera des sinuosités et aura plusieurs plans tangents horizontaux. Il faudra déterminer spécialement la vitesse des ondes dans chacun de ces cas particuliers, mais cela n'empêche pas que la solution fondée sur la considération du paraboloïde osculateur ne soit la solution générale du problème, telle que l'analyse mathématique peut la donner. Les exceptions que je signale sont semblables à celles dont est susceptible le théorème relatif aux petites oscillations des corps pesants sur des courbes quelconques : suivant ce théorème connu, leur durée est proportionnelle à la racine carrée du rayon de courbure de la trajectoire à son point le plus bas; mais il en faut excepter le cas où ce rayon est infini, et le cas où l'amplitude des oscillations, quoique très-petite, comprendrait néanmoins plusieurs sinuosités sur la courbe donnée; et pour chacun de ces deux cas particuliers, la durée des petites oscillations devra aussi être déterminée d'une manière spéciale.

Lorsque le mouvement de l'eau est produit par l'immersion d'un corps dont la surface présente des pointes ou des arêtes, je ne crois pas qu'il soit possible de représenter les vitesses des molécules fluides par des formules analytiques, surtout dans les premiers moments de l'ébranlement où le mouvement doit être très-compliqué et où les mêmes points ne restent pas constamment à la superficie. Ce cas est celui que M. Cauchy a considéré dans les *additions* ci-dessus citées; mais l'on peut prouver que les résultats qu'il a trouvés ne sont pas compatibles avec le principe de la coexistence des petites oscillations; principe qui doit cependant se vérifier dans le mouvement des ondes, comme dans tous les mouvements qui consistent en petites oscillations, dont les lois dépendent d'équations différentielles linéaires. En effet, d'après ce principe, si l'on agite l'eau en plusieurs endroits à la fois, les ondes produites auront lieu simultanément et sans aucune modification résultant de leur coexistence, en sorte que l'élévation d'un point de la surface à chaque instant sera la somme des élévations qui seraient dues à tous les ébranlements du fluide, considérés isolément. Si les ébranlements sont produits par l'immersion de plusieurs corps qui se touchent ou soient seulement très-voisins les uns des autres, ils donneront naissance à autant de systèmes d'ondes à peu près concentriques; et si tous ces corps ont la même forme et sont également enfoncés, les vitesses de ces systèmes d'ondes seront aussi les mêmes. Il résulte de là qu'en dehors de l'ébranlement primitif, le mouvement de chaque point de la surface fluide pourra durer plus longtemps et présenter plus d'oscillations que s'il n'y avait eu qu'un corps plongé: mais l'instant du *maximum* d'élévation

ne sera pas avancé; et l'ébranlement du fluide, rapporté à cet instant, se progagera avec une vitesse qui ne sera pas plus grande que celle qui aurait lieu dans le cas de l'immersion d'un seul corps. Or, pour simplifier la question, supposons que l'eau soit contenue dans un canal, et que le mouvement soit parallèle aux parois, ce qui exige qu'il soit produit par l'immersion d'un ou plusieurs corps cylindriques ou prismatiques, perpendiculaires à cette direction et occupant toute la largeur du canal; supposons aussi que les corps plongés soient des prismes à base horizontale, et admettons pour un moment le résultat trouvé par M. Cauchy pour ces sortes de corps : la vitesse des ondes produites par l'immersion de chacun d'eux sera proportionnelle à la racine carrée de la largeur de sa base; et si l'on rend leurs bases égales, et qu'on réunisse un certain nombre de ces prismes pour en former un seul, la vitesse des ondes augmentera dans le rapport de l'unité à la racine carrée de ce nombre; ce qui est contraire à la conséquence que nous venons de déduire du principe incontestable de la coexistence des petites oscillations.

Pour résoudre les équations différentielles du problème des ondes, j'ai représenté leurs intégrales par des séries de solutions dont chacune satisfait séparément à toutes ces équations. C'est ainsi que D. Bernouilli et Lagrange ont résolu le problème des cordes vibrantes, et Euler celui des lames élastiques. C'est encore de cette manière que Laplace a exprimé les intégrales des équations relatives aux oscillations de la mer, dans le cas mathématique où l'on supposerait la profondeur constante, et où l'on ferait abstraction de la rotation de la terre, qui est le seul, jusqu'à présent, que l'on ait résolu.

complètement, c'est-à-dire, le seul cas pour lequel on ait représenté l'état arbitraire du fluide à l'origine du mouvement. Cette manière de résoudre les équations linéaires d'où dépendent, en général, les questions de physique et de mécanique, n'est donc pas nouvelle; mais pour ne laisser aucun doute sur son degré de généralité, il était peut-être bon de montrer comment les solutions déduites des intégrales ordinaires, sous forme finie et avec des fonctions arbitraires, se changent dans les expressions dont nous parlons, après qu'on a satisfait à toutes les conditions de chaque problème; et c'est ce que j'ai tâché de faire dans mon premier Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides.

Lorsqu'on exprime les intégrales complètes par des séries d'intégrales particulières, et qu'on emploie ces expressions à représenter le mouvement d'un système de points matériels tel qu'une fluide ou un corps élastique, les fonctions arbitraires provenant de l'état initial du système, se trouvent remplacées par des séries de fonctions d'une forme déterminée, dont les coefficients seulement sont des constantes arbitraires. Cette réduction d'une fonction arbitraire en une série de fonctions déterminées est une question vague et où l'on risque de s'égarer, quand on la considère d'une manière abstraite; mais elle devient précise et susceptible d'une solution qui l'est également, lorsqu'on y est amené par un problème de physique ou de mécanique; car, si l'on est certain que les inconnues peuvent être représentées à un instant quelconque, par des séries de quantités dont la forme est donnée par le problème, il faut bien qu'à l'origine du phénomène ou du mouvement, les valeurs arbitraires de ces in-

connues puissent s'exprimer par ces mêmes séries. On trouve, dans mon second Mémoire sur la distribution de la chaleur, une méthode pour déterminer, dans ces sortes de cas, les coefficients des séries au moyen des fonctions initiales; le nombre et la diversité des applications que j'en ai faites dans le Mémoire précédent (*), prouveront, ce me semble, qu'elle est aussi générale et aussi simple qu'on peut le désirer.

Ce qui caractérise les expressions en série dont il est question, c'est qu'en général elles ne représentent les fonctions que pour une étendue limitée des valeurs de chaque variable. Lagrange est le premier, je crois, qui ait donné une formule de ce genre : celle qu'on lui doit a pour objet d'exprimer, dans une étendue donnée, une fonction nulle au deux extrémités et du reste entièrement arbitraire; elle se trouve dans ses premières recherches sur la théorie du son (**); et la manière dont ce grand géomètre y est parvenu, mérite encore aujourd'hui toute notre attention. D. Bernouilli a aussi trouvé plusieurs formules de cette espèce, mais relatives seulement à des fonctions déterminées et très-simples. Les ouvrages de M. Fourier, ceux de M. Cauchy et les miens en contiennent un grand nombre, auxquelles on a été conduit par différentes applications de l'analyse mathématique. La plupart de ces formules ne sont utiles que pour la question particulière qui a donné naissance à chacune d'elles; mais il en existe trois qui ne sont pas aussi spéciales, et qui méritent

---

(*) Pages 410, 476, 502, 511 et 560 de ce volume.

(**) Tome III des anciens Mémoires de Turin, page 261.

d'être distinguées à raison du fréquent usage dont elles sont susceptibles. Ces trois formules sont :

1° Celle-ci

$$fx = \frac{1}{2l}\int_0^l fx'\,dx' + \frac{1}{l}\,\Sigma\left[\int_{-l}^{l} \cos.\frac{n\pi(x-x')}{l} fx'\,dx'\right], \quad (1)$$

dans laquelle la fonction arbitraire fx est représentée depuis $x=-l$ jusqu'à $x=+l$, par une série de *sinus* et de *cosinus* des multiples de la variable : l est une constante donnée, π le rapport de la circonférence au diamètre, n un nombre entier et positif, et Σ indique une somme relative à toutes les valeurs de ce nombre, depuis $n=1$ jusqu'à $n=\infty$. Au moyen de l'intégration par partie, on peut changer la quantité contenue sous le signe Σ, en $\frac{l}{n\pi}\int \sin.\frac{n\pi(x-x')}{l} dfx'$; et à cause du dénomination n, on voit que les termes de la série diminueront continuellement.

2° La formule :

$$fx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos.\alpha(x-x') fx'\,dx'\right] d\alpha, \quad (2)$$

qui subsiste pour toutes les valeurs réelles, positives ou négatives de x, et que M. Fourier a donnée le premier, du moins pour les deux cas de $fx=f(-x)$ et $fx=-f(-x)$, dont il était facile de déduire le cas général. Cette formule se conclut de la précédente en y faisant $l=\infty$, $\frac{n\pi}{l}=\alpha$, $\frac{\pi}{l}=d\alpha$, et changeant la somme Σ en une intégrale. Elles s'étendent

l'une et l'autre sans difficulté aux fonctions de plusieurs variables.

3° L'expression en série :

$$f(\theta,\psi) = Y + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \text{etc.}, \qquad (3)$$

dont le terme général est

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^\pi f(\theta',\psi')\, P_n \sin.\theta'\, d\theta'\, d\psi',$$

P_n étant le coefficient de x^n dans le développement de

$$(1 - 2xp + x^2)^{-\frac{1}{2}},$$

et p ayant pour valeur :

$$p = \cos.\theta \cos.\theta' + \sin.\theta \sin.\theta' \cos.(\psi - \psi').$$

Les angles θ et ψ sont compris entre $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, $\psi = 0$ et $\psi = 2\pi$; et cette troisième formule a pour objet de développer une fonction quelconque de ces deux variables, en une série de quantités d'une forme particulière que M. Legendre a introduites le premier dans l'analyse et qui jouissent de propriétés très-importantes. Une fonction donnée n'est susceptible que d'un seul développement de cette nature, et la série qui l'exprime finit toujours par être convergente, ainsi que je l'ai prouvé dernièrement (*). On fait usage de ce développement dans les différentes questions relatives aux sphéroïdes, où il s'agit de leur attraction, de leur mouve-

(*) *Additions* à la Connaissance des temps pour l'année 1831.

ment autour du centre de gravité, de l'équilibre et du mouvement des fluides qui les recouvrent, de la distribution de la chaleur dans leur intérieur, et de celle de l'électricité à leur surface; en sorte que la formule (3) est celle dont les applications diverses sont le plus multipliées.

Je renverrai pour la démonstration des trois formules (1), (2), (3), considérées comme les limites d'autres expressions, à plusieurs Mémoires que j'ai insérés dans le *Journal de l'école polytechnique* et dans la *Connaissance des temps*. On y trouvera aussi les formules du même genre qui peuvent se déduire de celles-là par la différentiation ou par l'intégration, et un examen détaillé des circonstances relatives aux valeurs extrêmes des variables, ou à celles qui répondent aux changements de forme des fonctions qui ne sont pas assujéties à la continuité.

MÉMOIRE

SUR

LA THÉORIE ANALYTIQUE DE LA CHALEUR,

PAR M. FOURIER.

(1)

Objet de la question, formule qui en donne la solution.

Ce Mémoire a pour objet la solution d'une question d'analyse qui appartient à la théorie de la chaleur. Cette nouvelle recherche servira à perfectionner les applications, en introduisant dans le calcul les variations que l'on observe dans les coefficients spécifiques. On peut à la vérité regarder ces coefficients comme constants dans la question des températures terrestres, qui est l'application la plus importante ; mais il y a d'autres questions pour lesquelles il serait nécessaire d'avoir égard aux variations que les expériences ont indiquées. Les propositions qui sont démontrées dans le Mémoire, ont un rapport direct avec l'analyse de ces approximations successives.

Je ne rappellerai point ici les questions fondamentales de la théorie de la chaleur. Il y a peu d'années qu'elles n'avaient point encore été soumises au calcul ; on pouvait même douter que l'analyse mathématique s'étendît à cet ordre de phéno-

mènes, et fût propre à les exprimer d'une manière aussi claire et aussi complète par des intégrales d'équations à différences partielles. Les solutions que j'ai données de ces questions principales sont aujourd'hui généralement connues; elles ont été confirmées par les recherches de plusieurs géomètres.

J'ai traité ensuite une question beaucoup plus composée que les précédentes; mais que l'on peut encore soumettre à l'analyse mathématique. Elle a pour objet de former les équations différentielles du mouvement de la chaleur dans les liquides, les variations des températures étant occasionnées par la communication de la chaleur entre les molécules, et en même temps par les déplacements infiniment variés que subissent toutes les parties du liquide, à raison des changements continuels de densité. J'ai donné les équations, dont il s'agit, dans un Mémoire lu à cette Académie, et dont l'extrait a été publié.

Je me propose maintenant d'ajouter à la même théorie la solution d'une question nouvelle, que je considère d'abord comme purement analytique, et dont je présenterai par la suite des applications variées. Il s'agit d'assujétir les deux extrémités d'un prisme à des températures entièrement arbitraires exprimées par deux fonctions différentes du temps, qu'elles soient ou non périodiques. L'état initial du prisme est donné; il est représenté par une troisième fonction; on se propose d'intégrer l'équation différentielle du mouvement de la chaleur, en sorte que l'intégrale comprenne trois fonctions arbitraires : savoir celle qui représente l'état initial du solide, et deux autres dont chacune exprime l'état donné et variable d'une extrémité.

On pourrait appliquer à cette question les théorèmes que j'ai donnés dans mes recherches précédentes, et qui servent

à transformer une fonction quelconque, soit en séries exponentielles, soit en intégrales définies ; car l'emploi des deux propositions principales peut évidemment conduire à l'intégrale cherchée ; mais sous cette forme le calcul est très-composé, et ne pourrait point faire connaître les lois simples auxquelles les résultats sont assujétis.

C'est par l'application de ces théorèmes que j'ai déterminé autrefois les lois du mouvement périodique de la chaleur solaire, qui pénètre la masse terrestre jusqu'à une certaine profondeur, et cause les variations diurnes ou annuelles ; mais dans cette recherche sur les mouvements alternatifs de la chaleur solaire, les températures de l'extrémité du solide sont exprimées par des fonctions périodiques, ce qui rend l'analyse plus facile. Dans la question actuelle les températures des deux extrémités du solide sont exprimées par des fonctions quelconques ; et quoique les principes déja connus suffissent pour montrer que la solution est possible, ils ne donneraient point cette solution sous une forme propre à représenter clairement les résultats. J'ai donc déduit l'intégrale cherchée de considérations différentes et spéciales, qui rendent les conséquences très-manifestes et facilitent toutes les applications.

Voici la formule qui donne la solution de cette question :

$$(1)\quad V_t = \frac{x}{\varpi} f t + \frac{2}{\varpi}\sum_{i=1}^{\infty} e^{-i^2 t}\,\frac{1}{i}\sin.(ix)\cos.(i\varpi)\left\{ f0 + \int_0^t dr\, f' r\, e^{i^2 r}\right\}$$

$$+ \left(\frac{\varpi - x}{\varpi}\right)\varphi t - \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t}\,\frac{1}{i}\sin.(ix)\left\{\varphi 0 + \int_0^t dr\,\varphi' r\, e^{i^2 r}\right\}$$

$$+ \frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} dr\,\psi r\sin.(ir);$$

x désigne la distance d'un point quelconque m du solide à sa première extrémité o, t est le temps écoulé à partir de l'état initial, V_t exprime la température du point m après le temps t; la distance de la seconde extrémité ϖ à l'origine o est représentée par le nombre ϖ; les fonctions du temps ft, φt sont arbitraires, elles expriment respectivement les températures variables des deux extrémités o et ϖ du prisme. La troisième fonction arbitraire ψx qui affecte la distance variable x d'un point intérieur à l'extrémité o, représente le système des températures initiales.

On doit donner au nombre entier i sous le signe $\sum$ toutes les valeurs possibles depuis et y compris 1, il faut prendre la somme de ces valeurs. Le signe d'intégration définie $\int$ porte, suivant notre usage, les limites entre lesquelles l'intégrale doit être effectuée; r est une quantité auxiliaire qui disparaît après l'intégration définie, en sorte qu'il ne reste dans l'expression de V_t que des quantités connues.

(2)

La solution a trois parties distinctes.

La valeur V_t donnée par l'équation (1), contient trois parties différentes. Si dans la première, qui forme la première ligne, on écrit $\varpi - x$ au lieu de x, et φ au lieu de f, on trouve la seconde partie. On verra par la suite que la première représente l'état où le solide parviendrait après le temps écoulé t, si toutes les températures initiales des points dont la distance à l'origine o est plus grande que zéro et moindre que ϖ étant supposées nulles, on assujétissait pen-

dant le temps t le point o à la température constante zéro, et le point ϖ à la température variable ft.

La seconde partie de la formule représente l'état où se trouverait le même solide après le temps écoulé t, si les températures initiales des mêmes points intermédiaires dont la distance à l'origine o surpasse zéro et est moindre que ϖ étant supposées nulles, on assujétissait pendant le temps t le point o à la température variable φt, et le point ϖ à la température fixe zéro.

Enfin la troisième partie de la formule (1) représente l'état où se trouverait le solide après le temps écoulé t, si le système des températures initiales étant exprimé par une fonction quelconque ψx de la distance x, on assujétissait le solide à chacune de ses deux extrémités à la température fixe zéro.

Quant à la valeur complète V_t, elle fait connaître quel sera après le temps écoulé t l'état du prisme, si les températures initiales étant exprimées par ψx, les deux extrémités sont assujéties à des températures variables, savoir : l'une ft au point o et l'autre φt au point ϖ.

(3)

Première démonstration. La formule satisfait à l'équation différentielle, aux conditions des extrémités, et à l'état initial.

Sans développer dans ces premiers articles la suite des raisonnements qui m'ont conduit à la solution, j'en démontrerai d'abord la vérité en la fondant sur un principe général qui est évident, et dont voici l'énoncé. Si l'on forme une valeur v

de la température variable qui satisfasse à l'équation différentielle du mouvement de la chaleur et à toutes les conditions relatives aux extrémités, et qui pour un temps donné coïncide avec l'état du système, on est assuré que l'expression de v est l'intégrale cherchée. Il ne peut y avoir aucune autre intégrale réellement différente de celle-là, quel que puisse être d'ailleurs le nombre des fonctions arbitraires. Il suffira donc de prouver que la formule qui donne l'expression V_t satisfait à l'équation différentielle et aux conditions des extrémités, et que de plus en donnant au temps sa première valeur zéro, la température V_0 représente le système ψx des températures initiales.

Or l'équation différentielle du mouvement linéaire de la chaleur est $\frac{dv}{dt}=\frac{k}{C.D}\frac{d^2 v}{dx^2}$, et si l'on écrit $\frac{kt}{C.D}$ au lieu de t, on a $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2v}{dx^2}$. Il faut donc considérer l'équation à différentielles partielles très-simple $\frac{dv}{dt}=\frac{d^2 v}{dx^2}$. On reconnaîtra, comme il suit, que l'expression de V_t satisfait à cette dernière équation. En effet, on conclut de l'équation (1)

$$(2)\quad \frac{d^2V_t}{dx^2}=-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\, i\sin.(ix)\cos.(ix)\left\{f0+\int_0^t dr f'r\, e^{i^2r}\right\}$$
$$+\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\, i\sin.(ix)\left\{\varphi 0+\int_0^t dr\varphi' r\, e^{i^2r}\right\}$$
$$-\frac{2}{\varpi}\sum i^2 e^{-i^2t}\sin.(ix)\int_0^t dr\psi r\sin.(ir),$$

et

$$(3)\quad \frac{dV_t}{dt}=\frac{x}{\varpi}f'\,t-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\,i\sin.(ix)\cos.(i\varpi)\left\{fo+\int_0^t dr f' r e^{i^2r}\right\}$$
$$+\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\frac{\sin.(ix)}{i}\cos.(i\varpi)\frac{d}{dt}P$$
$$+\left(\frac{\varpi-x}{\varpi}\right)\varphi' t+\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\sin.(ix)\left\{\varphi o+\int_0^t dr\psi' r e^{i^2r}\right\}$$
$$-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t}\frac{\sin.(ix)}{i}\frac{d}{dt}Q.$$

On représente par P le facteur $fo+\int_0^t dr f' r e^{i^2r}$, et par Q le facteur $\varphi o+\int_0^t dr\varphi' r e^{i^2r}$; or pour trouver la différentielle de P par rapport à t, ou ce qui est la même chose la différentielle du terme $\int_0^t dr f' r e^{i^2r}$, il faut omettre le signe d'intégration définie et donner à la variable auxiliaire r la valeur t qui est sa limite; nous supposons connue cette règle qui est démontrée dans plusieurs ouvrages, et dont la vérité est pour ainsi dire évidente, on a donc $\frac{d}{dt}P=f' t e^{i^2t}$, et suivant la même règle, on a $\frac{d}{dt}Q=\varphi' t e^{i^2t}$. Il reste donc dans la première partie de $\frac{dV_t}{dt}$, le dernier terme $\frac{2}{\varpi}f' t\sum\frac{\sin.(ix)}{i}\cos.i\varpi$, et dans la deuxième partie de $\frac{dV}{dt}$ le dernier terme $-\frac{1}{\varpi}\varphi' t\sum\frac{\sin.(ix)}{i}$. Or la quantité

$\sum \frac{\sin.(ix)}{i} \cos.(i\varpi)$ est connue, et la quantité $\sum \frac{\sin.(ix)}{i}$ est connue aussi; la première est $-\frac{1}{2}x$, et la seconde est $\frac{1}{2}(\varpi - x)$. Nous rappellerons plus bas la démonstration de ces deux propositions. Il s'ensuit que dans l'expression de $\frac{dV_t}{dt}$ les termes $\frac{2}{\varpi}f't$ et $\frac{\varpi - x}{\varpi}\varphi' t$ sont détruits par des termes suivants, et que les deux valeurs de $\frac{d^2 v}{dx^2}$ et $\frac{dv}{dt}$ sont identiques : donc l'expression de V_t donnée par la formule (1), satisfait à l'équation différentielle du mouvement de la chaleur.

De plus, il est facile de reconnaître que l'état initial est représenté par cette valeur de V_t; en effet, si dans l'équation (1) on pose $t=0$, on trouve

$$(4) \quad V_{(t=0)} = \frac{x}{\varpi} f0 + \frac{2}{\varpi} f0 \sum \frac{\sin.(ix)}{i} \cos.(i\varpi) + \frac{\varpi - x}{\varpi}\varphi 0 - \frac{2}{\varpi}\sum \frac{\sin.(ix)}{i} + \frac{2}{\varpi}\sum (\sin. ix)\int_0^{\varpi} dr\psi r \sin.(ir);$$

or de ces trois parties de la valeur de V_0, la première et la seconde sont nulles comme on le montrera plus bas, et la troisième donne la valeur de ψx.

Je ne rappellerai point les différentes démonstrations que l'on peut donner de cette dernière proposition; je me borne à en exprimer le véritable sens. Il faut concevoir que pour former l'intégrale $\int_0^{\varpi} dr\psi r \sin.(ir)$, on donne d'abord à i une seule valeur j prise parmi les nombres entiers 1, 2,

3, etc., et qu'ensuite on donne à la variable r toutes les valeurs qu'elle peut avoir depuis $r=0$ jusqu'à $r=\varpi$; on pourrait construire une courbe dont l'ordonnée est $\psi r \sin. jr$. L'aire de cette courbe qui repose sur l'intervalle de o à ϖ équivaut à une certaine quantité qui contient j, et que nous représentons par α_j; on forme donc le terme $\alpha_j \sin. (jx)$, puis attribuant à i toutes ses valeurs successives 1, 2, 3, 4, etc., on a la série $\alpha_1 \sin. x + \alpha_2 \sin. 2x + \alpha_3 \sin. 3x +$ etc., c'est la somme de cette série que l'on représente par $\sum \alpha_i \sin. (ix)$. Or cette même série est toujours convergente. On donne à x une valeur quelconque plus grande que o et moindre que ϖ, alors la somme des termes approche de plus en plus et sans fin d'une certaine limite qui dépend de la distance x, c'est-à-dire que l'on peut concevoir le nombre des termes de la série assez grand pour que la somme des termes diffère de sa limite d'une quantité aussi petite qu'on le voudra.

Nous avons démontré plusieurs fois le théorème exprimé par l'équation

$$(5) \qquad \psi x = \frac{2}{\varpi} \sum \sin. (ix) \int_0^{\varpi} dr \psi r \sin. (ir);$$

on y peut parvenir de différentes manières, et la formule se déduit très-facilement de l'intégration définie : mais ce qu'il importe surtout de reconnaître distinctement; c'est que la série est toujours convergente, et que la valeur attribuée à la variable x doit ici être comprise dans l'intervalle de o à ϖ. On ne considère point ici les valeurs que la même série exprimerait si l'on donnait à x des valeurs singulières qui ne seraient pas plus grandes que zéro et moindres que ϖ; la

discussion de ces valeurs est facile, mais elle n'appartient pas à la question actuelle.

Si maintenant on applique le théorème dont il s'agit, au cas où la fonction que l'on veut représenter est $\varpi - x$ dans l'intervalle de o à ϖ, on trouve $\frac{\varpi - x}{\varpi} = 2\sum \frac{\sin.(ix)}{i}$, en appliquant le même théorème (5) à la fonction x, on trouve $x = 2\sum \frac{\sin. ix}{i} \cos.\ (i\varpi)$, série qui était connue depuis longtemps. Il est donc certain, comme on l'a énoncé plus haut, qu'en faisant $t = 0$ dans l'expression de V_t donnée par l'équation (1), les termes qui contiennent $f'0$ et $\varphi' 0$ disparaissent et qu'il ne reste que la quantité $\frac{2}{\varpi}\sum \frac{\sin.(ix)}{i}\int_0^{\varpi} dr \psi r \sin.(ix)$, qui, suivant le même théorème, équivaut à ψx; donc l'état initial du solide est représenté par la valeur de V_0 de l'équation (4).

Quant aux conditions relatives aux extrémités, elles subsistent pour toutes les valeurs de t: car si l'on fait $x = \varpi$ dans l'expression V_t elle devient égale à ft, quelle que soit la valeur de t, et lorsque $x = 0$ elle devient φt. Donc l'expression de V_t représentera les températures variables du solide pendant toute la durée du phénomène; puisqu'elle convient à l'état initial, aux conditions des extrémités et à l'équation différentielle.

(4)

Énoncé des trois questions partielles dont on réunit les solutions.

Après avoir démontré la vérité de cette solution, il nous

reste à exposer les considérations dont on peut la déduire; cet examen est utile, parce que les mêmes considérations s'appliquent à diverses autres recherches.

La question a pour objet de trouver une expression de v qui représente l'état initial lorsqu'on fait $t=0$, qui devienne ft lorsqu'on fait $x=\varpi$, et qui devienne φt lorsque $x=0$. Or on peut considérer séparément chacune des trois questions suivantes: la première consiste à déterminer l'état variable du solide lorsque l'état initial et arbitraire étant donné, chacune des deux extrémités est retenue à la température zéro; ensuite on formera une seconde question qui consiste à déterminer quel serait l'état variable du prisme si la première extrémité étant retenue à la température zéro, la seconde était assujétie à une température variable donnée par une fonction quelconque du temps, et si l'on supposait d'ailleurs que dans l'état initial du prisme les températures des points dont la distance à l'origine est moindre que zéro et plus grande que ϖ, sont toutes nulles.

La troisième question est, pour ainsi dire, la même que la seconde, elle consiste à trouver l'état variable du prisme lorsque les températures initiales des points intermédiaires étant supposées nulles, la première extrémité est assujétie à une température variable donnée par la fonction φt, la seconde extrémité étant retenue à la température zéro.

Cela posé, si l'on conçoit que ces trois questions sont résolues et qu'elles sont appliquées à un même prisme, ayant les mêmes extrémités 0 et ϖ, il est certain que la superposition des trois résultats donnera la solution de la question, où l'on considère trois fonctions dont l'une exprime l'état initial du solide, et les deux autres autres expriment l'état variable des

deux extrémités. Il suffit donc de résoudre chacune des trois questions et d'ajouter les résultats. Or la solution de la première est connue, je l'ai donnée pour la première fois dans mes Recherches sur la Théorie de la chaleur lues et déposées à l'Institut de France, le 21 décembre 1807, en désignant par ψx le système des températures initiales du solide, et par v la température après le temps écoulé t en un point dont la distance à l'origine o est x, on a cette expression

$$(6) \qquad v=\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} dr\,\psi r\sin.(ir).$$

Nous passons à l'examen de la seconde question.

(5)

Température variable à l'extrémité du solide. On résout la question en déterminant sous le signe Σ une fonction inconnue.

Pour résoudre la seconde question, c'est-à-dire pour trouver l'expression de la température variable d'un point quelconque du prisme, lorsque la première extrémité o est assujétie à la température fixe zéro, et la seconde extrémité ϖ à la température variable ft, on considérera d'abord le cas très-simple où la température de la seconde extrémité est elle-même fixe mais différente de zéro. Dans ce cas l'état final du système est tel que les températures qui subsisteraient après un temps infini croissent comme les ordonnées d'une ligne droite, depuis la première extrémité jusqu'à la seconde. Nous avons démontré ce lemme dans l'Introduction à la Théorie de la chaleur; c'est l'état invariable vers lequel le système converge de plus en plus. Il est ainsi exprimé $v=\frac{bx}{\varpi}$, ce

qui est d'ailleurs une conséquence évidente du principe de la communication de la chaleur. b désigne la température fixe de l'extrémité ϖ.

Quant à l'état variable que précède ce dernier état du prisme, il est facile de le former suivant les principes déja connus. En effet, en désignant par Fx l'état initial du système, la différence $\frac{bx}{\varpi} - Fx$ entre l'état final $\frac{bx}{\varpi}$ et le premier état Fx s'altère continuellement, et de la même manière que si l'état initial du prisme étant $\frac{bx}{\varpi} - Fx$, on assujétissait chacune des deux extrémités à la température fixe zéro; la question ne diffère donc pas de celle que nous avons considérée la première. Il suffit de remplacer dans l'équation (6), la fonction ψr qui répond à l'état initial par celle-ci $\frac{br}{\varpi} - Fr$; nous examinerons plus bas le résultat de cette substitution: mais l'état variable du même solide serait très-différent de celui que l'on vient de considérer si la température de l'extrémité ϖ, au lieu d'être fixe et égale à b variait avec le temps, comme une fonction ft, celle du premier point o étant toujours supposée constante et nulle. Cette seconde question est beaucoup plus composée que la précédente. J'indiquerai d'abord comment elle pourrait être résolue par un procédé que j'ai employé dans d'autres recherches, et qui consiste à placer sous le signe d'intégration définie une fonction indéterminée. Il faut trouver pour cette fonction inconnue une expression qui satisfasse aux conditions proposées; ensuite je montrerai comment on déduit la solution d'une autre considération très-simple qui s'applique aux actions variables de la chaleur.

Nous employons en premier lieu l'expression suivante :

$$v = \sum e^{-i^2 t} \sin.(ix) \alpha_i,$$

en désignant par α_i une fonction inconnue du temps t qui contient aussi l'indice i; on voit que v deviendrait nulle lorsque $x = 0$, et deviendrait encore nulle lorsque $x = \varpi$. Or pour cette dernière valeur de x la quantité v doit devenir ft, on aura donc

$$(7) \qquad v = \frac{x}{\varpi} ft + \sum \alpha_i e^{-i^2 t} \sin.(ix),$$

il reste à déterminer sous le signe $\sum$ la fonction α_i, en sorte que l'équation différentielle soit satisfaite, et que la valeur de v se réduise à zéro lorsqu'on fait $t = 0$: car dans cette question les températures initiales intermédiaires sont supposées nulles. Or l'équation différentielle est

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{dv}{dt},$$

ce qui donne, d'après la dernière expression de v,

$$(8) \qquad -\sum i^2 \alpha_i e^{-i^2 t} \sin.(ix) = \frac{x}{\varpi} f' t - \sum \alpha_i i^2 e^{-i^2 t} \sin.(ix) + \sum \frac{d\alpha_i}{dt} e^{-i^2 t} \sin.(ix),$$

donc l'équation différentielle sera satisfaite si l'on a

$$\frac{x}{\varpi} f' t + \sum \frac{d\alpha_i}{dt} e^{-i^2 t} \sin.(ix) = 0.$$

C'est par cette condition qu'il faut déterminer la fonction α_i. Or la valeur de x peut être remplacée dans cette dernière équa-

tion (8) par l'expression connue

$$x = -2\frac{\sin.(ix)}{i}\cos.(i\varpi),$$

substituant donc cette valeur de x dans l'équation (7), on trouve

$$-\frac{2}{\varpi}f't\sum\frac{\sin.ix}{i}\cos.i\varpi + \sum\frac{d\alpha_i}{dt}e^{-i^2t}\sin.ix,$$

ce qui aura lieu si l'on a

$$e^{-i^2t}\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{2}{\varpi}f't\frac{1}{i}\cos.(i\varpi).$$

On prendra donc pour la fonction α_i l'intégrale

$$(9)\quad \frac{2}{\varpi}\frac{1}{i}\cos.(i\varpi)\int dt\,e^{i^2t}f't,\ \text{ou}\ \frac{2}{\varpi}\frac{1}{i}\cos.i\varpi\left\{c+\int_0^t dr\,e^{i^2r}f'r\right\},$$

en désignant par c une constante arbitraire, et prenant l'intégrale par rapport à la quantité auxiliaire r depuis $r=0$ jusqu'à $r=t$, on aura donc

$$(10)\quad v = \frac{x}{\varpi}ft + \frac{2}{\varpi}\sum\cos.(i\varpi)\frac{\sin.ix}{i}e^{-i^2t}\left\{c+\int_0^t dr\,e^{i^2r}f'r\right\};$$

faisant $t=0$ dans cette expression de v, elle doit, selon l'hypothèse devenir nulle. On aura donc

$$\frac{2}{\varpi}f0 + \sum\frac{\cos.(i\varpi)\sin.(ix)}{i} = 0,$$

et mettant pour x sa valeur

$$-2\frac{\sin.(i\varpi)}{i}\cos.i\varpi,$$

on a

$$-\frac{2}{\varpi} f o \sum \frac{\sin. ix}{i} \cos. i\varpi + \frac{2c}{\varpi} \sum \frac{\sin. ix}{i} \cos. i\varpi = o;$$

par conséquent la constante c est égale à $f o$, donc l'expression cherchée de v est

$$(11)\quad v = \frac{x}{\varpi} f t + \frac{2}{\varpi} \sum \frac{\sin. ix}{i} \cos. i\varpi\, e^{-i^2 t} \left\{ f o + \int_0^t dr\, e^{i^2 r} f' r \right\}.$$

On parvient ainsi à résoudre la seconde question que nous avons énoncée; quant à la troisième elle se rapporte à la seconde puisque les températures respectives des extrémités o et ϖ sont, pour la seconde, zéro et ft, et pour la troisième, φt et o. La solution de cette troisième question est exprimée comme il suit :

$$(12)\quad v = \frac{\varpi - x}{\varpi} \varphi t - \frac{2}{\varpi} \sum \frac{\sin. ix}{i} e^{-i^2 t} \left\{ \varphi o + \int_0^t dr\, e^{i^2 r} \varphi' r \right\},$$

formule qui dérive aussi de la précédente (11) en substituant $\varpi - x$ au lieu de x.

Si l'on réunit les trois résultats précédents, on trouve pour solution générale la formule donnée l'équation (1). La première ligne se rapporte à la seconde question, la seconde ligne à la troisième question, et la troisième ligne à la première question.

Quoique l'on puisse en effet parvenir à la solution, en déterminant comme on vient de le faire la fonction inconnue α_i sous le signe $\sum$, on peut dire que ce procédé n'éclaire point assez la question, en ce que l'on ne voit pas d'abord qu'il doit nécessairement conduire à la solution. Il ne sera point

inutile, dans une matière encore nouvelle d'envisager les mêmes résultats sous divers points de vue, et surtout d'indiquer la route que l'on a suivie effectivement pour découvrir la solution ; l'article suivant fait connaître comment on s'est dirigé dans cette recherche.

(6)

Principe dont on a déduit la solution générale.

La question principale se réduit à trouver l'expression v de la température, lorsque la première extrémité du prisme au point o étant retenue à la température zéro, la seconde extrémité au point ϖ est assujétie à la température variable ft; car il suit évidemment des principes de la théorie que la superposition des trois états du prisme, indiqués dans l'article 4 donnera la solution générale. Concevons que le point o est retenu à la température zéro, et que la température du point ϖ change par degrés. Si cette température du point ϖ était fixe et égale à b la question n'aurait aucune difficulté, comme nous l'avons remarqué article 5 ; l'objet de la recherche se réduit donc à trouver le changement qu'il faut apporter à la solution exprimée par l'équation (6), pour que cette solution représente l'état variable qui se formerait si la température du point ϖ, au lieu d'être constante et égale à b était représentée par bft. Supposons que le temps T soit partagé en une multitude de parties t_1, t_2, t_3; on assujétit d'abord l'extrémité o du prisme à la température zéro, et l'extrémité ϖ à une température fixe b. On détermine l'état ou le solide est parvenu après le temps t_1; on considère ensuite cet état que l'on vient de déterminer comme l'état ini-

tial où se trouve le solide, lorsqu'on commence à assujétir la seconde extrémité ϖ à une autre température fixe $b_1 + b_2$. Cette seconde disposition subsiste pendant le temps t_2, et pendant ce même temps t_2, la première extrémité o demeure assujétie à la température zéro. On détermine, l'état ou le prisme est parvenu à la fin du second temps t_2, et l'on considère ce dernier état comme l'état initial du système au commencement du temps t_3; on assujétit pendant cette durée t_3 les extrémités o et ϖ aux températures respectives zéro et $b_1 + b_2 + b_3$; on détermine encore l'état du système à la fin du temps t_3, et l'on continue ainsi de considérer comme état initial celui que l'on a déterminé par l'opération précédente; on augmente d'une nouvelle partie la température fixe à laquelle l'extrémité est assujétie et l'on suppose que cette disposition dure pendant une nouvelle partie du temps; il est manifeste que l'on parviendrait ainsi à connaître l'état qui aurait lieu après le temps total $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 +$ etc. Il ne reste plus qu'à supposer que les accroissements progressifs de la température de la seconde extrémité sont infiniment petits ainsi que l'élément du temps dt et que la valeur de l'accroissement est $dt f't$. Il faut examiner attentivement les résultats de ce calcul.

(7)

Application de ce principe, calcul.

Le système des températures initiales dans tous les points intermédiaires du solide depuis o jusqu'à ϖ étant exprimé par Fx; si les extrémités o et ϖ sont respectivement assujéties pendant un temps donné au températures fixes o et b,

l'état du solide à la fin du temps θ, sera exprimé ainsi

$$(13)\quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi}\frac{2}{\varpi}\Sigma e^{-i^2\theta}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(i\alpha)\left(\frac{b\alpha}{\varpi} - F\alpha\right),$$

cette solution résulte évidemment des principes connus. L'état final et invariable dont le système s'approche continuellement est $\frac{bx}{\varpi}$, et la différence entre ce dernier état et le premier φx diminue continuellement et finit par s'évanouir. Cette altération progressive de l'état initial représenté par $\frac{bx}{\varpi} - Fx$ s'opère suivant la loi que l'on observerait, si dans un prisme dont les températures initiales sont données on assujétissait chacune des extrémités à la température fixe zéro.

Nous supposerons maintenant dans tout ce qui suit que les températures initiales des points du prisme qui ont été désignées dans l'équation (13) par la fonction F sont nulles et que les extrémités o et ϖ sont retenues pendant le temps θ à des températures fixes savoir, zéro au point o, et b au point ϖ, on omettra donc dans l'èquation (13) le terme $F\alpha$, et l'on trouvera

$$(14)\quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\Sigma e^{-i^2t}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(i\alpha)\frac{b\alpha}{\varpi},$$

et si l'on effectue l'intégration $\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(i\alpha)\frac{b\alpha}{\varpi}$, afin de développer sous le signe Σ, on a

$$(15)\quad V_\theta = \frac{bx}{\varpi} - \frac{2b}{\varpi}\left(e^{-\theta}\sin.x - \tfrac{1}{2}e^{-2^2\theta}\sin.2x + \tfrac{1}{3}e^{-3^2\theta}\sin.3x - \text{etc.}\right);$$

on appliquera cette équation (15) au cas où le temps écoulé est désigné par t_1 et la température fixe du point ϖ par b_1, et l'on aura

$$(16)\quad V_{t_1} = \frac{b_1 x}{\varpi} - \frac{2b_1}{\varpi}\left(e^{-t_1}\sin. x - \tfrac{1}{2}e^{-2^2 t_1}\sin. 2x + \tfrac{1}{3}e^{-3^2 t_1}\sin. 3x - \text{etc.}\right).$$

On considère maintenant l'état exprimé par V_{t_1} comme un état initial donné, et l'on assujétit pendant le temps t_2 les deux extrémités o et ϖ aux températures respectives o et $b_1 + b_2$; il est facile de connaître l'état qui sera formé à la fin du temps total $t_1 + t_2$. Il faut dans la formule précédente (13) écrire $b_1 + b_2$ au lieu de b, t_2 au lieu de θ, et remplacer la fonction $F\alpha$ qui se rapporte à l'état initial par la fonction que l'on trouve en écrivant dans V_{t_1} au lieu de x la quantité auxiliaire α. On aura donc en désignant par $V_{(t_1+t_2)}$ l'expression de l'état variable à la fin du temps total $t_1 + t_2$,

$$(17)\quad V_{(t_1+t_2)} = \frac{b_1 x}{\varpi} + \frac{b_2 x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\Sigma e^{-i^2 t_2}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(ix)\left(\frac{b_1\alpha}{\varpi} + \frac{b_2\alpha}{\varpi} - W\right),$$

et il faut mettre pour W sa valeur

$$\frac{b_1\alpha}{\varpi} - \frac{2b_1}{\varpi}\left(e^{-t_1}\sin.\alpha - \tfrac{1}{2}e^{-2^2 t_1}\sin. 2\alpha + \tfrac{1}{3}e^{-3^2 t}\sin. 3\alpha - \text{etc.}\right),$$

il en résulte premièrement qu'une partie de la valeur cherchée de $V_{(t_1+t_2)}$ est

$$\frac{b_1\alpha}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\Sigma e^{-i^2 t_2}\sin.(ix)\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(i\alpha)\frac{b_2\alpha}{\varpi}.$$

Cette partie exprime d'après l'équation (14), l'état où serait

le même solide après le temps t_2, si au commencement de ce temps t_2 les températures des points intermédiaires de o à ϖ étant supposées nulles, on assujétissait les deux extrémités pendant le temps t_2 aux températures respectives o et b_1.

L'autre partie de la valeur de $V_{(t_1+t_2)}$ paraît d'abord plus composée, elle a pour expression

$$(18)\quad \frac{b_1 x}{\varpi}-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2 t_2}\sin. i\alpha\int_0^{\varpi} d\alpha \sin. i\alpha \frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-t_1}\sin.\alpha - \tfrac{1}{2}e^{-2^2 t_1}\sin. 2\alpha + \tfrac{1}{3}e^{-3^2 t_1}\sin. 3\alpha - \text{etc.}\Big),$$

il faudrait donc prendre pour i tous les nombres entiers et effectuer les opérations indiquées.

Or il faut remarquer que si i et j sont des nombres entiers différents, l'intégrale définie $\int_0^{\varpi} d\alpha \sin.(i\alpha)\sin.(j\alpha)$ a toujours une valeur nulle, ce qu'il est facile de vérifier, et ce que nous avons démontré plusieurs fois dans le cours de nos recherches : mais si les nombres i et j sont les mêmes, l'intégrale n'est point nulle, sa valeur est $\frac{1}{2}\varpi$. Nous supposons ces propositions connues ; il en résulte que pour combiner toutes les valeurs de i avec celles qui proviennent de la série $e^{-t_1}\sin.\alpha - \frac{1}{2}e^{-2^2 t_1}\sin. 2\alpha + \frac{1}{8}e^{-3^2 t_1}\sin. 3\alpha - \text{etc.}$, il faut omettre toutes les combinaisons pour lesquelles le coefficient i sous le signe $\int_0^{\varpi}$ dans $\sin.(i\alpha)$, est différent du coefficient de α dans un facteur $\sin.(i\alpha)$ qui appartient à un

terme de la série, et comme on doit prendre la somme des exposants de e dans les deux termes combinés, on trouve que la seconde partie de la valeur de $V_{(t_1+t_2)}$ est

$$b_1\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2)}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)}\sin.2x$$
$$+\tfrac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t^2)}\sin.3x-\text{etc.}\Big),$$

on forme ainsi l'expression complète de la température du solide après le temps t_1+t_2,

$$V_{(t_1+t_2)}=b_2-\frac{2b_2}{\varpi}\Big(e^{-t_2}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2t_2}\sin.(2x)$$
$$+\tfrac{1}{3}e^{-3^2t_2}\sin.(3x)-\text{etc.}\Big)$$
$$+b_1\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_1}{\varpi}\Big(e^{-(t_1+t_2)}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)}\sin.(2x)$$
$$+\tfrac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2)}\sin.(3x)-\text{etc.}\Big),$$

et l'on voit que la seconde partie représente d'après l'équation (14) l'état où le système des températures se trouverait si les valeurs initiales de ces températures étant supposées nulles, on assujétissait pendant le temps total t_1+t_2 les deux extrémités o et ϖ du prisme à des températures fixes savoir, zéro pour l'une au point o et pour l'autre b_1 au point ϖ.

Il faut maintenant considérer cette valeur de $V_{(t_1+t_2)}$ comme exprimant un état initial et assujétir l'extrémité ϖ pendant une nouvelle partie t_3 du temps à la température fixe $b_1+b_2+b_3$, l'extrémité o étant toujours retenue à la température zéro. Dans l'équation générale (13) on fera $\theta=t_3$ et $b=b_1+b_2+b_3$, et l'on prendra pour $F\alpha$ la valeur de $V_{(t_1+t_2)}$ dans laquelle on écrira α au lieu de x. On aura donc

en désignant par $V_{(t_1+t_2+t_3)}$ l'expression de la température à la fin du temps total $t_1+t_2+t_3$

$$(19)\quad V_{(t_1+t_2+t_3)}=b_1\frac{x}{\varpi}+b_2\frac{x}{\varpi}+b_3\frac{x}{\varpi}$$
$$-\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t_3}\sin.(ix)\int_0^{\varpi}d\alpha\sin.(i\alpha)\left(b_1\frac{\alpha}{\varpi}+b_2\frac{\alpha}{\varpi}+b_3\frac{\alpha}{\varpi}-W_\alpha\right).$$

On désigne ici par W_α l'expression de $V_{(t_1+t_2)}$ dans laquelle on écrit α au lieu de x. On voit d'abord qu'une première partie de la valeur cherchée $V_{(t_1+t_2+t_3)}$ est

$$b_3\frac{x}{\varpi}-\frac{x}{\varpi}\sum e^{-i^2t_3}\sin.(i\alpha)\int_0^{\varpi}d\alpha\sin.(i\alpha)b_3\frac{\alpha}{\varpi}.$$

C'est d'après l'équation (14) l'expression de l'état où le prisme se trouverait après le temps t_3, si en supposant les températures initiales nulles, on retenait les deux extrémités o et ϖ et pendant le temps t_3 à des températures fixes savoir, zéro au point o et b_3 au point ϖ.

Il reste a connaître les autres parties de la valeur cherchée. Or W_α contient les deux termes $b_2\frac{\alpha}{\varpi}$, $b_1\frac{\alpha}{\varpi}$, ce qui détruit deux des termes placés à la suite de $\int_0^{\varpi}d\alpha\sin.(i\alpha)$; on a donc seulement a considérer cette expression

$$(20)\quad -\frac{2}{\varpi}\sum e^{-i^2t_3}\sin.(ix)\int_0^{\varpi}d\alpha\sin.(i\alpha)$$
$$\frac{2b_2}{\varpi}\left(e^{-t_2}\sin.\alpha-\tfrac{1}{2}e^{-2^2t_2}\sin.2\alpha+\tfrac{1}{3}e^{-3^2t_2}\sin.3\alpha-\text{etc.}\right)$$
$$+\frac{2b_1}{\varpi}\left(e^{-(t_1+t_2)}\sin.\alpha-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2)}\sin.2\alpha+\tfrac{1}{3}e^{-3^2(t_1+t_2)}\sin.3\alpha-\text{etc.}\right).$$

On doit donner au nombre entier i toutes ses valeurs possibles, et combiner chacun des termes qui en proviennent avec chacun des termes des deux séries placées à la suite. Lorsque la valeur de i diffère du coefficient de α dans un terme de la série, il faut omettre le résultat parce que sa valeur est nulle; mais si le nombre i est le même que le coefficient de α, la valeur de l'intégrale est $\frac{1}{2}\varpi$. On aura donc en ajoutant les exposants de e l'expression

$$-\frac{2}{\varpi}b_2\left(e^{-(t_2+t_3)}\sin.x-\frac{1}{2}e^{-2(t_2+t_3)}\sin.2x\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3}e^{-3^2(t_2+t_3)}\sin.3x-\text{etc.}\right)$$
$$-\frac{2}{\varpi}b_1\left(e^{-(t_1+t_2+t_3)}\sin.x-\frac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2+t_3)}\sin.2x\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}e^{-3^2(t_1+t_2+t_3)}\sin.3x-\text{etc.}\right).$$

par conséquent la valeur complète de $V_{(t_1+t_2+t_3)}$, est ainsi exprimée

$$(22)\quad V_{(t_1+t_2+t_3)}=b_3\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_3}{\varpi}\left(e^{-t_3}\sin.x+e^{-2^2t_3}\sin.2x+\text{etc.}\right)$$
$$+b_2\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_2}{\varpi}\left(e^{-(t_2+t_3)}\sin.x-\frac{1}{2}e^{-2^2(t_2+t_3)}\sin.2x+\text{etc.}\right)$$
$$+b_1\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_1}{\varpi}\left(e^{-(t_1+t_2+t_3)}\sin.x-\frac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2+t_3)}\sin.2x+\text{etc.}\right).$$

On formerait par le même procédé la valeur complète de $V_{(t_1+t_2+t_3+t_4)}$. On aurait ainsi l'expression de l'état où le solide serait parvenu après une nouvelle portion du temps t_4, si à partir de son état à la fin du temps total $t_1+t_2+t_3$, on augmentait d'une nouvelle quantité b_4 la température de l'extrémité ϖ, et si pendant cette nouvelle partie du temps t_4

l'extrémité v étant toujours retenue à la température zéro, l'extrémité ϖ était retenue à la température $b_1 + b_2 + b_3 + b_4$. La loi qui détermine les états successifs du solide est manifeste; elle donne les conséquences suivantes que nous rapporterons pour exemple à l'équation (22).

(8)

Conséquence remarquable.

Si l'extrémité ϖ eût été assujétie à la température fixe b_1 pendant le temps $t_1 + t_2 + t_3$, et que les températures initiales eussent été nulles, le point o étant retenu à la température zéro, l'état du solide après le temps $t_1 + t_2 + t_3$ serait représenté par la troisième partie de la valeur de $V_{(t_1+t_2+t_3)}$. Si pour le même solide dont on suppose toujours les premières températures nulles et l'extrémité o à la température fixe zéro, l'autre extrémité ϖ eut été retenue pendant le temps $t_2 + t_3$ à la température fixe b_2, l'état du système à la fin du temps $t_2 + t_3$ serait représenté par la seconde partie de la valeur de $V_{(t_1+t_2+t_3)}$. Enfin la troisième partie de cette valeur représenterait l'état du même solide à la fin du temps $t_1 + t_2 + t_3$, si les premières températures étant encore supposées nulles on eût assujéti pendant ce temps t_3 l'extrémité ϖ à la température b_3. Ainsi l'état du solide après le temps total $t_1 + t_2 + t_3$ est tel qu'il résulterait de trois causes séparées qui s'appliqueraient à un même prisme dont les premières températures seraient nulles; et ces causes partielles sont la partie b_1 de la température agissant pendant le temps $t_1 + t_2 + t_3$, la partie b_2 agissant pendant le temps $t_2 + t_3$, et la partie b_3 agissant pendant le temps t_3 seulement. Ainsi chaque portion de la température appliquée à l'extré-

mité ϖ produit son effet comme si elle était seule, et à raison du temps total pendant lequel elle a subsisté. Cette conséquence générale se trouve vérifiée par le calcul; et la loi qu'elle exprime nous conduira sans aucune incertitude à la solution cherchée.

En effet la valeur de $V_{(t_1+t_2+t_3+t_4+\text{etc.})}$ après un temps indéfini, est ainsi composée

$$(23)\quad b_1\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_1}{\varpi}\left(e^{-t_1+t_2+t_3+t_4+\text{etc.}}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_1+t_2+t_3+\text{etc.})}\sin.2x+\text{etc.}\right)$$

$$+\,b_2\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_2}{\varpi}\left(e^{-(t_2+t_3+t_4+\text{etc.})}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_2+t_3+t_4+\text{etc.})}\sin.2x+\text{etc.}\right)$$

$$+\,b_3\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_3}{\varpi}\left(e^{-(t_3+t_4+\text{etc.})}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_3+t_4+\text{etc.})}\sin.2x+\text{etc.}\right)$$

$$+\,b_4\frac{x}{\varpi}-\frac{2b_4}{\varpi}\left(e^{-(t_4+\text{etc.})}\sin.x-\tfrac{1}{2}e^{-2^2(t_4+\text{etc.})}\sin.2x+\text{etc.}\right).$$

(9)

Accroissement de la température par degrés infiniment petits, forme de l'intégrale.

Si la température de l'extrémité ϖ varie comme une fonction donnée ft, chaque partie infiniment petite de sa valeur sera $dtf'\,t$, et cette partie demeure appliquée à l'extrémité ϖ pendant le temps $T-t$, en désignant par T le temps total qui s'écoule depuis le premier instant où $t=0$ jusqu'à l'instant pour lequel on veut déterminer l'état du solide. La valeur cherché de V_T sera donc composée d'une infinité de parties, et pour chacune d'elles il faut donner à l'exposant négatif de e dans le terme où entre $\sin.(ix)$ la valeur $i^2(T-t)$, et prendre la somme de toutes ces parties infiniment petites. Si l'on suppose d'abord que la première valeur de ft ou fo

est nulle, on a

$$(24)\quad V_t = \frac{x}{\varpi} ft - \frac{1}{\varpi}\int_0^T dt f't\Big(e^{-(T-t)}\sin.x - \tfrac{1}{2}e^{-2^2(T-t)}\sin.2 + \tfrac{1}{3}e^{-3^2(T-t)}\sin.3x\Big),$$

Le second membre représente l'état du solide après le temps total T, les températures initiales étant supposées nulles, l'extrémité o étant retenue à la température zéro, et l'extrémité ϖ étant assujétie à la température variable ft dont la première valeur fo est nulle. Si cette première valeur fo n'est pas nulle, il faut ajouter au résultat l'effet produit par la température fo pendant le temps total T, c'est-à-dire la quantité

$$\frac{x}{\varpi} fo - \frac{2}{\varpi}\Big(fo\, e^{-T}\sin.x - \tfrac{1}{2}e^{-2^2T}\sin.2x + \tfrac{1}{3}e^{-3^2T}\sin.3x - \text{etc.}\Big),$$

donc la valeur complète de V_T est ainsi exprimée

$$V_T = \frac{x}{\varpi}\Big(fo + \int_0^T dt f't\Big) - \frac{2}{\varpi}e^{-T}\sin.x\Big(fo + \int_0^T dt f't\Big)$$
$$-\tfrac{1}{2}e^{-2^2T}\sin.2x\Big(fo + \int_0^T dt f't e^{2^2t}\Big)$$
$$+\tfrac{1}{3}e^{-3^2T}\sin.3x\Big(fo + \int_0^T dt f't e^{3^2t}\Big) - \text{etc.}$$

Le premier terme $fo + \int_0^T dt f't$ est la valeur de ft, et si l'on fait $T=0$ dans l'expression de V_t, on trouve pour les températures initiales du système

$$\frac{x}{\varpi} f o - \frac{2}{\varpi} f o \left(\sin x - \tfrac{1}{2} \sin. 2x + \tfrac{1}{3} \sin. 3x - \tfrac{1}{4} \sin. 4x + \tfrac{1}{5} \sin. 5x - \text{etc.} \right);$$

quantité qui se réduit à zéro parce que la valeur connue de la série est $\frac{1}{2}x$, ainsi les températures initiales sont en effet nulles comme l'exige le calcul.

(10)

Solution générale.

Si, dans la même hypothèse des températures initiales nulles, on suppose que c'est l'extrémité ϖ qui est retenue à la température constante zéro, tandis que le point o à l'origine est assujéti à une température variable φt, on résoudra par les mêmes principes cette seconde question et l'on déduit aussi la solution de l'équation (24) en écrivant $\varpi - x$ au lieu de x, ce qui donne en désignant par U_T la température variable qui convient à cette seconde question

$$(25)\quad U_T = \frac{\varpi - x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi}\Big[e^{-T} \sin. x \left(\varphi o + \int_0^T dt \varphi' t \right) - \tfrac{1}{2} e^{-2^2 T} \sin. 2x \left(\varphi o + \int_0^T dt \varphi' t e^{2^2 T} \right) + \tfrac{1}{3} e^{-3^2 T} \sin. 3x \left(\varphi o + \int_0^T dt \varphi' t e^{3^2 t} \right) - \text{etc.} \Big].$$

L'expression de V_T sera ainsi représentée

$$(26)\quad V_T = \frac{\varpi - x}{\varpi} - \frac{2}{\varpi} \Sigma e^{-i^2 T} \sin. ix \left(\varphi o + \int_0^T dt \varphi' t e^{i^2 t} \right).$$

Quant à la valeur de U_T, elle prend cette forme

$$(27)\quad U_T = \frac{x}{\varpi} ft + \frac{2}{\varpi} \Sigma e^{-i^2 T} \cos.(i\varpi) \sin. i\varpi \left(f0 + \int_0^T dt f' t e^{i^2 t} \right).$$

Ces valeurs de V_T et U_T deviennent nulles lorsque $t=0$, quelle que soit la distance x; elles conviennent l'une et l'autre au cas où les températures initiales des points intermédiaires de o à ϖ sont supposées nulles. Si l'on détermine séparément, comme nous l'avons dit article 4, l'état variable d'un prisme égal aux deux précédents, et dont les températures initiales pour tous les points intermédiaires sont représentées par une fonction quelconque ψx, et dont les extrémités o et ϖ sont retenues à la température zéro, on trouve, en désignant par W_T l'expression suivante de l'état où le solide est parvenu après le temps écoulé T,

$$(28)\quad W_T = \frac{2}{\varpi} \Sigma e^{-i^2 T} \sin.(ix) \int_0^{\varpi} dr \psi r \sin.(ir).$$

Il ne reste plus qu'à réunir les solutions des trois questions séparées, et l'on a

$$(29)\qquad V_T + U_T + W_T.$$

Ce sont les trois parties de la température cherchée qui avait été désignée par V_T dans les articles 1, 2, etc. On doit mettre pour V_T, U_T, W_T leurs valeurs exprimées, par les équations (26), (27), (28), et l'on réproduit ainsi l'équation (1), qui donne la solution complète de la question proposée. Elle fait connaître quel est, après le temps écoulé T, l'état du prisme dont les températures initiales aux points intermédiaires de o à ϖ sont exprimées par ψr, et dont les extrémités o et ϖ sont assujéties aux températures variables φt au point o et ft au point ϖ.

On a prouvé que la valeur de V_T satisfait, 1° à l'équation à différences partielles du mouvement de la chaleur, 2° à l'état initial, 3° aux conditions des extrémités. On a donc établi la vérité de la solution; on a montré aussi article 5, comment on parviendrait à cette solution en déterminant sous le signe $\sum$ une fonction inconnue qui satisfait aux conditions proposées. Enfin on a exposé dans les articles 6, 7, 8, 9, 10, les considérations qui ont fait découvrir la solution, ce qui complète l'analyse de la question.

I. Pour ne pas différer la publication de ce nouveau volume, on n'y comprend que la première partie du présent Mémoire; les autres parties ne tarderont pas à être imprimées : je vais indiquer les matières qui y sont traitées.

II. Le second paragraphe contient l'exposé des conséquences principales de la solution qu'on vient de rapporter. En examinant la formule générale (1), on reconnaît d'abord que la partie du phénomène qui dépend de l'état initial du système change continuellement; cette partie de l'effet produit s'affaiblit de plus en plus, à mesure que le temps augmente. Ainsi lorsqu'il s'est écoulé un temps assez considérable, la disposition initiale, qui est une cause contingente, et que l'on doit regarder comme fortuite, a cessé d'influer sur l'état du système; cet état est celui qui aurait lieu si la disposition initiale était différente. Il n'en est pas de même des causes toujours présentes qui agissent aux extrémités, ou qui dépendent du principe de la communication de la chaleur; elles règlent à chaque instant le progrès du phé-

nomène. Ces conséquences dérivent d'un principe cosmologique qui se présente de lui-même, et qui s'applique à tous les effets de la nature. Mais non-seulement l'analyse mathématique la confirme; elle montre aussi, dans la question actuelle, par quels progrès insensibles et suivant quelle loi l'effet de la disposition primitive s'affaiblit jusqu'à ce qu'il disparaisse entièrement.

On a ensuite appliqué, dans ce même paragraphe, la solution générale aux deux cas les plus différents, savoir : 1° celui où les fonctions qui règlent les températures des deux extrémités sont périodiques, et 2° au cas où ces fonctions sont du nombre de celles qui changent par des différentiations successives, et tendent de plus en plus à devenir constantes, ou le deviennent en effet comme les fonctions algébriques.

Dans le premier cas (celui des fonctions périodiques), le calcul exprime de la manière la plus distincte les changements successifs que subissent les températures, et l'état final du système qui est évidemment périodique. Cette solution confirme celle que j'ai donnée autrefois pour représenter les oscillations de la chaleur solaire dans l'envéloppe du globe terrestre.

Dans le second cas les résultats ne sont pas moins remarquables, et l'analyse en est très-simple. L'état final n'est plus périodique; il a un caractère particulier qu'il est facile de reconnaître, parce que toutes les intégrations peuvent être effectuées.

III. La troisième partie du Mémoire est historique; elle contient d'abord l'énumération des premières recherches qui, ayant pour objet les propriétés de la chaleur, ont quelques rapports avec la théorie que j'ai formée. Il m'a paru utile

d'indiquer toutes les recherches antérieures. Voici les ouvrages que j'ai cités principalement. On a rappelé quelques passages du livre des principes mathématiques de la philosophie naturelle; car il était dans la destinée de ce grand ouvrage d'exposer, ou du moins d'indiquer les causes des principaux phénomènes de l'Uunivers. J'ai dû citer aussi un autre ouvrage de Newton, qui intéresse plus directement la théorie mathématique (*Tabula calorum*). On rappelle ensuite une expérience assez remarquable quoique très-imparfaite d'Amontons; les expériences peu précises mais nombreuses de Buffon; et les vues générales de ce grand écrivain sur l'état primitif du globe terrestre; puis un traité important et très-peu connu, de Lambert, l'un des plus célèbres géomètres de l'Allemagne. De là on passe à des Mémoires d'Euler, d'Émilie du Châtelet, de Voltaire, imprimés dans la collection de l'ancienne Académie des sciences de Paris; car cette illustre compagnie n'a jamais perdu de vue l'étude mathématique des lois de la propagation de la chaleur, et l'avait proposée aux géomètres dès 1738. J'ai cité ensuite un Mémoire remarquable de MM. Laplace et Lavoisier; les recherches de M. Leslie; celles du comte de Rumford; les ouvrages de M. le professeur Prevot, et un écrit de M. Biot, inséré dans un recueil scientifique.

Je n'ai pas borné cette énumération aux recherches expérimentales. Il n'était pas moins utile d'indiquer les résultats analytiques antérieurs qui ont quelques rapports avec la théorie de la chaleur. Dans ce nombre, il faut surtout remarquer une série très-simple donnée par Euler, celles que Daniel Bernoulli appliquait à la question des cordes vibrantes, et une formule que Lagrange a publiée dans ses Mémoires sur la propagation du son.

Les découvertes capitales de D'Alembert sur l'intégration de certaines équations différentielles, et surtout son analyse de la question des cordes vibrantes, avaient ouvert une carrière nouvelle, qui fut agrandie par les recherches d'Euler et de Lagrange. Cette question diffère beaucoup de celle de la distribution de la chaleur; mais les deux théories ont des éléments communs; parce que l'une et l'autre sont fondées sur l'analyse des différences partielles.

J'ai ajouté à ces citations celle d'un Mémoire posthume d'Euler, beaucoup moins connu que les précédents, et qui m'a été indiqué par notre savant confrère, M. Lacroix. Cet écrit a été publié par l'Académie de Pétersbourg, onze ans après la mort d'Euler. Il contient une formule qui dérive de l'emploi des intégrales définies, mais sans aucun examen de la convergence des séries, de la discontinuité des fonctions, ou des limites de la valeur de la variable.

Quoi qu'il en soit, on peut conclure de ces remarques, que les principes de la théorie analytique de la chaleur, loin d'être opposés à ceux que les géomètres avaient employés dans d'autres recherches, s'accordent avec plusieurs résultats précédents. Ceux que l'on vient de citer sont des cas particuliers et isolés d'une analyse beaucoup plus étendue, qu'il était absolument nécessaire de former, pour résoudre les questions, même les plus élémentaires de la théorie de la chaleur. J'ai indiqué aussi, en terminant cette énumération, l'analyse dont M. Laplace s'est servi dans ses recherches sur l'attraction des sphéroïdes. Cette analyse, convenablement modifiée, a des rapports remarquables avec celle qui convient à certaines questions du mouvement de la chaleur. Voilà, autant que j'ai pu les connaître jusqu'ici, les principales formules analy-

tiques dont la publication a précédé mes propres recherches, et qui ont quelque analogie avec les questions que j'ai traitées. Je me borne ici à rappeler ces premiers résultats, laissant aux géomètres et à l'histoire des sciences le soin de les comparer avec la théorie que l'on possède aujourd'hui. Il sera nécessaire, si l'on entreprend cette discussion, de consulter les derniers ouvrages publiés par Lagrange, et une note de ce grand géomètre, insérée dans ses manuscrits appartenants aux archives de l'Institut de France.

Le caractère principal des nouvelles méthodes d'intégration que j'ai ajoutées à l'analyse des différences partielles, est de s'appliquer à un grand nombre de questions naturelles très-importantes, que l'on avait tenté inutilement de résoudre par les méthodes connues. Celles que j'ai données conduisent à des résultats simples, qui représentent clairement tous les détails des phénomènes

Dans ce troisième paragraphe du Mémoire, on considère la nature des équations déterminées qui appartiennent à la théorie de la chaleur, et l'on a joint à cette discussion quelques remarques sur l'emploi des fonctions arbitraires.

Les exposants des termes successifs des séries qui expriment le mouvement variable de la chaleur dans les corps de dimensions finies sont donnés par des équations transcendantes, dont toutes les racines sont réelles. Il ne serait point nécessaire de démontrer cette proposition, qui est une conséquence, pour ainsi dire évidente, du principe de la communication de la chaleur. Il suffit de remarquer que ces équations déterminées ont une infinité de racines ; car ces racines ne peuvent être que réelles. : s'il en était autrement, les mouvements libres de la chaleur seraient assu-

jétis à des oscillations; ce qui est impossile sans l'action de causes périodiques extérieures.

Il était utile de considérer aussi la proposition dont il s'agit, comme un théorème abstrait fondé sur les seuls principes du calcul, et je l'ai présentée sous ce point de vue dans différentes recherches. Mais cette question n'ayant pas été examinée avec une attention suffisante, on a contesté la vérité de la proposition fondamentale. On a soutenu, pendant plusieurs années, que ces équations transcendantes ont des racines imaginaires, et l'on a cherché à le prouver de différentes manières. Ces objections ayant été réfutées, on a enfin reconnu que la proposition est vraie, et l'on se borne maintenant à en proposer diverses démonstrations. En effet ce théorème a cela de commun avec la plupart des vérités mathématiques, qu'étant une fois connues, on en peut aisément multiplier les preuves.

En rappelant cette discussion dans une partie de mon Mémoire, j'ai eu principalement pour objet de faire connaître toute l'étendue de la proposition, et de remonter au principe dont elle dérive.

Si l'on considère, par exemple, une suite d'enveloppes concentriques de dimensions et de formes quelconques, si l'on donne à ces vases, quelqu'en soit le nombre, des températures initiales arbitraires, et, ce qui augmente beaucoup la généralité de la question, si l'on attribue des capacités spécifiques quelconques aux liquides contenus dans ces vases, en supposant aussi que les facultés conductrices des enveloppes sont arbitraires depuis le premier vase jusqu'à l'enveloppe extérieure qui communique à l'air entretenu à la température zéro, la question du mouvement de la chaleur

dans ce système de vases est très-composée ; tous les éléments en sont arbitraires. Or on prouve, et même sans calcul, que les racines des équations déterminées qui conviennent à ces questions sont toutes réelles. Il suffit, pour le conclure avec certitude, de considérer la suite des variations de signes que présentent les valeurs des températures, et les changements qui surviennent dans ce nombre des variations, depuis l'état initial du système jusqu'à l'état final dont il s'approche de plus en plus pendant la durée infinie du phénomène.

Au reste, dans chacune des questions du mouvement de la chaleur, ce théorème sur la nature des racines se déduit aussi de l'analyse générale des équations.

L'application que j'ai faite de cette analyse a donné lieu (19ᵉ cahier de l'École polytechnique, pages 382, 383), à des objections qu'il m'avait paru inutile de réfuter, parce qu'aucun des géomètres qui ont traité depuis des questions analogues ne s'est arrêté à ces objections : mais comme je les trouve reproduites dans le nouveau volume de la collection de nos Mémoires (tom. VIII, nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences, *Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, page 11), cette réfutation est devenue en quelque sorte nécessaire, je l'ai donc insérée dans un article du présent Mémoire. Elle a pour objet de prouver que l'exemple cité par M. Poisson (École polytechnique, 19ᵉ cahier, page 383), en alléguant que dans ce cas l'application du théorème serait fautive, donne au contraire une conclusion conforme à la proposition générale.

L'erreur de l'objection provient, 1° de ce que l'auteur ne considère point le nombre infini des facteurs égaux de la

fonction e^x ou $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, où le nombre n est infini; 2° de ce qu'il omet dans l'énoncé du théorème le mot *réel*, qui en exprime le véritable sens. (*Voir* Théorie de la chaleur, page 373), et aussi pages 380, art. 312.

Les théorèmes de l'analyse des équations déterminées ne sont nullement restreints aux équations algébriques; ils s'appliquent à toutes les fonctions transcendantes que l'on a considérées jusqu'ici, et spécialement à celles qui appartiennent à la théorie de la chaleur. Il suffit d'avoir égard à la convergence des séries, ou à la figure des lignes courbes dont les limites de ces séries représentent les ordonnées. En général les théorèmes et les méthodes de l'analyse algébrique conviennent aux fonctions transcendantes et à toutes les équations déterminées. Le premier membre peut être une fonction quelconque. Il suffit qu'elle soit propre à faire connaître les valeurs de la fonction correspondantes aux valeurs de la variable, soit que ce calcul n'exige qu'un nombre limité d'opérations, soit qu'il fournisse seulement des résultats de plus en plus approchés, et qui diffèrent aussi peu qu'on le veut, des valeurs de la fonction.

Il y a des cas où la résolution exige que l'on considère toute la suite des fonctions dérivées : il y en a une multitude d'autres où l'examen d'un nombre très-limité de fonctions dérivées suffit pour rendre manifestes les propriétés des courbes que ces fonctions représentent, et pour déterminer les racines. On y parvient, ou par la seule comparaison des signes, ou, pour d'autres cas, par la séparation successive de certains facteurs dans les équations dérivées. La recherche des limites, les re-

lations singulières du nombre des variations de signes avec les valeurs des racines, le théorème dont la règle de Descartes est un cas particulier, et qui s'applique, soit aux nombres des variations de signes, soit aux différences de ces nombres, enfin les règles pour la distinction des racines imaginaires, s'étendent certainement à tous les genres de fonctions. Il n'est pas nécessaire qu'en poursuivant les différentiations, on puisse toujours former une équation dont on sait que toutes les racines sont réelles. Ce serait retrancher une des parties les plus importantes et les plus fécondes de l'art analytique, que de borner les théorèmes et les règles dont nous parlons aux seules fonctions algébriques, ou d'étendre seulement ces théorêmes à quelques cas particuliers. La considération des courbes dérivées successives jointe au procédé que j'ai donné (Société philomatique, année 1820, pages 185, 187), et qui fait connaître promptement et avec certitude si deux racines cherchées sont imaginaires ou réelles, suffit pour résoudre toutes les équations déterminées.

Je regrette de ne pouvoir donner à ces remarques théoriques les développements qu'elles exigeraient. J'ai rapporté plusieurs éléments de cette discussion dans la suite de ce mémoire; elle sera exposée plus complètement dans le traité qui a pour objet l'analyse générale des équations déterminées.

J'ai ajouté à cette même partie du Mémoire quelques remarques sur la question du mouvement des ondes; elles se rapportent aussi à la théorie analytique de la chaleur, parce qu'elles concernent l'emploi des fonctions arbitraires. Le but de ces remarques est de prouver que la question des ondes ne peut être généralement résolue si l'on n'introduit pas

une fonction arbitraire qui représente la figure du corps plongé.

Les conditions que supposent les équations différentielles propres à cette question, et les conditions relatives aux molécules de la surface, n'empêchent aucunement l'emploi d'une fonction arbitraire. Ces conditions s'établissent d'elles-mêmes, à mesure que les mouvements du liquide deviennent de plus en plus petits par l'effet des causes résistantes. Le calcul représente ces dernières oscillations, qui s'accomplissent pendant toute la durée du phénomène après que les conditions sont établies. C'est toujours sous ce point de vue qu'il faut considérer l'analyse des petites oscillations, car les résistances dont on fait d'abord abstraction, subsistent dans tous les cas, et finissent par anéantir le mouvement : mais il est nécessaire de ne point particulariser l'état initial.

En effet l'état qui se forme après que la continuité s'est établie dépend lui-même et très-prochainement de la disposition initiale qui est entièrement arbitraire. La continuité est compatible avec une infinité de formes qui différeraient extrêmement du paraboloïde ; et l'on ne peut pas restreindre à cette dernière figure celle du petit corps immergé, sans altérer, dans ce qu'elle a d'essentiel, la généralité de la question. Dans le cas même du paraboloïde, l'état initial du liquide est discontinu, et les premiers mouvements diffèrent de ceux que le calcul représente.

En répondant il y a quelques années à des observations que M. Poisson a publiées au sujet d'un de mes Mémoires (Bulletin des sciences, Société philomatique, année 1818, pages 129, 133), je n'ai pu me dispenser de remarquer que, pour satisfaire à l'étendue de la question des ondes, il faut

78.

conserver une fonction arbitraire; et j'ai dû contredire cette proposition, que, quelle que soit la forme du corps plongé, s'il est très-peu enfoncé, on peut remplacer ce petit segment par le paraboloïde osculateur. Il est certain, en effet, que cette substitution de la parabole à une figure quelconque ne peut conduire qu'à un résultat très-particulier. Si l'on ajoute présentement (Nouveaux Mémoires de l'Académie des sciences, tome VIII, note sur le problème des ondes, pages 216, 217) que c'est la condition de la continuité à la surface qui donne lieu à cette restriction, la conséquence n'est pas plus fondée, parce qu'il y a une infinité de cas où la continuité subsiste, quoique la figure du corps plongé s'écarte beaucoup et dans tous ses éléments de celle du paraboloïde. Les cas où l'auteur reconnaît maintenant que cette substitution ne serait pas permise ne se réduisent point à quelques-uns; ils sont au contraire infiniment variés, et l'analyse donne une solution incomparablement plus générale, qui n'exclut point les conditions relatives à la surface.

IV. Dans la quatrième et dernière partie du Mémoire, on applique la solution générale, qui est l'objet du premier paragraphe, aux principales questions de la théorie de la chaleur. On supposera donc que la capacité spécifique, la conducibilité intérieure ou perméabilité, la conducibilité extérieure qui dépend du rayonnement et de l'action du milieu, ne sont point exprimées par des coefficients entièrement constants, mais que ces qualités spécifiques sont assujéties à des variations qui dépendent de la température, ou de la profondeur, ou de la densité; et l'on se propose de déterminer les changements que ces variations introduisent dans les formules déja connues qui conviennent à des coefficients constants.

Or dans ces diverses questions, par exemple, dans celles du prisme, de la sphère, etc., on reconnaît que le calcul peut se ramener dans les cas les plus composés à l'application de la formule générale (1), qui satisfait à l'équation différentielle du mouvement de la chaleur, et contient trois fonctions arbitraires. C'est pour cette raison que nous avons expliqué avec beaucoup de soin, dans la première partie de notre Mémoire, la solution de cette question fondamentale.

Il est d'abord nécessaire, pour fonder la théorie, de considérer les coefficients spécifiques comme constants, et l'on peut maintenant ajouter au résultat principal un ou plusieurs termes dus aux variations qui seraient indiquées par des expériences précises. Nous avons présenté ces vues, dès l'origine de nos recherches, en 1807, 1808 et 1811, et nous les avons reproduites dans la théorie de la chaleur, pages 46, 598, 599 et 600.

En rappelant ici ce genre de questions, on doit citer surtout un Mémoire que M. Guillaume Libri a présenté à l'Institut de France en 1825, et qui a été imprimé depuis à Florence. L'auteur, qui a cultivé avec le plus grand succès les branches principales de l'analyse mathématique, a traité la question du mouvement de la chaleur dans l'armille, en ayant égard aux petites variations des coefficients : la méthode qu'il a suivie et les résultats auxquels il est parvenu méritent toute l'attention des géomètres. Au reste, cette recherche analytique est fondée sur les observations que l'on doit à MM. Dulong et Petit, et qui ont été couronnées par l'Académie. Elles ne sont pas moins remarquables par les conséquences théoriques que par la précision des résultats.

Nous venons d'indiquer l'objet de cette dernière partie de

notre Mémoire. La conclusion générale de ces recherches est que la théorie analytique de la chaleur n'est point bornée aux questions où l'on suppose constants les coefficients qui mesurent la capacité de chaleur, la perméabilité des solides, la pénétrabilité des surfaces. Elle s'étend, par la méthode des approximations successives, et surtout par l'emploi de la solution qui est démontrée dans le premier paragraphe de ce Mémoire, à toutes les perturbations du mouvement de la chaleur.

ADDITION AU MÉMOIRE

Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques, inséré dans ce volume;

PAR M. POISSON.

Lu à l'Académie, le 24 novembre 1828.

JE me propose dans cette *addition* d'intégrer complètement les équations aux différences partielles, relatives aux vibrations d'un corps élastique homogène. En supprimant les forces données X, Y, Z, que renferment les équations (6) du n° 16 de mon Mémoire, on aura

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2 u}{dt^2} &= \frac{a^2}{3}\left(3\frac{d^2 u}{dx^2} + 2\frac{d^2 v}{dx\,dy} + 2\frac{d^2 w}{dx\,dz} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}\right),\\
\frac{d^2 v}{dt^2} &= \frac{a^2}{3}\left(3\frac{d^2 v}{dy^2} + 2\frac{d^2 u}{dx\,dy} + 2\frac{d^2 w}{dy\,dz} + \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dz^2}\right),\\
\frac{d^2 w}{dt^2} &= \frac{a^2}{3}\left(3\frac{d^2 w}{dz^2} + 2\frac{d^2 u}{dx\,dz} + 2\frac{d^2 v}{dy\,dz} + \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2}\right);
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

et c'est ce système de trois équations à quatre variables indépendantes x, y, z, t, qu'il s'agit d'intégrer.

Si nous faisons

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}, \qquad (2)$$

nous pourrons les écrire ainsi :

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 u}{dt^2}&=\frac{a^2}{3}\left(\frac{d^2 u}{dx^2}+\frac{d^2 u}{dy^2}+\frac{d^2 u}{dz^2}\right)+\frac{2a^2}{3}\frac{d^3\varphi}{dx\,dt^2},\\ \frac{d^2 v}{dt^2}&=\frac{a^2}{3}\left(\frac{d^2 v}{dx^2}+\frac{d^2 v}{dy^2}+\frac{d^2 v}{d^2 z}\right)+\frac{2a^2}{3}\frac{d^3\varphi}{dy\,dt^2},\\ \frac{d^2 w}{dt^2}&=\frac{a^2}{3}\left(\frac{d^2 w}{dx^2}+\frac{d^2 w}{dy^2}+\frac{d^2 w}{dz^2}\right)+\frac{2a^2}{3}\frac{d^3\varphi}{dz\,dt^2}.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

En les ajoutant après les avoir différentiées respectivement par rapport à $x, y, z,$ on en conclura

$$\frac{d^4\varphi}{dt^4}=a^2\left(\frac{d^4\varphi}{dx^2dt^2}+\frac{d^4\varphi}{dy^2dt^2}+\frac{d^4\varphi}{dx^2dt^2}\right):$$

et si l'on intègre tous les termes de cette équation deux fois de suite par rapport à t, on aura

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\mathrm{P}t+\mathrm{Q}\right);$$

P et Q étant des fonctions arbitraires de x, y, z. Si l'on désigne par p et q deux autres fonctions de ces variables et qu'on fasse

$$\varphi=\varphi'+pt+q,$$

on pourra réduire l'équation précédente à celle-ci :

$$\frac{d^2\varphi'}{dt^2}=a^2\left(\frac{d^2\varphi'}{dx^2}+\frac{d^2\varphi'}{dy^2}+\frac{d^2\varphi'}{dz^2}\right),\qquad(4)$$

en établissant entre p, q, P, Q, ces relations :

$$\frac{d^2p}{dx^2}+\frac{d^2p}{dy^2}+\frac{d^2p}{dz^2}+\mathrm{P}=0,\quad\frac{d^2q}{dx^2}+\frac{d^2q}{dy^2}+\frac{d^2q}{dz^2}+\mathrm{Q}=0.$$

Soit maintenant

$$u=u'+a^2\frac{d\varphi'}{dx},\quad v=v'+a^2\frac{d\varphi'}{dy},\quad w=w'+a^2\frac{d\varphi'}{dz};\quad(5)$$

substituons ces valeurs de $u, v, w,$ et celle de φ dans les équations (3); en ayant égard aux différentielles relatives à $x, y, z,$ de l'équation (4), et réduisant, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 u'}{dt^2} &= \frac{a^2}{3}\left(\frac{d^2 u'}{dx^2} + \frac{d^2 u'}{dy^2} + \frac{d^2 u'}{dz^2}\right),\\ \frac{d^2 v'}{dt^2} &= \frac{a^2}{3}\left(\frac{d^2 v'}{dx^2} + \frac{d^2 v'}{dy^2} + \frac{d^2 v'}{dz^2}\right),\\ \frac{d^2 w'}{dt^2} &= \frac{a^2}{3}\left(\frac{d^2 w'}{dx^2} + \frac{d^2 w'}{dy^2} + \frac{d^2 w'}{dz^2}\right);\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

et si nous faisons les mêmes substitutions dans l'équation (2), il en résultera

$$\frac{du'}{dx} + \frac{dv'}{dy} + \frac{dw'}{dz} = 0. \qquad (7)$$

Cela posé, d'après ce que j'ai trouvé dans un autre Mémoire, l'intégrale complète de l'équation (4) sous forme finie, sera

$$\begin{aligned}\varphi' = &\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(x + at\cos.\alpha,\ y + at\sin.\alpha\sin.6,\\ &\qquad z + at\sin.\alpha\cos.6)\,t\sin.\alpha\, d\alpha\, d6\\ &+ \frac{d.}{dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + at\cos.\alpha,\ y + at\sin.\alpha\sin.6,\\ &\qquad z + at\sin.\alpha\cos.6)\,t\sin.\alpha\, d\alpha\, d6,\end{aligned}$$

en désignant par f et F les deux fonctions arbitraires, et par π le rapport de la circonférence au diamètre. Les intégrales des équations (6) se déduiront de celle-ci en y mettant $\frac{a}{\sqrt{3}}$ à la place de a, et changeant les fonctions arbitraires; si l'on désigne par $\frac{df_1}{dx}$, $\frac{d\mathrm{F}_1}{dx}$, $\frac{df_2}{dx}$, $\frac{d\mathrm{F}_2}{dx}$, celles qui entreront dans

les valeurs de v' et w', on aura

$$v' = \frac{d.}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1\left(x + \frac{at}{\sqrt{3}}\cos.\alpha,\ y + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\sin.\beta,\ z + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\cos.\beta\right) t\sin.\alpha\, d\alpha\, d\beta$$
$$+ \frac{d^2.}{dx\,dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_1\left(x + \frac{at}{\sqrt{3}}\cos.\alpha,\ y + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\sin.\beta\ z + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\cos.\beta\right) t\sin.\alpha\, d\alpha\, d\beta,$$

$$w' = \frac{d.}{dx}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2\left(x + \frac{at}{\sqrt{3}}\cos.\alpha,\ y + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\sin.\beta,\ z + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\cos.\beta\right) t\sin.\alpha\, d\alpha\, d\beta$$
$$+ \frac{d^2.}{dx\,dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_2\left(x + \frac{at}{\sqrt{3}}\cos.\alpha,\ y + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\sin.\beta,\ z + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\cos.\beta\right) t\sin.\alpha\, d\alpha\, d\beta;$$

et pour satisfaire en même temps à l'équation (7), de la manière la plus générale, il faudra prendre

$$u = \varpi - \frac{d.}{dy}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_1\left(x + \frac{at}{\sqrt{3}}\cos.\alpha,\ y + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\sin.\beta\ z + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\cos.\beta\right) t\sin.\alpha\, d\alpha\, d\beta$$
$$- \frac{d.}{dz}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f_2\left(x + \frac{at}{\sqrt{3}}\cos.\alpha,\ y + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\sin.\beta\ z + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\cos.\beta\right) t\sin.\alpha\, d\alpha\, d\beta$$
$$- \frac{d^2.}{dy\,dt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_1\left(x + \frac{at}{\sqrt{3}}\cos.\alpha,\ y + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\sin.\beta,\ z + \frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\cos.\beta\right) t\sin.\alpha\, d\alpha\, d\beta$$

$$-\frac{d^2.}{dydt}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F_2\left(x+\frac{at}{\sqrt{3}}\cos.\alpha,\ y+\frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\sin.6\right.$$
$$\left. z+\frac{at}{\sqrt{3}}\sin.\alpha\cos.6\right)t\sin.\alpha d\alpha d6;$$

ϖ designant une fonction arbitraire de y et z. Au moyen de ces valeurs de φ', u', v', w', les formules (5) seront les intégrales des équations (1) qu'on se proposait de trouver.

En remplaçant les variables x, y, z, par d'autres coordonnées, on fera prendre différentes formes à ces intégrales. Si les inconnues u, v, w, doivent être indépendantes d'une ou de deux coordonnées, leurs expressions deviendront plus simples; et il pourra arriver que les intégrales définies relatives à α et 6 qu'elles contiennent se réduisent à des intégrales simples, ou même qu'elles s'effectuent entièrement. Nous nous contenterons maintenant d'indiquer ces réductions. Nous reviendrons dans la suite sur les applications des formules précédentes à des problèmes particuliers.

FIN DU TOME VIII.



XI. — COMITÉ DE COGNAC (Station viticole. Séance du 21 mars 1875). Expose des expériences faites à Cognac et des résultats obtenus par M. MAX. CORNU et M. MOUILLEFERT. In-4; 1875. 1 fr.

XII. — DUMAS, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences. — **Note sur la composition et les propriétés physiologiques des produits du goudron de houille.** In-4; 1875. . . . . 50 c.

XIII. — DUCLAUX, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon. — **Études sur la nouvelle Maladie de la Vigne dans le sud-est de la France.** In-4, avec une planche représentant, coloriés en rouge, les pays vignobles atteints par le Phylloxera en 1874. . . . . 75 c.

XIV. — BOULEY, Membre de l'Institut. — **Rapport** sur les réclamations dont a été l'objet le décret relatif à l'importation en Algérie des plants d'arbres fruitiers ou forestiers venant de France. In-4; 1875. . . . . 75 c.

XV. — DUMAS, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, et MAX. CORNU. — **Instruction pratique sur les moyens à employer pour combattre le Phylloxera, et spécialement pendant l'hiver.** In-4; 1876. . . . . 75 c.

XVI. — MILLARDET, *Délégué de l'Académie.* — **Études sur les Vignes d'origine américaine qui résistent au Phylloxera.** In-4; 1876. . . . . 2 fr.

XVII. — GIRARD (Maurice), *Délégué de l'Académie.* — **Indications générales sur les vignobles des Charentes**; avec 3 planches représentant, teintes en rouge, les portions du territoire des Charentes où le Phylloxera a été reconnu à la fin de chacune des années 1872, 1873 et 1874. In-4; 1876. 2 fr. 50 c.

XVIII. — CORNU (Maxime) et MOUILLEFERT, *Délégués de l'Académie.* — **Expériences faites à la station viticole de Cognac dans le but de trouver un procédé efficace pour combattre le Phylloxera.** In-4; 1876 . . . . 5 fr.

XIX. — AZAM, Docteur en Médecine. — **Le Phylloxera dans le département de la Gironde.** In-4, avec une grande planche représentant, au moyen de teintes noires, rouges et bleues, l'état du fléau en 1873 et son développement en 1874 et en 1875; 1876. . . . . 75 c.

XX. — BALBIANI. — **Sur l'éclosion de l'œuf d'hiver du Phylloxera de la Vigne.** In-4; 1876. (*Voir* n° XXIII.)

XXI. — **Extraits des Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences de l'Institut de France.** (Séances des 2 novembre 1875 et 2 juillet 1876). . . . . 1 fr.

SOMMAIRE : Sur la parthénogénèse du Phylloxera comparée à celle des autres Pucerons; par M. BALBIANI. — Résultats obtenus, au moyen du sulfocarbonate de potassium, sur les vignes phylloxérées de Mézel, par M. AUBERGIER. — Observations sur la lettre de M. Aubergier; par M. DUMAS. — Sur le mode d'emploi des sulfocarbonates, par M. J.-B. JAUBERT. — Etat actuel des vignes soumises au traitement du sulfocarbonate de potassium depuis l'année dernière; par M. P. MOUILLEFERT. — Résultats obtenus à Cognac avec les sulfocarbonates de sodium et de baryum appliqués aux vignes phylloxérées; par M. P. MOUILLEFERT. — Expériences relatives à la destruction du Phylloxera; par M. MARION.

XXII. — BOUTIN (aîné), *Délégué de l'Académie.* — **Études d'analyses comparatives sur la vigne saine et sur la vigne phylloxérée.** In-4; 1877. . . . . 1 fr.

XXIII. — BALBIANI, Délégué de l'Académie des Sciences, Professeur au Collége de France. — **Mémoires sur le Phylloxera**, présentés à l'Académie des Sciences, en 1876. In-4; 1876. . . . 2 fr.

SOMMAIRE : Sur l'éclosion prochaine des œufs d'hiver du Phylloxera (mars 1876). — Sur l'éclosion de l'œuf d'hiver du Phylloxera (avril 1876). — Sur la parthénogénèse du Phylloxera comparée à celle des autres Pucerons. — Nouvelles observations sur le Phylloxera du chêne comparé au Phylloxera de la vigne. — Remarques au sujet d'une Note récente de M. Lichtenstein sur la reproduction des Phylloxeras. — Recherches sur la structure et sur la vitalité des œufs du Phylloxera.

XXIV. — DUCLAUX, Professeur à la Faculté des Sciences de Lyon, délégué de l'Académie. — **Études sur la nouvelle Maladie de la Vigne dans le sud-est de la France.** Pays vignobles atteints par le Phylloxera en 1875 et 1876. In-4, avec 2 planches; 1876. . . . . 1 fr. 25 c.

XXV. — COMMISSION DU PHYLLOXERA. — **Avis sur les mesures à prendre pour s'opposer à l'extension des ravages du Phylloxera.** In-4; 1877. . . . . 75 c.

XXVI. — CORNU (Maxime), *Délégué de l'Académie.* — **Études sur le Phylloxera vastatrix.** In-4 de 358 pages, avec 24 planches en couleur. 1878 . . . . 10 fr.

INSTITUT DE FRANCE. — **Instruction sur les paratonnerres**, adoptée par l'Académie des Sciences (Ire Partie, 1823, par *Gay-Lussac.* — IIe Partie, 1854, par M. *Pouillet.* — IIIe Partie, 1867, par M. *Pouillet*). In-18 jésus, avec 58 figures dans le texte et une planche; 1874. . . . . 2 fr. 50 c.

PRÉFECTURE DE LA SEINE. — **Assainissement de la Seine. Épuration et utilisation des eaux d'égoût**, 4 beaux volumes in-8 jésus; avec 17 pl., dont 10 en chromolithographie; 1876-1877. 26 fr.

PRÉFECTURE DE LA SEINE. — **Assainissement de la Seine. Épuration et utilisation des eaux d'égoût.** — Rapport de la Commission d'études chargée d'étudier les procédés de culture horticole à l'aide des eaux d'égout. In-8 jésus avec pl.; 1878. . . . . 1 fr. 50

RAPPORT DE LA COMMISSION D'ÉTUDES chargée d'étudier l'influence exercée dans la presqu'île de Gennevilliers par l'irrigation en eau d'égoût, sur la valeur vénale et locative des terres de culture. In-8 jésus avec 3 planches en chromolithographie; 1878 . . . . 3 fr.